国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

保形的Hermite插值样条函数

方 逵
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文讨论一种满足Hermite插值条件的保形样条函数，文中构造了一个保单调的样条函数$q(x)$，且$q(x)$满足下列条件：1) $q(x_i)=y_i, i=0,1,2,\cdots,n,n+1$；2) $q'(x_i)=y'_i$ $i=0,1,2,\cdots,n,n+1$. 该方法对凸数组及相应的导数也适合。

关键词 插值，样条函数，单调递增数组，凸数组，保形样条插值
分类号 O241.5，O174.2

对于分划

$$\Delta: \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

给定$\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$处的函数值$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$，若$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$是单调（凸）数组时，文[1]用分段Bernstein多项式构造了保形的插值样条函数，但往往在$\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$处的导数值也被给定，这时[1]中的方法就无能为力了。若用常规的分段Hermite插值又不具有保形性，因此必须寻找新的方法。本文讨论了这种特殊的插值，构造了一种在$\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$处插值函数值与导数值的保形样条函数。

1 Hermite插值与Bernstein多项式

我们易得满足条件

$$H(0)=0,\ H'(0)=3;\ H(1)=1/3,\ H'(1)=1$$

的Hermite插值函数

$$H(x)=\frac{1}{3}x^3+3x(1-x)^2$$

从上式易验证$H(x)$既不保单调也不保凸。那么，为什么Hermite插值不象Bernstein多项式一样具有保单调（凸）性呢？这可以从它们两者之间的联系看出。

设$[0,1]$上的三次Hermite插值为

$$H(x)=\sum_{i=0}^{1}y_iH_i^3(x)+\sum_{i=0}^{1}y'_iH_{i+2}^3(x) \tag{1}$$

其中

$$H_0^3(x)=(x-1)^2(2x+1),\ H_1^3(x)=x^2(3-2x)$$
$$H_2^3(x)=x(x-1)^2,\ H_3^3(x)=(x-1)x^2$$

1989年4月17日收稿

由$\{H_i^3(x)\}_{i=0}^3$与Bernstein基函数$\{B_{i3}(x)\}_{i=0}^3$的关系知[2]

$$H_0^3(x)=B_{03}(x)+B_{13}(x),\quad H_1^3(x)=B_{23}(x)+B_{33}(x)$$

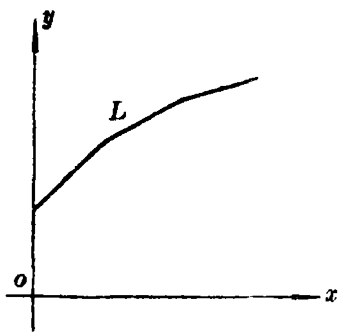
$$H_2^3(x)=B_{13}(x)/3,\qquad H_3^3(x)=-B_{23}(x)/3$$

其中 $$B_{i3}(x)=C_3^i x^i(1-x)^{3-i},\quad i=0,1,2,3,\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

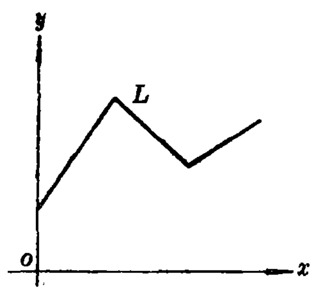
将$H_i^3(x)$代入式(1)得

$$\begin{aligned}H(x)=&y_0B_{03}(x)+(y_0+y_0'/3)B_{13}(x)\\&+y_1B_{33}(x)+(y_1-y_1'/3)B_{23}(x)\end{aligned}\tag{2}$$

设依次连接点$(0,y_0)$，$(1/3,\ y_0+y_0'/3)$，$(2/3,\ y_1-y_1'/3)$，$(1,y_1)$所构成的折线多边形为L. L对应的函数记为$L(x)$（如图1），则$H(x)$正好是$L(x)$的三次Bernstein多项式。从而易知：当$L(x)$是单调（凸）函数时，$H(x)$也是单调（凸）的；若$L(x)$是非单调（凸）的时，则$H(x)$的单调性（凸）就得不到保证。因此我们必须寻找新的单调（凸）的折线函数$L(x)$，同时提高相应的Bernstein多项式的次数，使之满足Hermite插值条件。



(a)



(b)

图 1

2 保形Hermite插值样条函数的构造

设$[a,\ b]$上的任一分划

Δ: $$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

及型值点处的函数值$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$及导数值$\{y_i'\}_{i=0}^{n+1}$，下面分保单调和保凸两种情况分别构造插值样条函数。

2.1 保单调的Hermite插值样条函数

定义 1 设$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$是单调数组，且

$$y_i'\geqslant 0\ (y_i'\leqslant 0)\quad i=0,1,\cdots,n,n+1$$

若存在一单调曲线$y=q(x)$，$q(x)$满足下列条件：

1) 在每一个子区间$[x_i,x_{i+1}]$上是三次或三次以上的多项式$q_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$；

2) $q_i(x)$在子区间$[x_i,x_{i+1}]$上满足：

$$q_i(x_i)=y_i,\ q_i(x_{i+1})=y_{i+1},\ q_i'(x_i)=y_i',\ q_i'(x_{i+1})=y_{i+1}';$$

3) $q(x)$与数组$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$有相同的单调性。

则我们称$q(x)$是满足Hermite插值条件的保单调样条函数。

如图2，过(x_i, y_i)，(x_{i+1}, y_{i+1})两点分别作斜率为y'_i，y'_{i+1}的直线l_i, l_{i+1} $(i=0,1,\cdots,n)$。首先讨论$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$是单调增数组，即

$$y_{i+1} > y_i \quad i=0,1,\cdots,n,n+1$$

$$y'_i \geqslant 0 \qquad i=0,1,\cdots,n$$

将区间$[x_i, x_{i+1}]$三等分，令

$$x_j^{(i)} = x_i + \frac{j}{3}\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$j=0,1,2,3$$

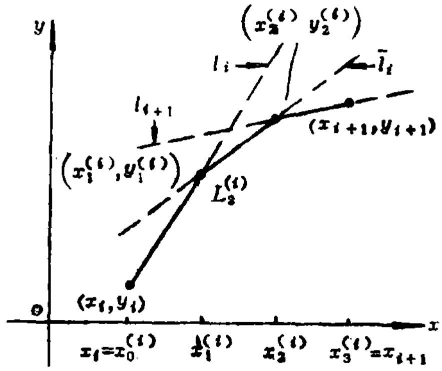


图 2

记

$$y_j^{(i)} = l_i(x_j^{(i)}) \qquad j=0,1$$

$$y_j^{(i)} = l_{i+1}(x_j^{(i)}) \qquad j=2,3$$

设过点$(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$和$(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$的直线为$\bar{l}_i$，显然$\bar{l}_i$与l_i，l_{i+1}分别交于$(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$，$(x_2^{(i)}, y_2^{(i)})$。

若不等式

$$y_2^{(i)} \geqslant y_1^{(i)} \tag{3}$$

成立，则数组$\{y_j^{(i)}\}_{j=0}^3$是单调增的，在$[x_i, x_{i+1}]$上由l_i，$\bar{l}_i$，l_{i+1}相交组成的三边形记为$L_3^{(i)}$，而$L_3^{(i)}$对应的函数记为$L_3^i(x)$。由上节知，对$L_3^{(i)}(x)$作三次Bernstein多项式，则该多项式正好是单调的，且满足Hermite插值条件。如果式(3)不成立，则三次Bernstein多项式不能保单调，于是我们将$[x_i, x_{i+1}]$再细分成$K_i(K_i > 3)$等份，即

$$x_j^{(i)} = x_i + \frac{j}{K_i}\Delta x_i \quad j=0,1,2,\cdots,K_i$$

设$\bar{l}_i$是过点$(x_1^{(i)},\ l(x_1^{(i)}))$与$(x_{K_i-1}^{(i)},\ l_{i+1}(x_{K_i-1}^{(i)}))$的直线，则

$$y_0^{(i)} = y_i,\ y_{K_i}^{(i)} = y_{i+1},\ y_j^{(i)} = \bar{l}_i(x_j^{(i)}) \quad j=1,2,\cdots,K_i-1$$

我们目的是找到这样的K_i，使

$$l_{i+1}\left(x_i + \frac{K_i - 1}{K_i}\Delta x_i\right) \geqslant l_i\left(x_i + \frac{1}{K_i}\Delta x_i\right) \tag{4}$$

将l_i，l_{i+1}的直线方程代入上式得

$$y_{i+1} + \left(\frac{K_i - 1}{K_i}\Delta x_i - \Delta x_i\right)y'_{i+1} \geqslant y_i + \frac{1}{K_i}\Delta x_i y'_i$$

化简得

$$K_i \geqslant \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}(y'_i + y'_{i+1})$$

因而取

$$K_i=\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}(y_i'+y_{i+1}')\right]+1 \tag{5}$$

其中$[x]$表示小于x的最大整数。

若$K_i<3$，仍取$K_i=3$．如果$\Delta y_i=0$，即$y_i=y_{i+1}$，这时取$K_i=1$即可。因为这样得到的Bernstein多项式为直线段。从以上可知，我们找到了$[x_i,x_{i+1}]$上的插值函数$q_i(x)$.

$$q_i(x)=\sum_{j=0}^{K_i}y_j^{(i)}B_{jK_i}\left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i}\right)\qquad x\in[x_i,x_{i+1}] \tag{6}$$

这里 $B_{jK_i}(t)=C_{K_i}^j t^j(1-t)^{K_i-j}$，$0\leqslant t\leqslant 1$.

为了使$[a,b]$上的插值样条函数便于描述，我们引入一组函数$\{\phi_i(x)\}_{i=0}^n$，规定它满足条件：

$$\phi_i(x)=\begin{cases}1 & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\overline{\in}[x_i,x_{i+1}]\end{cases}\quad i=0,1,\cdots,n$$

这样在$[a,b]$上满足Hermite插值条件的保单调插值样条函数$q(x)$可表示为

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n}\phi_i(x)q_i(x)\qquad x\in[a,b] \tag{7}$$

将(4)式代入上式得

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{K_i}\phi_i(x)y_j^{(i)}B_{jK_i}\left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i}\right) \tag{8}$$

2.2 保凸的Hermite插值样条函数

定义 2　设$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$是上凸数组，且

$$\begin{cases}y_0'>\dfrac{\Delta y_0}{\Delta x_0}\\[2ex] \dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}<y_i'<\dfrac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} & i=1,2,\cdots,n\\[2ex] y_{n+1}'<\dfrac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\end{cases}$$

若存在一上凸函数$q(x)$，且$q(x)$满足条件：

1）　在每一个子区间$[x_i,x_{i+1}]$上$q(x)$是一个三次或三次以上的多项式$q_i(x)$；

2）　$q(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上满足插值条件：

$$q_i(x_i)=y_i,\ q_i(x_{i+1})=y_{i+1};\ q_i'(x_i)=y_i',\ q_i(x_{i+1})=y_{i+1}';$$

3）　$q(x)$与数组$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$有相同的单调性。

则我们称$q(x)$是$[a,b]$上满足 Hermite 插值条件的保凸样条函数。下凸数组类似定义。

保凸样条函数的构造与保单调样条函数的构造类似。在图2中，设过(x_i,y_i)，(x_{i+1},y_{i+1})两点的直线为$\bar{\bar{l}}_i$，由定义2中y_i'的条件知l_i，l_{i+1}都在$\bar{\bar{l}}_i$的上侧。若将子区间$[x_i,x_{i+1}]$三等分，我们要选择一个上凸的三边形$L_3^{(i)}$，它的三边分别在l_i，$\bar{l}_i$，l_{i+1}上。

从直线方程$l_i(x)$，$l_{i+1}(x)$可计算出$\bar{l}_i$的斜率

$$\bar{y}_i'=\frac{l_{i+1}(x_2^{(i)})-l_i(x_1^{(i)})}{\frac{1}{3}\Delta x_i}=3\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-(y_i'+y_{i+1}')$$

若

$$y_{i+1}'<\bar{y}_i'<y_i' \tag{9}$$

成立，则L_3^i正好是一上凸三边形，那么作$L_3^{(i)}(x)$的三次Bernstein多项式（6）便是上凸函数。若(9)式不成立，则将$[x_i,x_{i+1}]$ $K_i(K_i>3)$等份，则$\bar{l}_i$的斜率为

$$\bar{y}_i'=\frac{\Delta y_i-\frac{1}{K_i}\Delta x_i(y_i'+y_{i+1}')}{\frac{K_i-2}{K_i}\Delta x_i}$$

$$=\frac{K_i}{K_i-2}\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-\frac{y_i'+y_{i+1}'}{K_i-2}$$

要使(9)式成立，必须满足

$$(K_i-2)y_{i+1}'<K_i\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-(y_i'+y_{i+1}')<(K_i-2)y_i'$$

化简得

$$\begin{cases} K_i>\dfrac{\Delta y_i'}{\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-y_i'} \\[2ex] K_i>-\dfrac{\Delta y_i'}{\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-y_{i+1}'} \end{cases} \tag{10}$$

由定义2知方程(10)中两式右边均为正数，从而我们要找的最小正数K_i为

$$K_i=\mathrm{Max}\left\{\left[-\frac{\Delta y_i}{y_i'-\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}}\right],\ \left[-\frac{\Delta y_i'}{\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}-y_{i+1}'}\right]\right\}+1$$

若$K_i<3$，取$K_i=3$.

$[a,b]$上的保凸插值样条函数与(8)式完全类似，不再写出。

对于给定二阶导数的保形插值样条函数我们将在另文讨论。

3 举 例

设区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上的一个分划

Δ：
$$0=x_0<x_1<x_2<x_3=\frac{\pi}{2}$$

其中：
$$x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{\pi}{3}$$

易验证$y=x^3\sin x$在$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$上单调增函数。我们进行保单调插值时，每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,2)$上的Bernstein多项式次数K_i由公式

$$K_i=\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}(y_i'+y_{i+1}')\right]+1 \quad i=0,1,2$$

算出

$$K_0=4,\ K_1=3,\ K_2=2.$$

根据K_i的选取原则，取$K_2=3$.

参 考 文 献

[1] Micchelli C A, Passaw E Li and Roulier J A. Algorithms for Computing Shape Perserving Spline interpolation to Data, Math.Comp, 1977.7:(2)

[2] Böhm W, Farin G, Kahmann J. A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD, CAGD, 1984,1(1):5～20

[3] 黄友谦. 曲线曲面的数值表示与逼近. 上海科学技术出版社, 1984

Shape Preserving Hermite Interpolation Spline Function

Fang Kui

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

In this paper, we described a shape preserving spline function with Hermite interpolation condition. A spline function of monotone perserving $q(x)$ is constructed, and $q(x)$ satisfies

1) $q(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n,n+1,$

2) $q'(x_i)=y_i',\quad i=0,1,\cdots,n,n+1.$

Similar spline functions have also been studied for convex sequences $\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$.

Key words: interpolation, spline function, monotone increasing array, convex array, shape preserving spline interpolation