国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

一个组合对策问题的解*

黄振高 黄受安**
(系统工程与应用数学系)

摘 要 本文求解如下的组合对策问题：设有一堆棋子，总数N是奇数，甲乙两人轮流取子，每人每次可取一颗、二颗，最多可取s颗，但不能不取，直至取完后分别来数甲乙两人所取棋子的总数，总数为奇数者获胜。站在甲的立场上考虑获胜的策略，文中解决了如下两个问题：(I) 总数N应是什么样的奇数，甲才有获胜策略；(II) 当N一定时，甲应采取什么样的策略取子，才能获胜。

关键词 运筹学，对策论，策略，组合，获胜策略
分类号 O225

有则较简单的组合对策问题，指的是：有15颗棋子放在一堆，甲乙两人轮流取子，每人每次所取的颗数或是1颗、或是2颗、最多是3颗，但不能不取，直到取完后，来数甲乙两人所取的棋子总数，总数是奇数者获胜。由于15本身是个奇数，分成两堆后，总是一个奇数加上一个偶数，因而取子结果必定是一胜一负，不可能出现平局。

1 问题和定理

通过反复取子试验，可发现甲获胜的策略是：甲先取子，第一次必须取2颗子，以后各次取法是：

1. 如果甲所取的棋子数和甲手中已取的棋子数之和是个奇数，那么留下给乙取的棋子数必须是1或8或9；

2. 如果甲所取的棋子数和甲手中已取的棋子数之和是个偶数，那么留下给乙取的棋子数必须是4和5.

按照这条规则，甲必是百战百胜。但是如果这堆棋子的总数不是15而是更大的一个奇数，而且每人每次取子的个数也不一定最多是3的话，甲的获胜策略又将怎样呢？

以下我们假定棋子的总数是奇数N，甲乙两人轮流取子，每人每次所取的颗数至少

1989年3月16日收稿
* 国家自然科学基金资助课题
** 88级硕士研究生

是1颗、或2颗，……，最多是s ($s\geqslant 1$)颗，直至取完后，谁取的棋子总数是奇数谁就是胜者。

站在甲的立场上，我们考虑甲的获胜策略。显然当$s=1$时，只要甲先取子，获胜是无疑的。下面假定 $s>1$，显然要回答的问题包括：(Ⅰ) 棋子总数N是个什么样的奇数，甲才有可能获胜，即有获胜策略；(Ⅱ) 当N给定后，甲应采取什么样的策略取子，才能获胜。针对问题 (Ⅰ) 我们有如下结论。

设甲某次取过棋子后，留下给乙取的棋子总数是r.

定理 1 设棋子总数是奇数N，且s为一奇数，甲在每步取完棋子后：

1) 若甲所取的棋子数与手中已取的棋子数之和m是奇数，则甲获胜的充分必要条件是留下给乙取的棋子数r满足$r\equiv 0$或1 $(\mathrm{mod}(2s+2))$；

2) 若甲所取的棋子数与手中已取的棋子数之和m是偶数，则甲获胜的充分必要条件是留下给乙取的棋子数r满足$r\equiv s+1$或$s+2$ $(\mathrm{mod}(2s+2))$。

定理 2 设棋子总数是奇数N且s为偶数，甲在每步取完棋子后：

1) 若甲所取的棋子数与手中已取的棋子数之和m是奇数，则甲获胜的充分必要条件是留下给乙取的棋子数r满足$r\equiv 0$或1 $(\mathrm{mod}(s+2))$；

2) 若甲所取的棋子数与手中已取的棋子数之和m是偶数，则甲获胜的充分必要条件是留下给乙取的棋子数r满足$r\equiv s+1$ $(\mathrm{mod}(s+2))$。

有上述两定理的结论，我们即可解决问题 (Ⅰ)，得到如下结论。

定理 3 设棋子总数N是奇数：

1) 当s是奇数时，甲先取子能获胜的充分必要条件是$N\not\equiv s+2$ $(\mathrm{mod}(2s+2))$；

2) 当s是偶数时，甲先取子能获胜的充分必要条件是$N\not\equiv s+1$ $(\mathrm{mod}(s+2))$。

2 定理的证明

定理1的证明 先用数学归纳法证明充分性。对甲某步留下棋子数r进行数学归纳。

1) 当$r<2s+2$时

若m是奇数，无论$r=0$还是$r=1$，甲均已获胜；

若m是偶数且$r=s+1$或$s+2$，有

(a) 当$r=s+1$时，则r是偶数，且若乙再取t_2颗棋子，甲只须再取t_1颗棋子：

$$t_1=\begin{cases} r-t_2-1 & \text{若}t_2\text{是偶数} \\ r-t_2 & \text{若}t_2\text{是奇数} \end{cases}$$

则甲便获胜。

(b) 当$r=s+2$时，则r是奇数，若乙再取t_2个棋子，则甲只须再取t_1个棋子：

$$t_1=\begin{cases} r-t_2 & \text{若}t_2\text{是偶数} \\ r-t_2-1 & \text{若}t_2\text{是奇数} \end{cases}$$

甲便获胜。

总之，当$r<2s+2$时，充分性为真。

2) 假设充分性对所有小于r的满足定理条件的棋子数都成立，下面考察甲留下r

的情形。

(a) 当m是奇数，且$r\equiv 1$或$0 \pmod{2s+1}$，设乙再取t_2个棋子（$1\leqslant t_2\leqslant s$），则甲可按下述策略取子$t_1$个：

$$t_1=\begin{cases} s-t_2+2 & \text{当}t_2\text{为偶且}r\equiv 1 \pmod{2s+2}\text{时} \\ s-t_2 & \text{当}t_2\text{为偶且}r\equiv 0 \pmod{2s+2}\text{时} \\ s-t_2+1 & \text{当}t_2\text{为奇且}r\equiv 1\text{或}0 \pmod{2s+2}\text{时} \end{cases}$$

显然，$1\leqslant t_1\leqslant s$且$t_1$总为奇数，于是经过这一轮取子后甲手中的棋子总数$m+t_1$为偶数，而留下给乙的棋子数为$r-t_1-t_2\equiv s+1$或$s+2 \pmod{2s+2}$，故由归纳假设知，甲必获胜。

(b) 当m是偶数时，且$r\equiv s+1$或$s+2 \pmod{2s+2}$，仍设乙再取t_2个子（$1\leqslant t_2\leqslant s$），则甲可取：

$$t_1=\begin{cases} s-t_2+1 & \text{当}t_2\text{为奇数时} \\ s-t_2 & \text{当}t_2\text{为偶数时且}r\equiv s+1 \pmod{2s+2} \\ s-t_2+2 & \text{当}t_2\text{为偶数且}r\equiv s+2 \pmod{2s+2} \end{cases}$$

同样可验证，由归纳假设知，甲必获胜。

再证定理的必要性。

1) 若m为奇数且$r\not\equiv 1, 0 \pmod{2s+2}$，设$r\equiv r_s \pmod{2s+2}$，其中$2\leqslant r_s\leqslant 2s+1$.

(a) $r_s\leqslant s+1$，而此时乙手中的棋子数的奇偶性与r相同，从而与r_s-1相反，于是乙再取r_s-1个之后手中的棋子总数为奇数，而留给甲取的棋子数同余于$r_s-(r_s-1)=1 \pmod{2s+2}$，由定理的充分性结论可知，乙能获胜。

(b) $r_s>s+1$，此时乙可取$r_s-(s+1)\in[1, s)$个，之后乙手中便共有偶数个棋子数，而留给甲取的棋子数同余于$r_s-[r_s-(s+1)]=s+1 \pmod{2s+2}$，因此由充分性结论知，乙能获胜。

2) 若m是偶数且$r\not\equiv s+1, s+2 \pmod{2s+2}$，$r_s$如上，此时满足$r_s\in[0, 2s+2)$且$r_s\neq s+1$，$s+2$.

(a) $r_s<s+1$

设乙接着取t_2个棋子：

$$t_2=\begin{cases} r_s & \text{当}r_s\text{为偶数且}r_s>0 \\ s & \text{当}r_s\text{为偶数且}r_s=0 \\ r_s & \text{当}r_s\text{为奇数} \end{cases}$$

之后，乙手中的棋子总数的奇偶性分别是：奇、偶、奇；而留给甲的棋子数分别同余于：$r_s-r_s\equiv 0 \pmod{2s+2}$、$r-s\equiv 2s+2-s=s+2 \pmod{2s+2}$、$r_s-r_s=0 \pmod{2s+2}$，故当$r_s<s+1$时，由充分性乙能获胜。

(b) $r_s>s+2$，此时乙手中已有的棋子数的奇偶性与r的奇偶性相反，因而与r_s-s-2相同，故乙再取r_s-r-2个子后手中子数是偶数，而留给甲取的棋子数同余于$r_s-(r_s-s-2)=s+2 \pmod{2s+2}$，故当$r_s>s+2$时，已能获胜。

至此必要性证毕，因而完成了定理1的证明。

定理 2 的证明 仍对 r 进行数学归纳来证明充分性，其方法与定理 1 的证明相似。

1) $r<s+2$

若m是奇数，只要$r=0$ 或 1，则甲已获胜；

若m是偶数且$r=s+1$，设乙接着取t_2颗棋子，则甲可取 t_1 颗：

$$t_1=\begin{cases}r-t_2 & \text{当}t_2\text{是偶数}\\ r-t_2-1 & \text{当}t_2\text{是奇数}\end{cases}$$

甲便立即获胜。

2) 假定充分性对所有小于r的满足定理条件的数都成立，下面考察甲留下r个子的情形。

(a) 若m为奇数且$r\equiv 1$或$0\ (\mathrm{mod}(s+2))$，设乙接着取t_2个棋子，则甲取t_1颗子：

$$t_1=\begin{cases}s+1-t_2 & \text{当}t_2\text{为奇且}r\equiv 0\quad(\mathrm{mod}(s+2))\text{时}\\ s+3-t_2 & \text{当}t_2\text{为奇且}r\equiv 1\quad(\mathrm{mod}(s+2))\text{但}t_2\not\equiv 1\text{时}\\ s+2-t_2 & \text{当}t_2\text{为偶时}\\ 1 & \text{当}t_2=1\text{且}r\equiv 1\quad(\mathrm{mod}(s+2))\text{时}\end{cases}$$

易验证并由归纳假设知甲必获胜。

(b) 若m是偶数且$r\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$，仍假设乙接着取$t_2$个棋子，则甲接着取$t_1$个子：

$$t_1=\begin{cases}s+1-t_2 & \text{当}t_2\text{为偶时}\\ s-t_2 & \text{当}t_2\text{为奇时}\end{cases}$$

同样验证并由归纳假设知甲必获胜。

再证必要性。

1) m为奇数且$r\not\equiv 1,\ 0\ (\mathrm{mod}(s+2))$，设$r\equiv r_s\ (\mathrm{mod}(s+2))$，其中$1<r_s\leqslant s+1$，乙取$r_s-1\geqslant 1$个棋子，此时，无论$r$的奇偶性如何，乙手中的棋子总数总是奇数，而留下的棋子数为$r-(r_s-1)\equiv 1\ (\mathrm{mod}(s+2))$，故由充分性知乙能获胜。

2) m为偶数，且$r\not\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$，即$0\leqslant r_s\leqslant s$，乙可接着取$t_2$个：

$$t_2=\begin{cases}1 & r_s=0\\ r_s & r_s\geqslant 1\end{cases}$$

在第一种情况下，乙取子后手中的棋子数是偶数，而留下的棋子数为$r-t_2\equiv r-1\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$；在第二种情况下，乙取子后手中的棋子数是奇数，而留下的棋子数为$r-r_s\equiv 0\ (\mathrm{mod}(s+2))$，故由充分性知，乙能获胜。

至此必要性证毕，从而完成了定理 2 的证明。

从上述两个定理的证明过程中，不难看出每个定理的1)和2)具有互补性，即甲或可按 1) 取子或可按 2) 取子，二者必居其一。因此定理 1 和定理 2 实际给出了甲的获胜对策。

定理 3 的证明 先证充分性。

1) s为奇数时且$N\not\equiv s+2\ (\mathrm{mod}(2s+2))$，设$N\equiv N_s\ (\mathrm{mod}2s+2)$，其中$N_s\in[1,\ 2s+2)$，但$N_s$是奇数且$N_s\not\equiv s+2$，于是当$N_s\in[1,\ s+1)$时，甲可先取$t_1$个棋子：$t_1=N_s$，此时甲手中的棋子数$t_1$是奇数而留给乙的棋子数为$N-t_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}(2s+2))$，

因而甲能获胜；当$N_s\in(s+3,\ 2s+1]$时，令$N_s=s+\lambda$，则λ是偶数，于是甲可先取$t_1=\lambda-2$颗棋子，显然t_1总是大于0的偶数而留给乙的棋子数为：$N-t_1\equiv N_s-\lambda+2=s+2\ (\mathrm{mod}(2s+2))$，因而甲能获胜。

2）　s为偶数且$N\not\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$，设$N\equiv N_s\ (\mathrm{mod}(s+2))$，其中$N_s$为奇数且$N_s\in[1,\ s)$，则甲可先取$t_1=N_s$个棋子。由于此时甲手中的棋子数是奇数，而留下的棋子数为$N-t_1\equiv N_s-N_s=0\ (\mathrm{mod}(s+2))$，因而甲能获胜。

再证必要性。

1）　s是奇数且$N\equiv s+2\ (\mathrm{mod}(2s+2))$，又设甲先取$t_1$个棋子，留下$r=N-t_1$个棋子，显然：当$t_1$为奇数时，因$1\leqslant t_1\leqslant s$，所以$r=N-t_1\equiv s+2-t_1\not\equiv 1$或$0\ (\mathrm{mod}(2s+2))$；当$t_1$为偶数时，因$2\leqslant t_1<s$，所以$r=N-t_1\equiv s+2-t_1\not\equiv s+1$或$s+2\ (\mathrm{mod}(2s+2))$。故无论$t_1$如何，若乙按所给规则进行取子，甲必输。

2）　s是偶数，且$N\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$，又设甲先取$t_1$个子，留下$r=N-t_1$个子，显然：当$t_1$为奇数时，$1\leqslant t_1\leqslant s-1$，故$r=N-t_1\equiv s+1-t_1\not\equiv 0$或$1\ (\mathrm{mod}(s+2))$；当$t_1$为偶数时，$2\leqslant t_1\leqslant s$，故$r=N-t_1\equiv s+1-t_1\not\equiv s+1\ (\mathrm{mod}(s+2))$。因此甲也会输。至此必要性证毕，从而完成了定理3的证明。

参 考 文 献

［1］　谈祥柏．趣味对策论．中国青年出社版，1982

［2］　Gale D, Neymann A. Nim-Type Games. Inter. J. of Game Theory, 1982, 11:17～20

Solution to a Combinatorial Game

Huang Zhengao　　Huang Shouan

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

Let there be a heap of beans with total number N(odd) and an integer s, we difine a 2-person game Γ(N, s) as follows: The first player P_{I} takes some beans from the heap, at least one bean and at most s beans. Player two, P_{II} now picks some beans under the same constraint. The play then reverts to P_{I} and continues in the same way until all beans have been removed. The player with odd number of beans at hand wins.

In this paper, we completely solve the game. At first, we give the winning strategy (if exists) for P_{I}.

Theorem　Let r be the number of beans P_{I} leaving to P_{II} at any step,

and q be the number P_I have at the end of the step. Then P_I will win if

$$r \equiv 1 \text{ or } 0 \ (\bmod (2s+2)) \text{ if } q \text{ is odd, and}$$
$$r \equiv s+1 \text{ or } s+2 \ (\bmod (2s+2)) \text{ if } q \text{ is even}$$

when s is odd and

$$r \equiv 1 \text{ or } 0 \ (\bmod (s+2)) \text{ if } q \text{ is odd, and}$$
$$r \equiv s+1 \ (\bmod (s+2)) \text{ if } q \text{ is even}$$

when s is even.

The theorem can be proved by induction. As a by-product of the theorem we have

Corollary $\Gamma(n, s)$ is a win for P_{II} iff $n \equiv s+1 \ (\bmod (2s+2))$ when s is odd and $n \equiv s+1 \ (\bmod (s+2))$ when s is even.

Key words: operations research, game theory, strategy, combination, winning strategy

（上接第24页）

Window Parallel Algorithms for Solving Three-level Schemes on MIMD Machines

Xiong Yueshan

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, the window parallel algorithms for solving general three-level schemes On MIMD machines are proposed, the WBJ schemes are given, and the convergence for three-level schemes is proved. The conclusions of the paper show that the convergence for the window parallel algorithms is independent of the size of the window. Which has influence on the efficiency of each processor.

Key words: partial differential equations, differences, iterative methods, window, WBJ method, three-level schemes