国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期 1990年9月 Vol.12 No.3

最小、最大广义最优停止规则的特征

金治明
（系统工程与应用数学系）

摘 要 设$(X_n,\mathscr{F}_n)_1^\infty$是适应的报酬序列，$(\gamma_n)$是相应的snell包，$(A_n)$是$(\gamma_n)$的Doob-Meyer分解中零初值的可料增过程。本文继J. Klass的研究证明了$\sigma_1=\inf\{K\geqslant 1:X_k\geqslant\gamma_k\}$是最小半最优的且是最大严格正则的广义规则，而$K_0=\sup\{n\geqslant 0:A_n=0\}<\infty$是最大正则的广义规则，从而得出了广义最优规则唯一性的另一表述。

关键词 随机过程，马尔可夫过程，最优化，广义最优停止规则，半最优，严格正则
分类号 O211.6

设有完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，一列单调上升的σ代数族$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}$，$\mathscr{F}_0$包含一切零概集。$T$表示$(\mathscr{F}_n)$停止规则全体，$\bar{T}$表示$(\mathscr{F}_n)$广义停止规则全体。考虑一适应可测的报酬序列$X=\{X_n,\mathscr{F}_n\}_1^\infty$，并令

$$X_\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}X_n,\quad \mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=\phi}^\infty\mathscr{F}_n\right)$$

$$\bar{C}_n=\{t\in\bar{T}:\ t\geqslant n,\ EX_t^-<\infty\},\quad C_n=\bar{C}_n\cap T$$

$$\bar{V}_n=\sup_{t\in\bar{C}_n}Ex_t,\quad V_n=\sup_{t\in C_n}Ex_t$$

$$\bar{\gamma}_n=\operatorname*{esssap}_{t\in\bar{C}_n}E(x_t|\mathscr{F}_n),\quad \gamma_n=\operatorname*{esssup}_{t\in C_n}E(x_t|\mathscr{F}_n)$$

$$\sigma_n=\inf\{k\geqslant n:\ x_k=\gamma_k\},\inf\phi=+\infty$$

熟知$E\gamma_n=V_n=\bar{V}_n$，(γ_n)是上鞅，且$\gamma_n=\max(x_n,E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))$。

1973年Michael. J. Klass在[1]中提出了正则，严格正则，半最优，严格半最优等概念，得到最优停止规则（广义）特征的刻划。

1 定义

定义 1 称$t\in\bar{C}$为正则的广义停止规则（下面简称为广义规则），如果对任一正整数n，$E(x_t|\mathscr{F}_n)\geqslant x_n$，$[t>n]a.s$成立；当上面式子成立严格不等号时，则称$t$为严格正则的广义规则。

定义 2 称$t\in\bar{C}_1$为半最优的广义规则，如果对任何$t'\in\bar{C}_1$，正整数n及任何

1988年6月30日收稿

$\wedge \subset [t' > n,\ t = n]$，$Ex_t I_\wedge \geqslant Ex_{t'} I_\wedge$；如果上面不等式总是严格的，则称 t 为严格的半最优停止规则。

照通常的方法，我们可以很自然地引入最小半最优规则、最小严格半最优规则、最大正则规则与最大严格正则规则等定义。

上述这些定义以及随机变量的相等、不等，我们都是在 a.s 下定义的。

文[1]中假定了报酬 $x_n = x_n(y_1, y_2, \cdots y_n)$，而 $\mathscr{F}_n = \sigma(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，并假定 $\mathscr{F}_n$ 与 $\sigma(y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots)$ 相互独立。然而检查它的证明，可知其中第一段的全部结果对于一般的报酬序列也是成立的。

下面称报酬序列 $X = (x_n, \mathscr{F}_n)_1^\infty$ 满足 A 是指，存在可积的随机变量 u，使得对于每一个 n，有 $x_n \leqslant E(u \mid \mathscr{F}_n)$. 由[1]、[2]，我们可得结论：

(a)　在假设 A 下，广义停止规则 τ 是最小严格半最优等价于 τ 是最大正则广义规则，且 τ 最优。

(b)在假设 A 下，若 τ_0 是最小半最优，τ_1 是最小严格半最优，则最优广义规则集

$$\Theta = \{t \in \vec{T},\ t\text{正则，且}t \geqslant \tau_0\}$$
$$= \{t \in \vec{T},\ t\text{半最优，且}t \leqslant \tau_1\}$$

1984年Kopp在[2]中提出了最小与最大广义最优规则的概念，并指出

(c)　在假设 A 下，对 $\forall n \geqslant 1$，σ_n 是 $\bar{C}_n$ 中最小的广义最优规则。

若令 A_n 是上鞅 γ_n 的Doob-Meyer分解中零初值可料增过程，

$$k_0 = \sup\{n \geqslant 0;\ A_n = 0\}$$

则当 $k_0 < \infty$ a.s 时，k_0 是最大的最优广义规则。

本文我们将证明：σ_1 就是最小半最优广义规则，且是最大的严格正则广义规则，而 k_0 就是最大正则的广义规则。从而得到广义最优规则唯一性的进一步刻划。

2　主要结果与证明

定理 1　在假设 A 下，σ_1 是 $\bar{C}$ 中最小的半最优广义停止规则。

证明　在 A 下，$V_1 < \infty$，因此 σ_1 是 $\bar{C}_1$ 中最小的广义最优规则。由于 $EX_{\sigma_1} = V_1 < \infty$，而对 $\forall t \in \bar{C}$，在 $[\sigma_1 = n, t > n]$ 上，$E(x_t \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \gamma_n = X_n$（[3] 之引理 4.4），所以 σ_1 是半最优的广义规则。往证 σ_1 是最小的半最优规则。如其不然，则由[1]之定理 3，必存在最小的半最优规则，$p(t < \sigma_1) > 0$. 于是必存在 n，使得 $p(B_n) \triangleq p(t = n, \sigma_1 > n) > 0$，且 $\int_B x_n \geqslant \int_B x_\sigma$. 令 $t' = I_{B_n} n + I_{B_n^c} \sigma_1$，则 $t' \in \bar{C}_1$

$$Ex_{t'} = \int_{B_n} x_n + \int_{B_n^c} x_{\sigma 1} \geqslant Ex_{\sigma 1}$$

而 $p(t' < \sigma_1) > 0$，这与 σ_1 是最小的广义最优规则矛盾，定理得证。

定理 2　在假设 A 下，如 $k_0 < \infty$ a.s，则 k_0 是 C_1 中最大正则的广义规则。

引理 1　在假设 A 下，如果停时 $T \leqslant \sigma_1$，序列 $\gamma^T = (\gamma_{T \wedge n})_1^\infty$ 是鞅；进而，如果 $T < \infty$ a.s，则 $E\gamma_T \geqslant V_1$.

证明　在 $E = \{T > n\}$ 上，$\gamma_n > x_n$，故 $\gamma_n = E(\gamma_{n+1} \mid \mathscr{F}_n)$，有

$$E(\gamma_{T\wedge(n+1)}|\mathscr{F}_n)=\gamma_T I_{B^c}+E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)I_B=\gamma_{T\wedge n}$$

故γ^T是鞅。从而$E\gamma_{T\wedge n}=E\gamma_1=V_1$，但是$(\gamma_n)$是一个被正则鞅$\{y_n=E(u|\mathscr{F}_n)\}_1^\infty$所控制的序列，对非负序列$\{y_n^T-\gamma_n^T\}_1^\infty$同Fatou引理，遂得

$$\lim_{n\to\infty}\inf E\{y_{T\wedge n}-\gamma_{T\wedge n}\}\geqslant E(y_T-\gamma_T)$$

而$Ey_{T\wedge n}=Ey_T=Eu$，所以

$$E\gamma_T\geqslant\limsup_{n\to\infty}E\gamma_{T\wedge n}=V_1$$

引理 2 在假设A下，则停止规则$t\in C_1$是最优的，当且仅当$x_t=\gamma_t$a.s，且$t\leqslant k_0$.

证明 （略）见[2]。

令$k_T=\sup\{n\geqslant T: A_n=A_T\}$，考虑集合$A_m=[T=m]$，记$x_n^1=x_{m+n}$，$\mathscr{F}_n^1=\mathscr{F}_{m+n}$，$n=1,2,\cdots$，显然$\gamma_n^1=\gamma_{m+n}$，且$A_{n+1}^1-A_n^1=\gamma_n^1-E(\gamma_{n+1}^1|\mathscr{F}_n^1)$。上式中$A_n^1$表示相应于$(\gamma_n^1)$的Doob-Meyer分解中的可料增过程。于是

$$A_{n+1}^1-A_n^1=\gamma_{m+n}=E(\gamma_{m+n+1}|\mathscr{F}_{m+n})=A_{m+n+1}-A_{m+n}$$

因此在A_m上，

$$\begin{aligned}\sigma_T&=\inf\{n\geqslant m: x_n=\gamma_n\}=m+\inf\{k\geqslant0: x_{m+k}=\gamma_{m+k}\}\\&=m+\inf\{k\geqslant0: x_k^1=\gamma_k^1\}=m+\sigma_1^1\\K_T&=\sup\{n\geqslant m: A_n-A_m=0\}=m+\sup\{k\geqslant0: A_{m+k}-A_m=0\}\\&=m+\sup\{k\geqslant0: A_k^1=A_0^1\}=m+k_0^1\end{aligned}$$

这里σ_1^1与k_0^1分别表示相应于序列$\{x_n^1\}$的σ_1与k_0。由[2]可知，$\sigma_1^1\leqslant k_0^1$。因此，$\sigma_T\leqslant k_T$。于是当$k_0<\infty$a.s时，

$$\sigma_{k_0}\leqslant k_{k_0}=k_0$$

而由$\sigma_{k_0}=k_0+\sigma_1^1$，所以$k_0\leqslant\sigma_{k_0}$。这样$\sigma_{k_0}=k_0$，照$\sigma_{k_0}$之定义得

$$\gamma_{k_0}=x_{k_0}$$

从而得到：

引理 3 在A下，如$k_0<\infty$，则k_0是最大的最优停止规则。

引理 4 $\forall t\in\bar{C}_1$（或C_1），必存在严格正则的规则$t'\in\bar{C}$（或C_1），使得$t'\leqslant t$，$Ex_{t'}\geqslant Ex_t$；且当t非正则时，可取t'使得$Ex_{t'}>Ex_t$.

证明 归纳地定义

$$[t_1=n]=[t_1\geqslant n,t=n]\cup[t_1\geqslant n,t>n,E(x_t|\mathscr{F}_n)<x_n]\triangleq B_n\cup C_n$$

$$[t'=n]=[t'\geqslant n,t_1=n]\cup[t'\geqslant n,t_1>n,E(x_{t_1}|\mathscr{F}_n)\leqslant x_n]\triangleq D_n\cup E_n$$

显然$t'\leqslant t_1\leqslant t$，而

$$[t_1>n]=[t_1\geqslant n,t>n,E(x_t|\mathscr{F}_n)\geqslant x_n]$$

$$[t'>n]=[t'\geqslant n,t_1>n,E(x_{t_1}|\mathscr{F}_n)>x_n]$$

对任何$F\subset[t'>k],F\in\mathscr{F}_k,p(F)>0$.

$$\begin{aligned}Ex_{t'}I_F&=\sum_{k<n\leqslant\infty}Ex_nI_{FD_n}+Ex_nI_{FE_n}\\&\geqslant\sum_{k<n\leqslant\infty}Ex_{t_1}I_{FD_n}+Ex_{t_1}I_{FE_n}\\&\geqslant EI_Fx_{t_1}>EI_Fx_k\end{aligned}$$

因此 t' 是严格正则的。取 $k=0$，$F=\Omega$，得 $Ex_{t'}\geqslant Ex_{t_1}$. 类似地可证 $Ex_{t_1}I_F\geqslant Ex_tI_F$ 及 $Ex_{t_1}\geqslant Ex_t$，t_1是正则的。

设 t 非正则，于是存在$k\geqslant1$，使$p(t>k,t_1=k)>0$

$$\begin{aligned}Ex_{t_1}I_{[t_1=k]}&=Ex_{t_1}I_{B_k}+Ex_{t_1}I_{C_k}\\&>Ex_tI_{B_k}+Ex_tI_{C_k}\\&=Ex_tI_{[t_1=k]}\end{aligned}$$

从而 $Ex_{t'}\geqslant Ex_{t_1}>Ex_t$，$t'\in\bar{C}_1$，而当 $t\in C_1$ 时，显然 $t'\in C_1$.

定理 2 的证明 由引理 3，$k_0<\infty$是C_1中最大最优规则，而从引理 4 可知C_1中最优规则τ必是正则的。事实上，若τ非正则，则必存在$t'\in C_1$，使$Ex_{t'}>Ex_\tau$，它与τ的最优性矛盾。从而k_0正则。若它不是C_1中最大正则的，必存在C_1中正则规则t，使得$p(t>k_0)>0$，$k_0\leqslant t$. 于是

$$Ex_t=\sum_{n=1}^{\infty}Ex_tI_{[k_0=n]}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}Ex_nI_{[k_0=n]}=Ex_{k_0}$$

这表明k_0不是C_1中最大的最优规则。矛盾。

注：由[1]之定理 5（见(a)）可见，在A下$k_0<\infty$也是最小严格半最优规则。

值得注意的是，虽然由[1]之定理 4，在A下，在$\bar{C}_1$中必存在最大正则$\tau\in\bar{C}$，τ最优。而当$k_0<\infty$a.s成立时，由我们的定理 2，这个τ就是k_0. 然而如果没有$k_0<\infty$的条件，τ就不一定全是k_0了。

定理 3 在假设A下，σ_1是最大的严格正则的广义规则。

证明 在A下，σ_1最优，因而σ_1正则。如果它不是严格正则的，那么必存在n，$E\subset[\sigma>n,E(x_\sigma|\mathscr{F}_n)\leqslant x_n\}$，$P(E)>0$. 令

$$t'=I_E+I_{E^c}\sigma$$

于是$P(t'<\sigma)>0$，而

$$Ex_{t'}=\int_E x_n+\int_{E^c}x_\sigma\geqslant Ex_\sigma$$

于是t'是一个比σ更小的最优规则。矛盾。

若σ不是最大的广义严格正则的规则，那么必存在严格正则广义规则 t，$p(t>\sigma)>0$. 记$B=[t>\sigma]$，令$t'=I_Bt+I_{B^c}\sigma$，则

$$\begin{aligned}Ex_{t'}&=\int_Bx_t+\int_{B^c}x_\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B\cap[\sigma=n]}x_t+\int_{B^c}x_\sigma\\&>\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B\cap[\sigma=n]}x_n+\int_{B^c}x_\sigma=Ex_\sigma\end{aligned}$$

矛盾。

注：我们实际上证明了，在A下最小的最优规则必是最大的严格正则规则。

推论 1 在A下，$k_0<\infty$，若 t 正则且$\geqslant\sigma_1$，则必$\leqslant k_0$.

推论 2 在A下，$k_0<\infty$，若 t 半最优且$\leqslant k_0$，则必$\geqslant\sigma_1$.

以上推论可从结论(b)以及σ_1是最小最优，k_0是最大最优得出。

推论 3 在A下，若$\sigma_1\leqslant t\leqslant k_0<\infty$，则 t 正则等价于 t 是半最优。

推论 4 在A下，最优规则集

$$\bigcup=\{t\in\bar{C}_1,\ \sigma_1\leqslant t\leqslant k_0,\ t\text{正则或者}t\text{半最优}\}。$$

推论 5 在A下，C_1中最优规则唯一的充要条件是下面条件中任一个成立：

1）$\sigma_1=k_0<\infty$；

2）不存在比k_0小的半最优规则；

3）不存在比σ_1大的正则规则。

推论 6 在假设A下，如果一切半最优规则都是严格半最优规则或者一切正则规则都是严格正则规则，那么最优停止规则必唯一。

证明 若最优停止规则不唯一，也即存在最优规则t，使得$p(\sigma_1<t<k_0)>0$. t是C_1中最优规则必也是$\bar{C}_1$中最优规则（广义），因此它是半最优而且是正则的规则，在本推论的条件下，t就是严格半最优和严格正则的规则。但k_0是最小严格半最优，σ_1是最大严格正则的，这与$p(\sigma_1<t<k_0)>0$矛盾。

上述定理都将有助于最优停止及其唯一性的研究，因此去掉假设A的一般情形的研究以及$p(k_0=\infty)>0$的情形的研究是必要的。

参 考 文 献

［1］ Michael J Klass. Properties of Optimal Extended-Valued Stopping Rules for Sn/n. The Annale of Prob.1973,1(5):719～757

［2］ Kopp P E. Martingales and Stochastic Integrals. Cambridge university Press. 1984

［3］ Robbins H, Siegmund D; 周元燊译. 最优停止理论（中译本）. 上海科技出版社，1983

On the Character of the Smallest and Largest Optimal Generated Rule

Jin Zhiming

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

Assume that $(X_n,\mathscr{F}_n)_1^\infty$ is an adapted reward sequence, $(\gamma_n)_1^\infty$ is snell's envelope of X_n, (A_n) is a predictable increased process with $A_0=0$ in Doob-Meyer's decomposition of (γ_n). In this paper, from J. Klass, we prove that $\sigma_1=\inf\{k\geqslant 1:\ x_k\geqslant\gamma_k\}$ is the smallest semi-optimal and the largest strong regular generalized rule, and $k_0\subset\sup\{n\geqslant 0,\ A_n=0\}<\infty$ is the largest reqular generalized rule. Hence another expression of the uniqueness of optimal generalized rule is given.

Key words: random process, Markov process, optimization, optimal generalized rule, semi-optimal, strong reqular rule