国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期　1990年9月　Vol.12 No.3

凸集支撑函数的性质及其应用

刘普寅
(系统工程与应用数学系)

摘　要　本文讨论一个凸集C的支撑函数的几个有用性质，并把这些性质应用于对函数次微分的研究，得到有关函数次微分的几个有趣结果。

关键词　凸集，支撑函数，次微分，闭凸函数，指示函数，共扼函数，次梯度

分类号　O174.13

R^n中闭凸集和它的支撑函数之间存在着一一对应关系，所以对于支撑函数各种性质的研究能揭示出R^n中闭凸集的结构和性质，这对集值函数的研究提供了一条非常有用的途径。本文讨论R^n中凸集支撑函数的几个有用性质，通过利用支撑函数的性质得到关于函数次微分的几个有趣结果。

1　支撑函数的定义

本文的讨论均在R^n中进行，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$R^n$中通常的内积，$\|\cdot\|$表示欧氏模，$C\subset R^n$，$\mathrm{cl}(C)$为$C$的闭包，$\mathrm{ri}(C)$为$C$的内部。

定义 1　设$C\subset R^n$，则称函数

$$\delta^*(x\,|C)=\sup\{\langle x,y\rangle|\ y\in C\}\quad (x\in R^n)$$

为C的支撑函数。由此定义，容易得到

命题 1　设$C\subset R^n$为凸集，则$\forall x\in R^n$，有

$$\delta^*(x\,|C)=\delta^*(x\,|\mathrm{cl}(C))=\delta^*(x\,|\mathrm{ri}(C))$$

命题 2　设$C\subset R^n$为凸集，则$x_0\in\mathrm{cl}(C)$的充要条件是：$\langle x_0,x\rangle\leqslant\delta^*(x\,|C)$　$(\forall x\in R^n)$

证明　若$x_0\in\mathrm{cl}(C)$，则$\forall x\in R^n$，有

$$\delta^*(x\,|C)=\delta^*(x\,|\mathrm{cl}(C))=\sup\{\langle x,y\rangle\ |y\in\mathrm{cl}(C)\}\geqslant\langle x,x_0\rangle$$

即
$$\langle x_0,x\rangle\leqslant\delta^*(x\,|C)\ \ (\forall x\in R^n)$$

反之，若$x_0\bar{\in}\mathrm{cl}(C)$，则由凸集隔离定理，存在平面$E=\{y\,|\langle y,x\rangle=b\}$把$x_0$与$\mathrm{cl}(C)$严格隔离，即有

$$\langle x_0,x\rangle>b,\ \text{而}\langle y,x\rangle\leqslant b\quad(\forall y\in\mathrm{cl}(C))$$

从而
$$\langle x_0,x\rangle>b\geqslant\sup\{\langle y,x\rangle\ |y\in C\}=\delta^*(x\,|C)$$

1989年1月17日收稿

这与已知矛盾，故$x_0 \in \mathrm{cl}(C)$。

定义 2 设f为定义在凸集$C \subset R^n$上的凸函数，则称函数

$$f^*(y)=\sup\{\langle y,x\rangle - f(x) \mid x \in C\}$$

为f关于C的共轭函数。由此定义，即有

命题 3 若f，g为凸集$C \subset R^n$上的凸函数，α为实常数，则

（i） $f \leqslant g \Rightarrow f^* \geqslant g^*$；（ii） $(f-\alpha)^*=f^*+\alpha$

命题 4 设C_1，C_2为R^n中凸集，则$\mathrm{cl}(C_1) \subset \mathrm{cl}(C_2)$的充要条件是：$\delta^*(x \mid C_1) \leqslant \delta^*(x \mid C_2)$ （$\forall x \in R^n$）

证明 设$\mathrm{cl}(C_1) \subset \mathrm{cl}(C_2)$，则$\forall x \in R^n$有

$$\begin{aligned}\delta^*(x \mid C_1)&=\delta^*(x \mid \mathrm{cl}(C_1))=\sup\{\langle y,x\rangle \mid y \in \mathrm{cl}(C_1)\}\\&\leqslant \sup\{\langle y,x\rangle \mid y \in \mathrm{cl}(C_2)\}\\&=\delta^*(x \mid \mathrm{cl}(C_2))=\delta^*(x \mid C_2)\end{aligned}$$

反之，设$\delta^*(x \mid C_1) \leqslant \delta^*(x \mid C_2)$ （$\forall x \in R^n$），则$\forall y \in \mathrm{cl}(C_1)$，$\langle y,x\rangle \leqslant \delta^*(x \mid C_1)$ （$\forall x \in R^n$），从而 $\forall x \in R^n$，$\langle y,x\rangle \leqslant \delta^*(x \mid C_2)$，故由命题2，$y \in \mathrm{cl}(C_2)$，即有 $\mathrm{cl}(C_1) \subset \mathrm{cl}(C_2)$。

定义 3 设$C \subset R^n$，则称函数

$$\delta(x \mid C)=\begin{cases}0 & x \in C\\ +\infty & x \overline{\in} C\end{cases}$$

为C的指示函数。由此定义易知

(1) $C \subset R^n$为凸集$\Longleftrightarrow \delta(x \mid C)$为凸函数；

(2) 若C为凸集，则

$$(\delta(x \mid C))^*=\sup_{y \in C}\{\langle y,x\rangle - \delta(y \mid C)\}=\sup_{y \in C}\{\langle y,x\rangle\}=\delta^*(x \mid C)$$

即凸集C的指示函数的共轭函数即为它的支撑函数。

2 支撑函数的性质

这一节进一步讨论R^n中凸集C与其支撑函数的性质之间的关系。

命题 5 设$C \subset R_n$为一闭凸集，则C为对称集，即$C=-C$的充要条件是：C的支撑函数$\delta^*(x \mid C)$为偶函数。

证明 设C为对称凸集，即$C=-C$，则$\forall x \in R^n$

$$\begin{aligned}\delta^*(-x|C)&=\sup\{\langle -x,y\rangle|y \in C\}=\sup\{\langle x,-y\rangle|y \in C\}\\&=\sup\{\langle x,z\rangle|z \in -C\}=\sup\{\langle x,z\rangle|z \in C\}\\&=\delta^*(x|C)\end{aligned}$$

即$\delta^*(x|C)$为偶函数。

反之，设$\delta^*(x|C)$为偶函数，则由

$$\begin{aligned}\delta^*(-x|C)&=\sup\{\langle -x,y\rangle|y \in C\}=\sup\{\langle x,-y\rangle|y \in C\}\\&=\sup\{\langle x,z\rangle|z \in -C\}=\delta^*(x|-C)\end{aligned}$$

得 $\delta^*(-x|C)=\delta^*(x|-C)=\delta^*(x|C)$。而$C$为闭凸集，则$-C$也为闭凸集。由命题4，

有
$$\delta^*(x|C)\leqslant\delta^*(x|-C)\Rightarrow C\subset -C$$
$$\delta^*(x|-C)\leqslant\delta^*(x|C)\Rightarrow -C\subset C$$
即$C=-C$，C为对称集。

命题 6 设$C\subset R^n$为闭凸集，则C为单点集，即存在$y_0\in R^n$，使$C=\{y_0\}$的充要条件是：C的支撑函数$\delta^*(x|C)$为奇函数。

证明 $\delta^*(x|C)$为奇函数$\Longleftrightarrow\delta^*(x|C)=-\delta^*(-x|C)$

$$\Longleftrightarrow\sup\{\langle x,y\rangle|y\in C\}=-\sup\{\langle -x,y\rangle|y\in C\}$$
$$\Longleftrightarrow\sup\{\langle x,y\rangle|y\in C\}=\inf\{\langle x,y\rangle|y\in C\}$$
$$\Longleftrightarrow\forall y_1\in C,\ \forall y_2\in C,\ \forall x\in R^n,\ \langle x,y_1\rangle=\langle x,y_2\rangle$$
$$\Longleftrightarrow\forall x\in R^n,\ \langle x,y_1-y_2\rangle=0$$
$\Longleftrightarrow y_1=y_2$　即C为单点集，故有$y_0\in R^n$使$C=\{y_0\}$。

定义 4 设f为定义在R^n中的凸函数，$\forall x\in R^n$定义$\underline{f}(x)$如下：
$$\underline{f}(x)=\varliminf_{z\to x}f(z)$$
记$K(f)=\{x\in R^n|f(x)<\infty\}$。若$\forall x\in K(f)$，有$f(x)=\underline{f}(x)$，则称$f(x)$为闭凸函数。

定理 1 设$C\subset R^n$为有界集，则C为闭凸集的充要条件是C的支撑函数$\delta^*(x|C)$为正齐次闭凸函数。

证明 设C为有界凸集，则任取x_1，$x_2\in R^n$，$\lambda\in[0,1]$
$$\begin{aligned}\delta^*(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)&=\sup\{\langle\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,y\rangle|y\in C\}\\&=\sup\{\lambda\langle x_1,y\rangle+(1-\lambda)\langle x_2,y\rangle|y\in C\}\\&\leqslant\sup\{\lambda\langle x_1,y\rangle|y\in C\}+\sup\{(1-\lambda)\langle x_2,y\rangle|y\in C\}\\&=\lambda\delta^*(x_1|C)+(1-\lambda)\delta^*(x_2|C)\end{aligned}$$
即$\delta^*(x|C)$为凸函数。

又由于C为有界集，则$K(\delta^*(\cdot|C))=R^n$，故$\forall x\in R^n$
$$\varliminf_{z\to x}\delta^*(z|C)=\varliminf_{z\to C}\sup\{\langle y,z\rangle|y\in C\}$$
而$C\subset R^n$为有界集，则存在有界闭集$C_0\supset C\cup\{x\}$，又$\langle y,z\rangle$关于变量y，z在$C_0\times C_0$上连续，从而$\langle y,z\rangle$关于y，z在$C_0\times C_0$上一致连续，故$\sup\limits_{y\in C}\{\langle y,z\rangle\}$关于$z$在$C_0$上连续，故
$$\sup\{\langle y,x\rangle|y\in C\}=\lim_{z\to x}\sup\{\langle y,z\rangle|y\in C\}=\varliminf_{z\to x}\sup\{\langle y,z\rangle|y\in C\}$$
即
$$\varliminf_{z\to x}\delta^*(z|C)=\lim_{z\to x}\delta^*(z|C)=\delta^*(x|C)$$
故$\delta^*(x|C)$为闭凸函数。至于$\delta^*(x|C)$为正齐次的，由$\delta^*(x|C)$定义即可得到。

反之，设$\delta^*(x|C)$为正齐次闭凸函数，则由文[1]定理3.4.6与定理3.5.7知，$(\delta^*(\cdot|C))^*=\delta^{**}(\cdot|C)=\delta(\cdot|\mathrm{cl}(C))$为凸函数，从而$\mathrm{cl}(C)$为凸集，而$\delta^*(\cdot|\mathrm{cl}(C))=(\delta^*(\cdot|C))^{**}=\delta^*(\cdot|C)$，故$\mathrm{cl}(C)=C$，即$C$为闭凸集。
综上定理得证。

定理 2　设$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$为一列单调有界的闭凸集列，则存在闭凸集C，使$\delta^*(x|C_n)$单调收敛于$\delta^*(x|C)$。

证明　设$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升，即$C_n\subset C_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$

令
$$C_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$$

$\forall x,y\in C_0$，则存在i_1，i_2使$x\in C_{i_1}, y\in C_{i_2}$. 取$i_0=\max(i_1,i_2)$时，$C_{i_0}\supset C_{i_1}$，$C_{i_0}\supset C_{i_2}$，从而$x,y\in C_{i_0}$. 而$C_{i_0}$为闭凸集，故对于$\forall\lambda\in[0,1]$，有$\lambda x+(1-\lambda)y\in C_{i_0}\subset C_0$，即$C_0$为凸集。若取$C=\mathrm{cl}(C_0)$，则$C$为闭凸集。

由命题 4，$\forall x\in R^n$，序列$\{\delta^*(x|C_n)\}_{n=1}^{\infty}$单调增加，且
$$\delta^*(x|C_n)\leqslant\delta^*(x|C)\quad(n\geqslant 1)$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\delta^*(x|C_n)\leqslant\delta^*(x|C)$$
另一方面，任取$y_0\in C_0$，则有n_0使$y_0\in C_{n_0}$，从而$\langle x,y_0\rangle\leqslant\sup\{\langle x,z\rangle|z\in C_{n_0}\}$；又$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$单调上升，故$\forall k\geqslant 1$，$\langle x,y_0\rangle\leqslant\sup\{\langle x,z\rangle|z\in C_{n_0+k}\}$，即有
$$\langle x,y_0\rangle\leqslant\underline{\lim}_{k\to\infty}\sup\{\langle x,z\rangle|z\in C_{n_0+k}\}=\underline{\lim}_{k\to\infty}\sup\{\langle x,z\rangle|z\in C_k\}$$
$$=\underline{\lim}_{k\to\infty}\delta^*(x|C_k)=\lim_{k\to\infty}\delta^*(x|C_k)$$
从而$\sup\limits_{y_0\in C_0}\{\langle x,y_0\rangle\}\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\delta^*(x|C_k)$，即
$$\delta^*(x|C_0)\leqslant\lim_{k\to\infty}\delta^*(x|C_k)\Rightarrow\delta^*(x|C)\leqslant\lim_{k\to\infty}\delta^*(x|C_k)$$
综上所述，$\delta^*(x|C_n)$在$n\to\infty$时单调增加，收敛于$\delta^*(x|C)$。

下设$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$单调下降，令$C=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n$，则$C$为有界闭凸集。下证$\delta^*(x|C_n)$单调下降趋于$\delta^*(x|C)$。$\{\delta^*(x|C_n)\}_{n=1}^{\infty}$单调下降是显见的，且对每个$n$
$$\delta^*(x|C_n)\geqslant\delta^*(x|C)$$
$$\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\delta^*(x|C_n)\geqslant\delta^*(x|C)\ \ (\forall x\in R^n)$$
又$\langle y,x\rangle$在C_n上关于y连续，故有$y_n\in C_n$使
$$\delta^*(x|C_n)=\sup\{\langle y,x\rangle|y\in C_n\}=\langle y_n,x\rangle$$
即得点列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C_1$，$y_n\in C_n$ $(n\geqslant 1)$. 而C_1为R^n的有界闭集，故$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$中有子列，不妨设其本身收敛于一点$y_0\in C_1$，下证$y_0\in C$.

若不然，则存在n_0，使$y_0\overline{\in}C_{n_0}$，故$\forall n\geqslant n_0$，$y_0\overline{\in}C_n$。但是C_n为闭集，此与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$矛盾。从而$y_0\in C$，有
$$\delta^*(x|C)\geqslant\langle x,y_0\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,y_n\rangle=\lim_{n\to\infty}\delta^*(x|C_n)$$
这样有$\lim\limits_{n\to\infty}\delta^*(x|C_n)=\delta^*(x|C)$，即$\delta^*(x|C_n)$下降趋于$\delta^*(x|C)$。定理得证。

设$\mathscr{T}$为R^n中所有闭凸集所成之集，在$\mathscr{T}$中引进Hausdorff距离d_H[5]；$A,B\in\mathscr{T}$
$$d_H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\}$$
文[5]证明了$(\mathscr{T},d_H)$为一个完备的度量空间。

定义 5　设 $C(t)$ 为定义在 $T\subset R$ 上的闭凸集值函数，$t_0\in T$．若有等式 $\lim\limits_{t\to t_0^-}C(t)=\lim\limits_{t\to t_0^+}C(t)=C(t_0)$ 成立，则称闭凸集值函数 $C(t)$ 在 t_0 处连续。这里的极限按距离 d_H 取。

由定理 2，可得到下面的定理。

定理 3　设 $C(t)$ 为定义在 $T\subset R$ 上的单调且一致有界的闭凸集值函数，则 $C(t)$ 在点 $t_0\in T$ 处连续的充要条件是 $\forall x\in R^n$，$\delta^*(x|C(t))$ 在 t_0 处连续。

证明　不妨设 $C(t)$ 是单调增加的。又易知在 $(\mathscr{T},d_H)$ 中，单调集值函数 $C(t)$ 在 $t_0\in T$ 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对任何序列 $\{t'_j\}\subset T$，$\{t''_i\}\subset T$，满足 $t'_j\uparrow t_0$，$t''_i\downarrow t_0$ $(i,j\to\infty)$ 有

$$\lim_{j\to\infty}C(t'_j)=\lim_{i\to\infty}C(t''_i)=C(t_0)$$

若 $C(t)$ 在 t_0 处连续，则 $C(t_0)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}C(t'_j)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C(t''_i)$

由定理 2，
$$\delta^*(x|C(t'_j))\uparrow\delta^*(x|C(t_0))\ (j\to\infty)\quad (x\in R^n)$$
$$\delta^*(x|C(t''_i))\downarrow\delta^*(x|C(t_0))\ (i\to\infty)\quad (x\in R^n)$$

故
$$\forall x\in R^n,\ \lim_{t\to t_0^+}\delta^*(x|C(t))=\lim_{t\to t_0^-}\delta^*(x|C(t))=\delta^*(x|C(t_0))$$

即 $\forall x\in R^n$，$\delta^*(x|C(t))$ 在 t_0 处连续。

反之，若 $\forall x\in R^n$，$\delta^*(x|C(t))$ 在 t_0 处连续，则对于任何满足 $t'_j\uparrow t_0$，$t''_i\downarrow t_0$ 的序列 $\{t'_j\}_{j=1}^{\infty}\subset T$，$\{t''_i\}_{i=1}^{\infty}\subset T$，有

$$\lim_{j\to\infty}\delta^*(x|C(t'_j))=\lim_{i\to\infty}\delta^*(x|C(t''_i))=\delta^*(x|C(t_0))$$

记 $C_1=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C(t''_i)$，$C_2=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}C(t'_j)$，由定理 2 知

$$\lim_{j\to\infty}\delta^*(x|C(t'_j))=\delta^*(x|C_2),\quad \lim_{i\to\infty}\delta^*(x|C(t''_i))=\delta^*(x|C_1)$$

从而 $\delta^*(x|C_1)=\delta^*(x|C_2)=\delta^*(x|C(t_0))$，故

$$C_1=\mathrm{cl}(C_1)=\mathrm{cl}(C_2)=\mathrm{cl}(C(t_0))=C(t_0)$$

又易知 $\lim\limits_{t\to t_0^+}C(t)=C_2$，$\lim\limits_{t\to t_0^-}C(t)=C_1$．而 $(\mathscr{T},d_H)$ 完备，则 $C_2\in\mathscr{T}$，故 $C_2=\mathrm{cl}(C_2)$ 。

$\Rightarrow C_1=C_2=C(t_0)$，$\Rightarrow \lim\limits_{t\to t_0^-}C(t)=\lim\limits_{t\to t_0^+}C(t)=C(t_0)$，即 $C(t)$ 在 t_0 处连续。

上述定理把一个集值函数的连续性转化为一个实值函数的连续性，这对集值函数的许多性质的研究是非常有益的。

3　函数的次微分

这一节将利用凸集支撑函数的性质来讨论函数次微分的几个有趣的结果。

定义 6[1]　设 $C\subset R^n$ 为凸集，$x_0\in C$，f 为定义在 C 上的实函数。若存在向量 x^*，对于 $\forall x\in C$，有

$$\langle x^*,x-x_0\rangle\leqslant f(x)-f(x_0)$$

则称 x^* 为 f 在 x_0 处关于 C 的次梯度。若 f 为一个凸函数，$x_0\in K(f)$ ，由[1]，f 在 x_0 处次梯度必存在，且此次梯度一般是不唯一的，记 $\partial_C f(x_0)$ 为 f 在 x_0 处关于 C 的所有次

梯度之集，称之为f在x_0处关于C的次微分，即

$$\partial_C f(x_0)=\{x^*|\langle x^*,x-x_0\rangle\leqslant f(x)-f(x_0),\ \forall x\in C\}$$

若$\partial_C f(x_0)\neq\phi$，称$f$在$x_0$处次可微，记$\partial_{R^n}f(x_0)=\partial f(x_0)$。由定义，可得下述的命题。

命题 7 设f为R^n上的一个凸函数，则$\forall x\in R^n$，$\partial f(x)$是一个闭凸集。

定理 4 若$C\subset R^n$为一闭凸集，则存在R^n上的闭凸函数$f(x)$，使f在0处次可微，而且

$$\partial f(0)=C$$

证明 令$f(x)=\delta^*(x|C)$，则$f(x)$为R^n上的闭凸函数，且$f(x)$在0处次可微。下证$\partial f(0)=C$.

事实上，$\partial f(0)=\{x^*|\langle x^*,x\rangle\leqslant\delta^*(x|C)\ \forall x\in R^n\}$，由命题2，$x^*\in C\Rightarrow\forall x\in R^n$，$\langle x^*,x\rangle\leqslant\delta^*(x|C)$，即有$x^*\in\partial f(0)\Rightarrow C\subset\partial f(0)$。反之若$x^*\in\partial f(0)$，则有$\forall x\in R^n$，$\langle x^*,x\rangle\leqslant\delta^*(x|C)$，故$x^*\in \mathrm{cl}(C)=C$，所以$C\supset\partial f(0)$，故

$$C=\partial f(0)$$

定理 5 设f，g为R^n上两个正齐次闭凸函数，则$\partial f(0)\subset\partial g(0)$的充要条件是$\forall x\in R^n$，$f(x)\leqslant g(x)$。

证明 由于f，g为R^n上的正齐次闭凸函数，则存在闭凸集C_1，C_2，使得

$$f(x)=\delta^*(x|C_1),\ g(x)=\delta^*(x|C_2)$$

又由定理4，$\partial f(0)=C_1$，$\partial g(0)=C_2$

故 $$\partial f(0)\subset\partial g(0)\Longleftrightarrow C_1\subset C_2\Longleftrightarrow\forall x\in R^n\quad \delta^*(x|C_1)\leqslant\delta^*(x|C_2)$$

$$\Longleftrightarrow\forall x\in R^n\quad f(x)\leqslant g(x)$$

定理得证。

推论 若f，g为R^n上两个正齐次闭凸函数，且$\partial f(0)=\partial g(0)$，则$f(x)=g(x)$ $(\forall x\in R^n)$。

其证明是定理的直接结果。

上述定理表明，R^n上的正齐次闭凸函数的取值完全由其在0点处的次微分所决定。下面的命题则表明：函数在任一点处的次微分的讨论可以转化为另一个函数在0点处次微分的讨论，这对问题的研究会带来许多方便。

命题 8 设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为R^n上的单调凸函数列，且$f_0=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$，则存在实函数$f$，使$\partial f(0)=\partial f_0(x)$ $(x\in R^n)$。

证明 设x，$y\in R^n$，$\alpha\in[0,1]$，则由已知得

$$f_n(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f_n(x)+(1-\alpha)f_n(y)\quad(n\geqslant 1)$$

令$n\to\infty$得 $$f_0(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f_0(x)+(1-\alpha)f_0(y)$$

即f_0为R^n上的凸函数，由命题7知，$x\in R^n$，而$\partial f_0(x)$为一闭凸集，由定理4知，存在R^n上的实函数f，使

$$\partial f(0)=\partial f_0(x)$$

参 考 文 献

[1] 越民义．凸分析讲义（上册）．中国科学院应用数学研究所，1981

[2] Rockafellar R T. Convex Analysis, Princeton University Press, 1970

[3] Aubin J P and Vinter R B. Convex Analysis and Optimization. Research Notes in Mathematics 57, Pitman Advanced Publishing Program, Boston. London. Melbourne, 1982

[4] Giles J R. Convex Analysis with Application in Differentiation of Convex Functions. Research Notes in Mathematics 58, Pitman Advanced Publishing Program, Boston.London.Melbourne, 1982

[5] Papageorgion N S.On Abstract Conditional Expections, J.Math.Anal.Appl.111. 1985. 34~48

The Properties of the Support Functions of Convex Sets and Their Applications

Liu Puyin

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

A few useful properties of the support function of the convex set C are discussed in the paper. They are also applied to the study of the subdifferential of a function. Some interesting results about the subdifferential of a function are obtained.

Kew words: convex set, support function, subdifferential, closed convex function, indicator function, conjugate functions, subgradient