国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

Lg光顺样条函数的递推建立法

张 新 建
(系统工程与应用数学系)

摘 要 本文讨论了Lg光顺样条函数的投影理论，从投影理论出发得到了Lg光顺样条函数的递推建立法；通过一组特殊的基底使 Anselone P M 等人关于光顺样条函数的构造法(见《Numer Math.》.1968, No.12)得到了简化。

关键词 样条函数，递推，算法，Lg光顺样条函数，投影，共轭算子，基底

分类号 O241.5

设函数空间

$$H=\left\{f(t),\ t\in[0,T]: f^{(n)}a.e.\text{存在，且} \int_0^T |f^{(n)}|^2<\infty\right\}$$

其中$f^{(n)}$表示f的n阶导数。记$I=[0,T]$，再设L为从H到平方可积函数空间$L_2(I)$的微分算子：

$$L=D^n+a_{n-1}(t)D^{n-1}+\cdots+a_1(t)D+a_0(t)$$

其中$D=d/dt$，$a_j(t)\in C^j(I)$，$0\leqslant j\leqslant n-1$.

设$\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ ($N\geqslant n$) 是H上一组线性无关的连续泛函，$\{\rho_j\}_1^N$、$\{r_j\}_1^N$均为实数，且$\rho_j<0$ ($1\leqslant j\leqslant N$)。

定义 1[2] 函数$s(\cdot)\in H$称为关于$\{\lambda_j\}_1^N$和$\{\rho_j\}_1^N$光顺于$\{r_j\}_1^N$的Lg样条，如果$s(\cdot)$是下述极小化问题的解：

$$\min_{f\in H}\left\{\int_0^T (Lf)^2+\sum_{j=1}^N \rho_j^{-1}(r_j-\lambda_j f)^2\right\} \tag{1}$$

一方面，通过再生核希尔伯特空间理论，可建立样条平滑与某个随机过程的线性最小二乘估计之间的对应关系，从而用随机平滑方法可建立样条平滑的递推法[2]、[3]；另一方面，光顺样条函数方法又用于随机系统的估计、滤波和平滑，这方面的综合性文献可见[4]、[5]。因此，由样条的投影理论出发直接探讨光顺样条函数的递推法，在理论和应用上都是有意义的。

1989年4月4日收稿

1 在空间H中的投影描述

在这一节，我们给出Lg光顺样条函数的一些基本结论。

满足式(1)的样条$s(\cdot)$总是存在的，且$s(\cdot)$唯一的充要条件是

$$\{\lambda_j\}_1^n \text{在} N(L) \text{上线性无关或} N(L)\cap U(0)=\{\theta_H\} \tag{2}$$

其中L的零空间$N(L)$为H的n维子空间，θ_H为H中零元，$U(0)=\{f\in H;\ \lambda_j f=0,\ 1\leqslant j\leqslant N\}$。

设$\{z_j(\cdot)\}_1^n$是$N(L)$的对偶于$\{\lambda_i\}_1^n$的基底，即

$$Lz_j=0,\ \lambda_i z_j=\delta_{ij},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n \tag{3}$$

再设$G(\cdot,\cdot)$为L的满足

$$LG(\cdot,\tau)=\delta(\tau-\cdot),\ \lambda_j G(\cdot,\tau)=0,\ 1\leqslant j\leqslant n \tag{4}$$

的格林函数，则对任意$f\in H$可唯一分解为

$$f(t)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j f)z_j(t)+\int_0^T G(t,\tau)(Lf(\tau))d\tau \tag{5}$$

这样，可在H中引入内积、范数为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j f)(\lambda_j g)+\int_0^T(Lf)(Lg),\ f、g\in H \tag{6}$$

$$\|f\|^2=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j f)^2+\int_0^T(Lf)^2 \tag{7}$$

可以证明在内积式(6)下，H为希尔伯特空间。再设

$$H^+=\{(f(\cdot),e):f(\cdot)\in H,\ e=(e_1,\cdots,e_N)'\in E^N\}$$

其中e_j $(1\leqslant j\leqslant N)$ 为实数。可知H^+为希尔伯特空间，其内积与范数为

$$\begin{aligned}\langle(f,e),(g,d)\rangle_{H^+}=&\int_0^T(Lf)(Lg)+\sum_{j=1}^{N}\rho_j^{-1}e_j d_j\\&+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j f+e_j)(\lambda_j g+d_j)\end{aligned} \tag{8}$$

$$\|(f,e)\|_{H^+}^2=\int_0^T(Lf)^2+\sum_{j=1}^{N}\rho_j^{-1}e_j^2+\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j f+e_j)^2 \tag{9}$$

若记$U_r^+=\{(f,e)\in H^+;\ e_j=r_j-\lambda_j f,\ 1\leqslant j\leqslant N\}$，则由式(9)知，极小化问题式(1)与极小范数问题

$$\min_{(f,e)\in U_r^+}\|(f,e)\|^2 \tag{10}$$

等价。

由$\{\lambda_j\}_1^N$规定H^+上的一组泛函$\{\lambda_j^+\}_1^N$：

$$\lambda_j^+(f,e)=\lambda_j f+e_j,\ 1\leqslant j\leqslant N \tag{11}$$

设$\{\lambda_j^+\}_1^N$在H^+中的表示为$\{h_j^+\}_1^N$，且设S^+是由$\{h_j^+\}_1^N$生成的子空间，则得

定理 1 极小范数问题式(10)的解$(s,\hat{e})$是U_r^+中任意元素在S^+上的投影。

设$h_j^+=(h_j,\ \omega_j)$ $(1\leqslant j\leqslant N)$，则由定理1可得

定理 2 满足式(1)的Lg光顺样条函数为

$$s(t)=h'(t)R^{-1}r\ \ (t\in I) \tag{12}$$

其中$h'(t)=(h_1,\cdots,h_N)$，$R=(\langle h_i^+,h_j^+\rangle_{H^+})$为$N$阶对称矩阵，$r'=(r_1,\cdots,r_N)$。

定理1、2及其有关结论的证明可参阅文献[1]、[2]、[6]、[7]。

对于t、$\tau\in I$，设

$$K(t,\tau)=\sum_{j=1}^{n}(1+\rho_j)z_j(t)\cdot z_j(\tau)+\int_0^T G(t,\xi)\cdot G(\tau,\xi)d\xi \tag{13}$$

由式(3)、(4)知

$$LK(\cdot,\tau)=G(\tau,\cdot),\quad \lambda_j K(\cdot,\tau)=(1+\rho_j)z_j(\tau),\quad 1\leqslant j\leqslant n \tag{14}$$

设$e_j(1\leqslant j\leqslant N)$为$E^N$的标准单位向量组，再设

$z'(\cdot)=(z_1(\cdot),\cdots,z_n(\cdot),0,\cdots,0)$，$N$维向量

$Q=\mathrm{diag}(\rho_1,\cdots,\rho_N)$，$N$阶对角线矩阵

$$K_t^+=\begin{cases}(K(\cdot,t),\ -Qz(t)),& t\in I\\ (-z'(\cdot)Qe_t,Qe_t),& t\in J\end{cases} \tag{15}$$

其中$J=\{1,2,\cdots,N\}$。则K_t^+为希尔伯特空间H^+的再生核，即可以证明

$$K_t^+\in H^+,\ \text{对每一个}t\in I\text{或}t\in J \tag{16a}$$

$$\langle(f(\cdot),e),K_t^+\rangle_{H^+}=\begin{cases}f(t),& t\in I\\ e_t,& t\in J\end{cases} \tag{16b}$$

由式(11)、(15)和(16)可得$h_j^+=(h_j,\omega_j)$ $(j\in J)$为

$$h_j=\begin{cases}z_j, & 1\leqslant j\leqslant n\\ \lambda_j K(\cdot,t), & n+1\leqslant j\leqslant N\end{cases} \tag{17}$$

$$\omega_j=\begin{cases}(0,\ \cdots,\ 0)',& 1\leqslant j\leqslant n\\ (-\rho_1\lambda_j z_1,\cdots,-\rho_n\lambda_j z_n,0,\cdots,\rho_j,\cdots,0)',& n+1\leqslant j\leqslant N\end{cases} \tag{18}$$

上式中$\rho_j(n+1\leqslant j\leqslant N)$是$\omega_j$的第$j$个分量。

因$\langle h_i^+,h_j^+\rangle_{H^+}=\lambda_i^+h_j^+$，再由式(3)、(11)、(14)、(17)和(18)可得到公式(12)更具体的形式

$$s(t)=h'(t)\begin{pmatrix}I_n & A'\\ A & B\end{pmatrix}^{-1}r,\ t\in I \tag{19}$$

其中$A=(\lambda_{n+i}z_j)$为$(N-n)\times n$阶矩阵，I_n为n阶单位矩阵，$B=(\lambda_{n+i}\lambda_{n+j}K+\rho_{n+i}\delta_{ij})$为$N-n$阶对称矩阵。

2 递推法

上一节的投影公式不具备递推性，不便于约束条件（观测数据）的增加和修正。为此，我们考虑递推计算法。

设$\bar{h}_j^+=(\bar{h}_j,\bar{\omega}_j)$是$h_j^+(j\in J)$通过施密特标准正交化得到的，则由式(3)、(11)、(17)和(18)知

$$\bar{h}_j^+=h_j^+=(z_j,0),\quad 1\leqslant j\leqslant n \tag{20}$$

$$\bar{h}_j=d_j^{-1}\left[\lambda_j K(\cdot,t)-\sum_{i=1}^{j-1}(\lambda_j\bar{h}_i)\bar{h}_i\right],\quad n+1\leqslant j\leqslant N \tag{21}$$

$$\tilde{\omega}_{n+1}=d_{n+1}^{-1}\omega_{n+1},\quad \tilde{\omega}_j=d_j^{-1}\left[\omega_j-\sum_{i=n+1}^{j-1}(\lambda_j\tilde{h}_i)\tilde{\omega}_i\right],n+2\leqslant j\leqslant N \tag{22}$$

其中

$$d_j=\|l_j^+\|_{H^+},\quad l_j^+=h_j^+-\sum_{i=1}^{j-1}(\lambda_j\tilde{h}_i)\tilde{h}_i^+,\quad n+1\leqslant j\leqslant N \tag{23}$$

引理 1 满足式(1)的Lg光顺样条函数$s(t)$为

$$s(t)=\sum_{j=1}^{N}\tilde{r}_j\tilde{h}_j$$

其中$\{\tilde{r}_j\}_1^N$是$\{r_j\}_1^N$经过由$\{h_j^+\}_1^N$到$\{\tilde{h}_j^+\}_1^N$的同样的线性运算得到的。

记$l_k^+=(l_k,\alpha_k)$ $(n+1\leqslant k\leqslant N)$，则由式(14)、(17)、(18)和(23)可得

引理 2 设$\alpha_k=(\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kN})'$ $(n+1\leqslant k\leqslant N)$，则

$$\lambda_jl_k+\alpha_{kj}=0,\quad n+1\leqslant k\leqslant N,\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

若记$f_j=Ll_j$ $(n+1\leqslant j\leqslant N)$，$p_{kj}=\rho_j^{-1}\alpha_{kj}$ $(n+1\leqslant k\leqslant N,\ 1\leqslant j\leqslant k-1)$，则可以证明

$$f_{n+1}(t)=\lambda_{n+1(\tau)}G(\tau,t) \tag{24a}$$

$$f_j(t)=\lambda_{j(\tau)}G(\tau,t)-\sum_{i=n+1}^{j-1}(\lambda_j\tilde{h}_i)d_i^{-1}f_i(t),\quad n+2\leqslant j\leqslant N \tag{24b}$$

$$p_{kj}=-\lambda_kz_j-\sum_{i=n+1}^{k-1}(\lambda_k\tilde{h}_i)d_i^{-1}p_{ij},\quad 1\leqslant j\leqslant n \tag{25a}$$

$$p_{kj}=-\sum_{i=j}^{k-1}(\lambda_k\tilde{h}_i)d_i^{-1}p_{ij},\quad n+1\leqslant j\leqslant k-1 \tag{25b}$$

由式(20)～(25)及引理1、2可以建立Lg光顺样条函数的递推法如下：

(1) 取$\tilde{h}_i=z_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，计算

$$v_{n+1,j}=\lambda_{n+1}\tilde{h}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

$$p_{n+1,j}=-v_{n+1,j}\ (1\leqslant j\leqslant n),\quad p_{n+1,n+1}=1$$

$$f_{n+1}(t)=\lambda_{n+1(\tau)}G(\tau,t)$$

$$d_{n+1}=\left[\int_0^T f_{n+1}^2+\sum_{j=1}^{n+1}\rho_jp_{n+1,j}^2\right]^{1/2}$$

$$\tilde{h}_{n+1}=d_{n+1}^{-1}\left[\lambda_{n+1}K-\sum_{j=1}^{n}v_{n+1,j}\tilde{h}_j\right]$$

(2) 对于$k=n+2,n+3,\cdots,N$，循环递推计算

$$v_{kj}=\lambda_k\tilde{h}_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

$$v_{kj}=d_j^{-1}\left[\lambda_k\lambda_jK-\sum_{i=1}^{j-1}v_{ji}v_{ki}\right],\quad n+1\leqslant j\leqslant k-1$$

$$p_{kj}=-v_{kj}-\sum_{i=n+1}^{k-1}v_{ki}d_i^{-1}p_{ij},\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

$$p_{kj}=-\sum_{i=j}^{k-1}v_{ki}d_i^{-1}p_{ij}\ (n+1\leqslant j\leqslant k-1),p_{kk}=1$$

$$f_k=\lambda_kG-\sum_{i=n+1}^{k-1}v_{ki}d_i^{-1}f_i$$

$$d_k=\left[\int_0^T f_k^2+\sum_{j=1}^{k}\rho_jp_{kj}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{h}_k = d_k^{-1}\left[\lambda_k K - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}\tilde{h}_i\right]$$

(3) 取$\tilde{r}_i = r_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$)，对$k = n+1, \cdots, N$递推计算

$$\tilde{r}_k = d_k^{-1}\left[r_k - \sum_{i=1}^{k-1} v_{ki}\tilde{r}_i\right]$$

(4) 得Lg光顺样条函数$s(t)$及$Ls(t)$：

$$s(t) = \sum_{k=1}^{N} \tilde{r}_k \tilde{h}_k$$

$$Ls(t) = \sum_{k=n+1}^{N} \tilde{r}_k d_k^{-1} f_k(t) \tag{26}$$

3 在空间$L_2(I)$中的构造法

取由空间H到空间$Z = L_2(I) \times E^N$的线性算子T：

$$Tf = (Lf, Af), \ f \in H \tag{27}$$

其中$Af = (\lambda_1 f, \cdots, \lambda_N f)'$。空间$E^N$的内积取为

$$\langle e, d\rangle_E = \sum_{j=1}^{N} \rho_j^{-1} e_j d_j \tag{28}$$

其中$e = (e_1, \cdots, e_N)'$, $d = (d_1, \cdots, d_N)' \in E^N$. 设$z_1 = (y, e)$, $z_2 = (w, d) \in Z$，在Z中取内积

$$\langle z_1, z_2\rangle_Z = \langle y, w\rangle_{L_2} + \langle e, d\rangle_E \tag{29}$$

则Z为希尔伯特空间。

对于任意$z = (y, e) \in Z$，定义T的共轭T^*为

$$T^* z = L^* y + A^* e \tag{30}$$

其中L^*、A^*分别为L、A的共轭算子，易知

$$(A^* e)(t) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j^{-1} e_j b_j(t) \tag{31}$$

上式中$\{b_j\}_1^N$为$\{\lambda_j\}_1^N$在H中的表示。

类似于文献[1]，可得到下面三个引理。

引理 3 设L的值域$R(L)$为闭集，s是满足式(1)的样条函数，则

$$Ts - a = N(T^*) \tag{32}$$

其中$a = (\theta_{L_2}, r)$，θ_{L_2}为$L_2(I)$中零元，$r = (r_1, \cdots, r_N)'$，$N(T^*)$表示T^*的零空间。

引理 4 设S是由$\{b_j\}_1^N$生成的空间，则

$$A^*[AN(L)]^\perp = S \cap N(L)^\perp = L^*(LS^\perp)^\perp$$

$$\dim[(AN(L))^\perp] = \dim[S \cap N(L)^\perp] = \dim[(LS^\perp)^\perp] = N - n.$$

引理 5 设$\{c_j\}_{n+1}^N$为$[AN(L)]^\perp$的一组基底，则

$$x_j = A^* c_j, \ f_j = L^{*-1} x_j, \ \hat{f}_j = (f_j, -c_j), n+1 \leqslant j \leqslant N \tag{33}$$

分别为$S \cap N(L)^\perp$、$(LS^\perp)^\perp$和$N(T^*)$的基底。

由上述三个引理，即可得到

定理 3 设$R(L)$为闭集，则由式(1)确定的样条函数s满足

$$Ts - a = \hat{f}' F^{-1} d \tag{34}$$

其中$\hat{f}'=(\hat{f}_{n+1},\cdots,\hat{f}_N)$，$F=(\langle\hat{f}_{n+i},\hat{f}_{n+j}\rangle_Z)$为$N-n$阶对称矩阵，$\hat{d}'=(-\langle a,\hat{f}_{n+1}\rangle,\cdots,-\langle a,\hat{f}_N\rangle)$。

在应用式(34)求样条函数s时，要由式(33)确定$N(T^*)$的一组基$\{\hat{f}_j\}_{n+1}^N$，这在实际计算中是很困难的。下面，我们直接给出$N(T^*)$的一组基，使实际计算得以简化。

引理 6　由式(18)给出的$\{\omega_j\}_{n+1}^N$是$[AN(L)]^\perp$的一组基。

证明　对任意的$f\in N(L)$，由式(28)、(18)、(5)和(4)知

$$\langle\omega_j,Af\rangle_B=-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_j z_i)(\lambda_i f)+\lambda_j f$$

$$=\lambda_j\left[f-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i f)z_i\right]=0,\ n+1\leqslant j\leqslant N$$

即$\omega_j\in[AN(L)]^\perp$ $(n+1\leqslant j\leqslant N)$。又显然$\{\omega_j\}_{n+1}^N$是线性无关的，再由引理4知结论成立。　　(证毕)

引理 7　设$k_j=A^*\omega_j$ $(n+1\leqslant j\leqslant N)$，则

$$L^{*-1}k_j=\lambda_{j(\tau)}G(\tau,\cdot),\ n+1\leqslant j\leqslant N.$$

证明　由式(31)、(18)得

$$k_j=A^*\omega_j=-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_j z_i)b_i(t)+b_j(t)$$

易知$b_i=z_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，于是$\lambda_j z_i=\lambda_j b_i=\lambda_i b_j$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant N)$，再注意到式(5)，即得

$$k_j=b_j-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i b_j)z_i(t)=\int_0^T G(t,\tau)(Lb_j)d\tau,\ n+1\leqslant j\leqslant N$$

由此知$\langle z_i,k_j\rangle_H=0$，$Lk_j=Lb_j$ $(1\leqslant i\leqslant n,n+1\leqslant i\leqslant N)$。于是可得$\langle b_i,k_j\rangle_H=\langle k_i,k_j\rangle_H$ $(n+1\leqslant i,\ j\leqslant N)$，故有

$$\langle L^*(\lambda_i G),k_j\rangle_H=\langle\lambda_i G,Lk_j\rangle_{L_2}=\int_0^T(\lambda_i G)(Lk_j)$$

$$=\lambda_i k_j=\langle b_i,k_j\rangle_H=\langle k_i,k_j\rangle_H,\ n+1\leqslant i,\ j\leqslant N$$

由引理5知，$k_j\in N(L)^\perp$，而上式有$k_j-L^*(\lambda_j G)\in N(L)$，$n+1\leqslant j\leqslant N$，故知$k_j=L^*(\lambda_j G)$　$(n+1\leqslant j\leqslant N)$。　　(证毕)

由引理5、6和7知

$$\hat{g}_j(t)=(\lambda_j G(\cdot,t)-\omega_j),\ n+1\leqslant j\leqslant N$$

为$N(T^*)$的一组基。由公式(34)，即得

定理 4　设$s(\cdot)$是由式(1)确定的样条函数，则

$$Ls=g'H^{-1}\hat{d} \tag{35}$$

$$As-r=\omega' H^{-1}\hat{d}$$

其中

$$g'=(\lambda_{n+1}G,\cdots,\lambda_N G),\ \omega'=(-\omega_1,\cdots,-\omega_N);$$

$H=(\langle\hat{g}_{n+i},\hat{g}_{n+j}\rangle_Z)$为$N-n$阶对称矩阵；

$$\hat{d}'=\left(r_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{n+1}z_i)r_i,\cdots,r_N-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_N z_i)r_i\right)$$

4 结束语

文献[2]指出了Lg光顺样条函数是某个随机过程的最小二乘估计的样本函数。利用这种对应关系，本文的样条函数递推法自然可用于计算某类随机过程最小二乘估计的样本函数。

另外，设 s 为满足式(1)的样条函数，则Ls便是某个随机动态系统的满足性能指标式(1)的最优控制[8]，这样，由式(26)知本文的递推法也是求最优控制Ls的递推法。利用公式(35)亦可直接得到最优控制Ls.

参考文献

[1] Anselone P M, Laurent P J.A General Method for the Construction of Interpolating or Smoothing Spline Functions. Numer Math, 1968, 12: 66~82

[2] Weinert H L, Byrd R H and Sidhu G S.A Stochastic Framework for Recursive Computation of Spline Functions: Part II. J Optimization Theory Appl, 1980, 30(2): 255~268

[3] Weinert H L, Sidhu G S.A Stochastic Framework for Recursive Computation of Spline Functions: Part I.IEEE Trans Information Theory, 1978, IT—24:45~50

[4] 陈关荣. 概率统计计算中的样条函数方法. 应用数学与计算数学, 1981, 6:6~12

[5] Kohn R, Ansley C F.A New Algorithm for Spline Smoothing Based On Smoothing a Stochastic Process.SIAM J Sci Stat Comput, 1987, 8(1):33~46

[6] Weinert H L, Kailath T.Stochastic Interpretations and Recursive Algorithms for Spline Functions.Ann of Statist, 1974, 2:787~794

[7] C de Boor, Lynch R E.On Splines and Their Minimum Properties. J Math Mech, 1966, 15(6):953~969

[8] Weinert H L, Kailath T.A Spline—theoretic Approach to Minimum Energy Control.IEEE Tran Automatic Control, 1976, AC—21:391~393

On the Construction of Lg—Smoothing Splines

Zhang Xinjian
(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, the projection theory of Lg—smoothing splines is discussed. Based on it a recursive algorithm is derived for Lg—smoothing splines. The method for the construction of Lg—smoothing splines in paper[1] is simplified by a special basis.

Key words: splines, recursion, algorithm, Lg—smoothing splines, projection, adjoint operator, basis