国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

方差分量的Bayes二次无偏估计及可容许估计的非负性

李 永 乐
（系统工程与应用数学系）

摘 要 对于有P个方差分量的线性模型，本文导出了方差分量线性函数的Bayes不变二次无偏估计的显示表达式，证明了Bayes不变二次无偏估计类形成了可容许的不变二次无偏估计的完全类。在可容许的不变二次无偏估计类中，讨论了非负参数函数的非负估计问题，给出了可容许的非负定估计存在的充要条件。

关键词 数理统计，估计理论，方差分量，Bayes不变二次无偏估计，可容许性，非负估计，椭球等高分布

分类号 O212.1

方差分量模型的研究始于30年代末我国著名统计学家许宝騄先生的关于线性模型的误差估计的著名论文[1]。这个模型在生物育种、数量遗传、心理学研究、工业质量管理和计量经济等方面有广泛的应用。因此，40多年来关于它的研究一直受到人们的重视，发展很快。近年来，关于方差分量的Bayes估计、可容许估计和非负估计讨论较多。如Olsen等人在[2]中研究了具有二个方差分量的正态线性模型，方差分量线性函数的可容许估计。La Motte 在[3]中将他们的结果推广到多于两个方差分量的模型和有偏估计的情形。Gnot 和 Kleffe 在[4]中用[2]中的方法，对于二个方差分量的正态线性模型在假定先验分布的二阶矩存在的条件下，导出了Bayes不变二次估计（有偏和无偏）的显示表达式,并且证明了它们在各自考虑的类中形成了可容许估计的完全类。本文作者在[5]中把他们的工作推广到具有任意 p 个方差分量的模型。

本文把服从正态分布换成更为广泛的一类分布，即椭球等高分布族(它包含了许多重要分布，如多元正态分布、多元 t 分布、多元柯西分布等)，得到了与[5]相类似的一些结果。这里用到的一些椭球等高分布理论可参见[6]。

1 数学模型

考虑线性模型

$$Y=X\beta+\varepsilon \tag{1}$$

1988年12月16日收稿

这里X是已知的$n\times k$矩阵，$rk(X)=k$. β是一个未知参数向量；ε是n维随机向量服从椭球等高分布，即$\varepsilon\sim EC_n(0,V_\theta,\psi)$，$E\varepsilon=0$，$E\varepsilon\varepsilon'=\alpha_1V_\theta$，$V_\theta=\sum_{i=1}^{p}\theta_iV_i$，$\alpha_1=-2\psi'(0)$，$V_1>0$（正定），$V_i\geqslant0$（非负定），$i=2,\cdots,p$，并且$\varepsilon$有有限的四阶矩。$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_p)'$，$\theta\in\Theta=\{\theta:\ \theta_1>0,\theta_i\geqslant0,i=2,\cdots,p\}$，$\theta_1,\cdots,\theta_p$称为方差分量。在这些条件下的模型简记为

$$(Y,X\beta,\alpha_1\sum_{i=1}^{p}\theta_iV_i)\tag{2}$$

记$M=I-XX^+$，X^+表示X的Moore-Penrose逆，则有行正交阵B，使得$B'B=M$，$BB'=I_q$，$q=n-k$。令$t=BY$，则线性统计量$t=BY$关于变换群$\Pi=\{\pi\}$，$\pi:\ Y\to Y+X\alpha$，$\alpha\in R^k$是一个极大不变统计量。关于t的导出模型为

$$(t,0,\alpha_1\sum_{i=1}^{p}\theta_iW_i),\ W_i=BV_iB'\tag{3}$$

假定

$$W_iW_j=W_jW_i\qquad i,j=1,\cdots,p\tag{4}$$

我们考虑的是方差分量线性函数$f'\theta$的形如$\gamma(Y)=Y'AY$的Bayes不变二次无偏估计。不变性是对变换群Π而言的，即对$\forall\beta\in R^k$，有

$$Y'AY=(Y+X\beta)'A(Y+X\beta)\tag{5}$$

它等价于$AX=0$.

设θ的先验分布为ζ，满足$E_\zeta\theta\theta'$存在。取平方损失函数，风险函数为

$$R(\theta,\gamma)=E_\theta(\gamma-f'\theta)^2\tag{6}$$

Bayes风险为

$$R(\gamma)=E_\zeta R(\theta,\gamma)=E_\zeta[E_\theta(\gamma-f'\theta)^2]\tag{7}$$

设$\mathscr{S}_n$表示$n\times n$对称矩阵空间，记

$$\mathscr{E}_U^f=\{Y'AY:A\in\mathscr{S}_n,EY'AY=f'\theta,\forall\theta\in\Theta,\beta\in R^k\}$$

$$\mathscr{E}_I^f=\{Y'AY:A\in\mathscr{S}_n,AX=0\},\ \mathscr{E}_{IU}^f=\mathscr{E}_I^f\cap\mathscr{E}_I^f$$

若$\mathscr{E}_U^f\neq\phi$（非空），则称$\gamma=f'\theta$可估；若$\mathscr{E}_{IU}^f\neq\phi$，则称$f'\theta$不变可估。如果$\gamma^*\in\mathscr{E}_U^f$，且$R(\gamma^*)=\min\limits_{\gamma\in\mathscr{E}_U^f}R(\gamma)$，则称$\gamma^*$为$f'\theta$的Bayes二次无偏估计(BAQUE)；如果$\gamma^*\in\mathscr{E}_{IU}^f$，且$R(\gamma^*)=\min\limits_{\gamma\in\mathscr{E}_{IU}^f}R(\gamma)$，则称$\gamma^*$为$f'\theta$的Bayes不变二次无偏估计(BAIQUE)。

下面再引进一些记号和概念。记

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{S}_n:AX=0\}=\{MAM:\ A\in\mathscr{S}_n\}$$

$$\mathscr{A}_M=\{\sum_{i=1}^{p}\tau_iMV_iM:\ \tau=(\tau_1,\cdots,\tau_p)'\in R^p\}$$

$$\mathscr{A}_M^{\perp}=\{T\in\mathscr{A}:\ \mathrm{tr}(AT)=0,\ \forall A\in\mathscr{A}_M\}$$

$V=(\vec{V}_1,\cdots\vec{V}_p)$，$\vec{V}_i$表示矩阵$V_i$的按列拉直，$Q=(\mathrm{tr}(V_iMV_jM))=V'(M\otimes M)V$，$\otimes$表示Kronecker积。

定义　若$\mathscr{S}_n$的子空间$\mathscr{L}$具有性质：

$$A\in\mathscr{S}\Rightarrow A^2\in\mathscr{L}$$

则称$\mathscr{L}$是$\mathscr{S}_n$的二次子空间。

有关二次子空间的一般性质可参见[7]。

2 几个引理

下述的引理 1 只要求$E\varepsilon=0, E\varepsilon\varepsilon'=\theta_1V_1+\cdots+\theta_pV_p$，其中$V_i\in\mathscr{S}_n, \theta=(\theta_1,\cdots,\theta_p)'\in\mathscr{F}=\{\theta: \sum_{i=1}^p\theta_iV_i\geqslant 0\}$，而对$\varepsilon$服从什么分布没有进一步的假定。

引理 1 (i) $\mathscr{E}^f_{IU}\neq\phi\Longleftrightarrow f\in\mu(Q)$，$\mu(Q)$表示由矩阵$Q$的列向量张成的空间。

(ii) $\mathscr{E}^f_{IU}=\{Y'(A+T)Y: A\in\mathscr{A}, \forall T\in\mathscr{A}^{\perp}_M\}$. (8)

证明 (i) $\mathscr{E}^f_{IU}\neq\phi\Longleftrightarrow\exists Y'AY\in\mathscr{E}^f_{IU}$，使得$EY'AY=f'\theta, AX=0\Longleftrightarrow \mathrm{tr}(AV_i)=f_i, i=1,\cdots p$，$AX=0\Longleftrightarrow\mathrm{tr}(MAMV_i)=f_i$，$i=1,\cdots,p$，$\Longleftrightarrow\vec{V}'_i(M\otimes M)\vec{A}=f_i$，$i=1,\cdots,p$．即$V'(M\otimes M)\vec{A}=f\Longleftrightarrow f\in\mu(V'(M\otimes M))=\mu(Q)$.

(ii) 设$\hat{\gamma}_0=Y'AY\in\mathscr{E}^f_{IU}$固定，而$\hat{\gamma}=Y'BY\in\mathscr{E}^f_{IU}$任意。由于$E(\hat{\gamma}-\hat{\gamma}_0)=f'\theta-f'\theta=0, A=MAM, B=MBM$及$E(\hat{\gamma}-\hat{\gamma}_0)=\mathrm{tr}[(B-A)E(YY')]=\mathrm{tr}[(B-A)\sum_{i=1}^p\theta_iMV_iM]=0$，得$T\triangleq B-A\in\mathscr{A}^{\perp}_M$，从而$B=A+T$，式(8)成立。

下面两个引理假定了$\varepsilon\sim EC_n(0,V_\theta,\psi)$，且$\varepsilon$有有限的 4 阶矩，但只要求$V_i\in\mathscr{S}_n$，$\theta\in\mathscr{F}$．记$E_\xi\theta\theta'=C=(c_{ij})$。

引理 2 $\gamma=f'\theta$的BAIQUE存在且在概率为1的意义下是唯一的，当且仅当$\mathscr{E}^f_{IU}\neq\phi$．若$\hat{\gamma}=Y'AY$为$f'\theta$的 BAIQUE，则$\hat{\gamma}\in\mathscr{E}^f_{IU}$且$A$满足

$$4\alpha_2\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p c_{ij}MV_iAV_jM+2(\alpha_2-\alpha_1)\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p c_{ij}\mathrm{tr}(AV_i)MV_jM\in\mathscr{A}_M, \tag{9}$$

这里$\alpha_1=-2\psi'(0), \alpha_2=4\psi''(0)$。

证明 $\hat{\gamma}$的风险$R(\theta,\hat{\gamma})=E_\theta(\hat{\gamma}-E\hat{\gamma})^2=E_\theta\hat{\gamma}^2-(E\hat{\gamma})^2$. 由于$AX=0, \varepsilon\sim EC_n(0,V_\theta,\psi)$，$\varepsilon$有有限的 4 阶矩。利用特征函数与矩的关系，对特征函数$\psi=\psi(t'V_\theta t)$求导，得

$$\begin{cases}E\varepsilon_i=0, E\varepsilon_i\varepsilon_j=-2\psi'(0)\sigma_{ij}, E\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k=0\\ E\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l=4\psi''(0)(\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk})\end{cases} \tag{10}$$

这里$V_\theta=(\sigma_{ij})$。因此，$E_\theta\hat{\gamma}=\alpha_1\mathrm{tr}(AV_\theta), E_\theta\hat{\gamma}^2=\alpha_2(\mathrm{tr}(AV_\theta))^2+2\alpha_2\mathrm{tr}(AV_\theta)^2$，从而得到

$$\begin{aligned}R(\hat{\gamma})=E_\xi R(\theta,\hat{\gamma})=&2\alpha_2\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p c_{ij}\mathrm{tr}(AV_iAV_j)\\&+(\alpha_2-\alpha_1^2)\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p\mathrm{tr}(AV_i)\mathrm{tr}(AV_j)\end{aligned} \tag{11}$$

因BAIQUE在$\mathscr{A}$上极小化$R(\hat{\gamma})$，为此在$\mathscr{A}$上考虑函数

$$h(A)=2\alpha_2\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p c_{ij}\mathrm{tr}(AV_iAV_j)+(\alpha_2-\alpha_1^2)\sum_{i=1}^p\sum_{j=1}^p\mathrm{tr}(AV_i)\mathrm{tr}(AV_j)$$

利用Lagrangian乘子法，作函数

$$L = k\left(\frac{A+A'}{2}\right) - \operatorname{tr}(\wedge X'A) - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \operatorname{tr}(AV_i)$$

A为$n\times n$阵，$\wedge$为$k\times k$对称矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$为标量。令$\frac{\partial L}{\partial A}=0$，整理得

$$4a_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}V_iAV_j + 2(a_2-a_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(AV_i)\cdot V_j - \wedge X' - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i V_i = 0 \tag{12}$$

公式(12)中的A为对称矩阵，即$A\in\mathscr{S}_n$. 在式(12)两边左右同乘M，得

$$4a_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}MV_iAV_jM + 2(a_2-a_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(AV_i)MV_jM$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i MV_iM\in\mathscr{A}_M \tag{13}$$

下证充分性。以$T\in\mathscr{A}_M^{\perp}$在式(13)两边右乘后取tr得

$$4a_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(MV_iAV_jMT) + 2(a_2-a_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(AV_i)\operatorname{tr}(MV_jMT)$$
$$=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\operatorname{tr}(MV_iMT)$$

注意到$\operatorname{tr}(MV_iMT)=0$, $\forall T\in\mathscr{A}_M^{\perp}$，得到

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(MV_iAV_jMT)=0,\ \forall T\in\mathscr{A}_M^{\perp} \tag{14}$$

又因$T\in\mathscr{A}$，有$T=MTM$，从而有

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(MV_iAV_jMT)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(V_iAV_jT)=0 \tag{15}$$

假定$\hat{p}^*=Y'A^*Y\in\mathscr{E}_{IU}^{f}$满足式(15)，鉴于引理1，对任意$\hat{p}\in\mathscr{E}_{IU}^{f}$，有$\hat{p}=Y'(A^*+T)Y$，$T\in\mathscr{A}_M^{\perp}$. 由式(11)得到

$$\begin{aligned}
R(\hat{p}) &= 2a_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}[(A^*+T)V_i(A^*+T)V_j]\\
&\quad + (a_2-a_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}[(A^*+T)V_i]\operatorname{tr}[(A^*+T)V_j]\\
&= R(\hat{p}^*) + R(Y'TY) + 4a_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\operatorname{tr}(V_iA^*V_jT)\\
&\quad + 2(a_2-a_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\operatorname{tr}(A^*V_i)\operatorname{tr}(TV_j)\\
&= R(\hat{p}^*) + R(Y'TY)
\end{aligned}$$

最后得到

$$R(\hat{p}^*) = R(\hat{p}) - R(Y'TY) \leqslant R(\hat{p}),\ \forall \hat{p}\in\mathscr{E}_{IU}^{f} \tag{16}$$

即$\hat{p}^*$为$f'\theta$的BAIQUE.

证唯一性。假定存在$f'\theta$的二个BAIQUE$\hat{p}^*$和$\hat{p}^{**}$，则式(16)蕴含了$R(\hat{p}^*-\hat{p}^{**})=0$. 于是由$R(\hat{p}^*-\hat{p}^{**})=E_\xi \operatorname{Cov}_\theta(\hat{p}^*-\hat{p}^{**})$，得$\operatorname{Cov}(\hat{p}^*-\hat{p}^{**})=0$，从而有

$$P_\theta\{\hat{p}^*=\hat{p}^{**}\}=1$$

设$\mathscr{T}$为包含$\mathscr{A}_M$的最小二次子空间，即所有包含$\mathscr{A}_M$的二次子空间的交，则有

引理 3 $\mathscr{U}=\{\hat{p}_A=Y'AY:\ A\in\mathscr{T}\}$在如下意义下是一个完全类：

对$\forall\hat{p}\in\mathscr{E}^f_{IU}$，$\exists\hat{p}^*\in\mathscr{U}$，$\hat{p}\bar{\in}\mathscr{U}$，使得$R(\hat{p})>R(\hat{p}^*)$，这时称$\hat{p}^*$优于$\hat{p}$.

证明 对任意$A\in\mathscr{A}$，作如下分解

$$A=A_1+A_2$$

$A_1\in\mathscr{T}$，A_2属于$\mathscr{T}$的关于内积为$\mathrm{tr}(A_1A_2)$的正交补空间。显然

$$R(\hat{p}_A)=R(\hat{p}_{A_1})+R(\hat{p}_{A_2})+4\alpha_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\mathrm{tr}(A_2V_iAV_j)$$
$$+2(\alpha_2-\alpha_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\mathrm{tr}(A_1V_i)\mathrm{tr}(A_2V_j)$$

因$A_1=MA_1M$，$A_2=MA_2M$，$\mathrm{tr}(A_2V_iA_1V_j)=\mathrm{tr}(A_2MV_iMA_1MV_jM)$，$MV_iM$，$A_1\in\mathscr{T}$，而$\mathscr{T}$为二次子空间，故有$MV_iMA_1MV_jM\in\mathscr{T}$. 从而得

$$\mathrm{tr}(A_2V_j)=\mathrm{tr}(A_2MV_jM)=0,\ \mathrm{tr}(A_2V_iA_1V_j)=0$$

因此
$$R(\hat{p}_A)=R(\hat{p}_{A_1})+R(\hat{p}_{A_2})$$

故$R(\hat{p}_{A_1})<R(\hat{p}_A)$，且$Y'A_1Y$和$Y'AY$有相同的期望值。

3 Bayes不变二次无偏估计

本节在式(4)的假定下，考虑模型式(2)和它的不变导出模型式(3)。在$E_\xi\theta\theta'=C=(c_{ij})$中假定$c_{11}\neq0$，且$\theta$的各分量互不相关，即

$$\xi\in\{\xi:E_\xi\theta=(\tau_1,\cdots,\tau_p)',\mathrm{Cov}_\xi(\theta)=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots\sigma_p^2,\tau_1^2+\sigma_1^2>0\}$$

记$\Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\cdots,\sigma_p^2)$，$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_p)'$，则有

$$C=\tau\tau'+\Sigma$$

再由下面的定理 1 和定理 2 知，如上考虑的先验分布族在满足$E_\xi\theta\theta'$存在的 先验分布族中形成了一个完全类。因此，对于各分量相关的情形可以不予考虑。

由$W_1,\cdots W_p$的可交换性，有正交矩阵Γ，使得

$$W_i=\Gamma\mathrm{diag}(\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_q})\Gamma',i=1,\cdots,p \tag{17}$$

其中$\delta_{i_1},\cdots,\delta_{i_q}$是$W_i$的全部特征根。由$V_1>0$可知$W_1>0$，从而有$\delta_{1j}>0,j=1,\cdots,q$. 记$\Gamma=(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_q)$，$\Gamma_i$为$\Gamma$的第 i 个列向量，得到W_i的谱分解式

$$W_i=\sum_{j=1}^{q}\delta_{ij}E_j,E_j=\Gamma_j\Gamma_j',i=1,\cdots,p \tag{18}$$

显然有$E_i^2=E_i$，$E_iE_j=0(i\neq j)$。我们把由$E_1,\cdots,E_q$张成的线性空间记为$\mathscr{J}^*=\mathrm{SP}\{E_1,\cdots,E_q\}$，易见$\mathscr{J}^*$是一个可交换的二次子空间，也叫Jordan代数。

若$t'A_*t$是$f'\theta$的BAQUE，则因$t'A_*t=Y'B'A_*BY$，据引理 3，$B'A_*B=A\in\mathscr{J}$，由此可得$A_*\in\mathscr{J}^*$.

设$\mathscr{E}^f_{IU}\neq\phi$，则有如下结果。

定理 1 记$A_C=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\tau_i\tau_jV_iMV_j+\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2V_iMV_i$，$A_{C*}=BA_CB'$，则参数线性函数$\gamma=f'\theta$的BAIQUE由

$$\hat{\gamma}=t'A_*t,\ A_*=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\Lambda_{C*}^{-1}W_i \tag{19}$$

或

$$\hat{\gamma}=Y'AY,\ A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(M\Lambda_C M)^+V_iM \tag{20}$$

唯一给定。其中$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)'$满足无偏性条件

$$H\lambda=f \tag{21}$$

式中$H=(h_{ij}),h_{ij}=\mathrm{tr}(W_i\Lambda_{C*}^{-1}W_j)=\mathrm{tr}(M\Lambda_CM)^+V_iMV_j$

证明　由引理2知，存在$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_p)'$使得

$$\begin{aligned}4\alpha_2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}MV_iAV_jM+2(\alpha_2-\alpha_1^2)\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}\mathrm{tr}(AV_i)MV_jM\\=\sum_{i=1}^{p}\mu_iMV_iM\end{aligned} \tag{22}$$

利用$M=B'B$，$BB'=I_q$，$W_i=BV_iB'$，$A_*=BAB'$，整理得

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_{ij}W_iA_*W_j=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iW_i \tag{23}$$

其中$\lambda_i=\frac{1}{4\alpha^2}\left[\mu_i-2(\alpha_2-\alpha_1^2)\sum_{j=1}^{p}\mathrm{tr}(AV_j)\right]$. 注意到$C=\tau\tau'+\Sigma$，由式(23)得

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\tau_iW_i\right)A_*\left(\sum_{i=1}^{p}\tau_iW_i\right)+\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2W_iA_*W_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iW_i \tag{24}$$

由于$A_*\in\mathscr{J}^*$，$W_i\in\mathscr{J}^*$，因此A_*与W_i可交换，故有

$$A_*=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\Lambda_{C*}^{-1}W_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iW_i\Lambda_{C*}^{-1} \tag{25}$$

其中$\Lambda_{C*}=\left(\sum_{i=1}^{p}\tau_iW_i\right)^2+\Sigma\sigma_i^2W_i^2$. 易得

$$B'\Lambda_{C*}^{-1}B_iV_iM=(M\Lambda_CM)^+V_iM$$

故又有

$$A=B'A_*B=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iB'\Lambda_{C*}^{-1}BV_iB'B=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(M\Lambda_CM)^+V_iM \tag{26}$$

由无偏性条件$\mathrm{tr}(AV_i)=f_i$，$i=1,\cdots,p$，得

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\mathrm{tr}[(M\Lambda_CM)^+V_iMV_j]=f_j,\ j=1,\cdots,p \tag{27}$$

令$h_{ij}=\mathrm{tr}(M\Lambda_CM)^+V_iMV_j$，$H=(h_{ij})$，(27)式就是

$$H\lambda=f$$

下证(21)式相容。记$W=(\vec{W}_1,\cdots,\vec{W}_p)$，$\vec{W}_i$为$W_i$的按列拉直，则有$Q=W'W$，$H=W'(\Lambda_{C*}^{-\frac{1}{2}}\otimes\Lambda_{C*}^{-\frac{1}{2}})W$，因此有$\mu(Q)=\mu(H)$。由$\mathscr{E}_{IU}^f\neq\phi$，知$f\in\mu(Q)=\mu(H)$)，即式(21)相容。

特别，当$\sigma_1^2=\cdots=\sigma_p^2=0$时，这时先验分布退化为在$(\tau',\cdots,\tau_p)'$上的单点分布，此时的BAIQUE为局部最优不变二次无偏估计。事实上，当$\sigma_i^2=0$时，

$$\Lambda_{C*}^{-1}W_i=\Big(\sum_{j=1}^{p}\tau_jW_j\Big)^{-1}W_i\Big(\sum_{j=1}^{p}\tau_jW_j\Big)^{-1}$$

$$B'\Lambda_{C*}^{-1}W_iB=\Big(\sum_{j=1}^{p}\tau_jMV_jM\Big)^{+}V_i\Big(\sum_{j=1}^{p}\tau_jMV_jM\Big)^{+}$$

这时定理 1 给出的估计是MINQE(U,I)，见[8]。

定理2　由定理 1 给出的估计类形成了可容许的不变二次无偏估计的完全类。

证明　因$A_*\in\mathscr{T}^*$，有$A_*=\sum\limits_{i=1}^{q}a_iE_i$．令

$$S=(t'E_1t,\cdots,t'E_qt)',a=(a_1,\cdots,a_q)'$$

则

$$\hat{\gamma}=t'A_*t=\sum_{i=1}^{q}a_it'E_it=a'S$$

容易证明S对本文所考虑的先验分布族是一个充分统计量。设$w_1,\cdots,w_q$为$W_\theta=\theta_1W_1+\cdots+\theta_pW_p$的全部特征根，则有$W_\theta=\sum\limits_{j=1}^{q}w_jE_j$，$Et'E_it=\alpha_1\mathrm{tr}(E_iW_\theta)=\alpha_1w_i$，$V_{ar}\cdot(t'E_it)=\alpha_2\{[\mathrm{tr}(E_iW_\theta)]^2+2\mathrm{tr}(E_iW_\theta)^2\}-(\alpha_1w_i)^2=(3\alpha_2-\alpha_1^2)w_i^2$．易见$w_i$与$W_j$的特征根$\delta_{i1},\cdots,\delta_{jq}(j=1,\cdots,p)$有如下关系：$w_i=\theta_1\delta_{1i}+\cdots+\theta_p\delta_{pi}$．记$\delta_i=(\delta_{i1},\cdots,\delta_{iq})'$，$\Delta=(\delta_1,\cdots,\delta_p)$，$D_\theta=\mathrm{diag}(w_1^2,\cdots,w_q^2)$，这样就得到了关于充分统计量$S$的线性模型：

$$\begin{cases}ES=\alpha_1\Delta\theta\\ \mathrm{Cov}(S)=(3\alpha_2-\alpha_1^2)D_\theta\end{cases}\tag{28}$$

在[3]中的意义下,定理 1 给出的BAIQUE $\hat{\gamma}=a'S$在$(D_\theta,\Delta\theta\theta'\Delta)$处是最优的。再由[3]中定理2.2可知，对于线性模型式(28),$a'S$在的$f'\theta$线性无偏估计类中是可容许的。因此，定理 1 给出的估计类形成了可容许的不变二次无偏估计的完全类。

4　可容许估计的非负性

有时需要考虑非负参数函数的非负估计问题，例如取$f=(1,0,\cdots,0)'$时,就有$f'\theta=\theta_1>0$．关于非负估计的一般性讨论可参见[8]。

本节假定$f_i\geqslant0(i=1,\cdots,p)$，这时$f'\theta\geqslant0$，我们自然希望它的估计量$\hat{\gamma}$也是非负的，这样才合常理。但由定理 1 给出的估计不一定具有非负性。因此，有必要讨论非负估计的存在问题。我们把这种具有非负性质的估计称为非负定估计。

定理 2 告诉我们，由定理 1 给出的BAIQUE类为可容许的不变二次无偏估计的完全类，记它为$\mathscr{B}_{IU}$．$\mathscr{B}_{IU}$有如下表示：

$$\mathscr{B}_{IU}=\Big\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_iQ_i:H\lambda=f,\tau_1>0,\tau_i\geqslant0,i=2,\cdots,p\Big\}$$，其中 $Q_i=Y'(M\Lambda_CM)^+V_iMY=Y'B\Lambda_{C*}^{-1}W_iBY=\sum\limits_{j=1}^{q}d_j^{-1}\delta_{ij}Y'B'E_jBY$，$d_1,\cdots,d_q$为$\Lambda_{C*}$的全部特征根。易见

$$d_j=\Big(\sum_{i=1}^{p}\tau_i\delta_{ij}\Big)^2+\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2\delta_{ij}^2,j=1,2,\cdots,q$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_iQ_i=\sum_{j=1}^{q}d_j^{-1}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta_{ij}\right)Y'B'E_jBY$$

由此可见，$\sum_{i=1}^{p}\lambda_iQ_i\geqslant 0$，当且仅当$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta_{ij}\geqslant 0(j=1,\cdots,q)$，即$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)'$属于凸锥

$$\mathscr{B}=\left\{\lambda:\ \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\delta_{ij},\ j=1,\cdots,q\right\}=\{\lambda:\Delta\lambda\geqslant 0\},\ \Delta\lambda\geqslant 0\text{表示每个分量非负。}$$

定理 3 在$\mathscr{B}_{IU}$中存在$f'\theta$的非负估计，当且仅当

$$\Delta H^+f\geqslant 0,\quad \tau_1>0,\quad \tau_i\geqslant 0,\quad i=2,\cdots,p$$

证明 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_iQ_i\geqslant 0$等价于$\lambda\in\mathscr{B}$，即$\Delta\lambda\geqslant 0$. 由于$H\lambda=f$，得$\lambda=H^+f$，从而得$\Delta H^+f\geqslant 0$.

参 考 文 献

[1] Hsu PL. On the Best Unbiased Quadratic Estimation of Heteroscedastic Variance. Math Oper Statist, 1983,1:27~44

[2] Olsen A, Seely J, Birkes D. Invariant Quadratic Unbiased Estimation for Two Variance Components. Ann Statist, 1976, 4:878~890

[3] LaMotte L R.Some results on Biased and Linear Estimation Applied to Variance Components Estimation. In: Kloneckiw, Kozek A and Rosinki J. Proceedings Sixth International Conference. Wiska(Poland), Lecture Notes in Statistics 2. Springer, New York, Berlin:1980.266~274

[4] Gnot S, Kleffe J. Quadratic Estimation in Mixed Linear Models with two Variance Components. J staist Plann Inf, 1983; 8 : 267~279

[5] 李永乐. 具有P个方差分量的线性模型的 Bayes 二次估计及可容许估计的非负性. 应用概率统计, 1989,5(1):18~25

[6] 方开泰. 多元分析资料汇编VIII. 中科院应用数学所印, 1983

[7] Seely J. Quadratic Subspace and Completness. Ann Math Statist, 1971, 42:710~721

[8] Rao C R, Kleffe J. Estimation of Variance Components. In: Krishnaiah PR. Handbook of Statistics. North-Holland, Amsterdam: 1980. 1~40

Bayes Quadratic Unbiased Estimates of Variance Components and Nonnegativity of Admissible Estimates

Li Yongle

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

（下转第75页）

参 考 文 献

〔1〕 俞玉森主编．数学规划的原理和方法．武汉：华中工学院出版社，1985

〔2〕 李登峰．变量带上界的运输问题的一种新的对偶算法．系统工程，1989，(1)：54～58

〔3〕 陈庆华．有容量限制的运输问题．国防科技大学学报，1986，(3)：87～92

A New Dual Algorithm for the Transportation Problem

Li Dengfeng

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

The paper gives a new method for solving the transportation problem-the dual algorithm for the transportation problem (on the table work). Finally, the author gives one examples which show that the algorithm is simpler for solving some problems than the method in [1].

Key words: linear programming, transportation model, duality theory, regular solution, feasible solution, incremental path

---

(上接第57页)

Abstract

In this paper, linear models with p variance components are considered and the explicit and easy computable expressions for Bayes invariant quadratic unbiased estimates (BAIQUE's) are presented. The class of BAIQUE's is proved to form the entire class of admissible invariant quadratic unbiased estimates. A necessary and sufficient condition for the existence of admissible nonegative definte quadratic unbiased estimates is given.

Key words: mathematical statistics, estimation theory, variance components, Bayes invariant quadratic unbiased estimation, admissibility, nonnegative estimation, elliptically contoured distribution