国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期　1990年9月　Vol.12 No.3

一种新的运输问题对偶算法

李 登 峯*
（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文给出求解运输问题的一种新的方法——运输问题对偶算法（仍是表上作业法）。最后给出的实例说明本文算法在解决某些问题时比[1]中方法简便。

关键词　线性规划，运输模型，对偶理论，正则解，可行解，可增路

分类号　O221.1

在日常生活中的一些实际问题，如物资调运、作物布局、零件加工等等，都可归结为一类特殊类型的线性规划模型。这种模型最早是从物资调运问题产生出来的，故称为运输问题。运输问题的研究和应用对城乡建设，国民经济的发展，特别是国防经济的发展有着重要的现实意义。

运输问题的一般数学模型为：

$$\min f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{满足条件}\quad\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\qquad\text{(TP)}$$

不失一般性，本文只讨论平衡运输，即：$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$.

(TP)的对偶运输问题为：

$$\max z=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$$

$$\text{满足条件}\quad\begin{cases}u_i+v_j\leqslant c_{ij}\\ u_i,v_j\text{无符号限制}\\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\qquad\text{(DTP)}$$

问题(TP)可用表1表示。

1988年9月15日收稿
* 87级硕士研究生，现在海军大连舰艇学院工作

对于问题(TP)，当然可用[1][2]中方法求解。但为使运输问题理论更加完善和更方便地解决一些实际问题，如有容量限制的运输问题[1][3]，随机运输问题，本文提出一种对偶算法，在解决某些问题时比[1]中方法简单易行。

表 1

销地 运价 产地	B_1	B_2	…	B_n	产量
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	…	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	…	x_{2n} c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	…	x_{mn} c_{mn}	a_m
销　量	b_1	b_2	…	b_n	总量

1　基本概念

问题(TP)的一组基变量值是指(TP)基变量[1]的一组取值。

定义1　给定问题(TP)的一组基变量值$\{x_{ij}\}$，如果对某个i_0有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i_0 j} < a_{i_0}$$

则称$\{x_{ij}\}$在第i_0行不饱和；同样，如果对某个j_0有

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i j_0} < b_{j_0}$$

则称$\{x_{ij}\}$在第j_0列不饱和。

称$\{x_{ij}\}$是问题(TP)的一组不饱和基变量值是指：存在不饱和的行或不饱和的列。

定义2　运输问题表格上的格子(s, t)（相应于变量x_{st}，在不易混淆的情况下，我们互用这两个名称）称为第Ⅰ类奇异格子，记号为Δ，如果第s行是不饱和行，第t列是饱和列；同样，称(k, l)为第Ⅱ类奇异格子，记号为$*$，如果第k行是饱和行，第l列是不饱和列。

定义3　称运输表格上的一条路$P=\{x_{st}, x_{s_1t}, x_{s_1t_1}, \cdots, x_{kl_1}, x_{kl}\}$为可增路[3]，如果其满足下列条件：

(i) $x_{st}, x_{s_1t}, x_{s_1t_1}, \cdots, x_{kl_1}, x_{kl}$全是基变量；

(ii) 格子(s,t)是第Ⅰ类奇异格子，(k,l)是第Ⅱ类奇异格子，初始格子称为第1个格子，如此类推；

(iii) 格子(s,t)与(s_1,t)同列，(s_1,t)与(s_1,t_1)同行，余下类推。最后，(k,l_1)与(k,l)同行。

定义4[2]　在运输表格上对一条回路进行$\theta \geqslant 0$的调整时，如果某格子得到增量θ，则称该格子是接收元，反之，则称该格子是捐助元。

命题[1]　设$\{x_{ij}\}$是(TP)的正则解[1]，即是(DTP)的可行解，如果$\{x_{ij}\}$也是(TP)的可行解，则$\{x_{ij}\}$是(TP)的最优解。

证明　见文[1]。

下面一节将给出本文的算法。

2 正则解及对偶算法

基本思想：首先通过确定(DTP)的可行解来选取(TP)的基变量，然后取定一组基变量值；利用可增路（如果存在）进行调整，逐渐消除基变量值的不饱和性（即非正则性）；最后，保持正则性，逐渐消除不可行性，从而达到最优解。

按照上述思想，我们分下面几个阶段进行。

2.1 寻找(TP)基变量

在(TP)表格上，可按下列方式确定其相应的(DTP)的可行解。

选取任一列p，并令

$$u_i=c_{ip},\quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1}$$

对任意$j=1,2,\cdots,n$；但$j\neq p$，选取：

$$v_j=\min\{c_{ij}-u_i,\ i=1,2,\cdots,m\} \tag{2}$$

然后令

$$v_p=0 \tag{3}$$

对式(2)中取到极小值的所有i中，任取其中之一，记作$i_j(j=1,2,\cdots,n;$但$j\neq p)$，记指标集$\mathscr{B}=\{(i_j,j),j=1,2,\cdots,n$，且$j\neq p$；$(i,p),i=1,2,\cdots,m\}$，于是有下列结论：

定理 1 记$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)'$，$v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，其中$u_i(i=1,2,\cdots,m)$和$v_j(j=1,2,\cdots,n)$由式(1)到(3)所确定，则u,v是(DTP)的可行解。

证明 由u及v的构造，结论为显然。

定理 2 $\mathscr{B}$是问题(TP)的一组基变量指标集。

证明 由$\mathscr{B}$的选取易于看出：$\mathscr{B}$中元素相应的格子不构成回路且其元素个数恰好为$(n+m-1)$个，因此，$\mathscr{B}$中元素相应格子是独立的，从而定理得证。

由定理 2，$\mathscr{B}$中元素相应的变量就是(TP)的基变量。

2.2 (TP)基变量值的确定及其正则解的寻找

在取得基变量指标集$\mathscr{B}$之后，可按下列方式确定(TP)的一组基变量值。

对第1行，即$i=1$，设$(1,j)\in\mathscr{B}$，$j\in\bar{A}_1=\{j_1,j_2,\cdots,j_r\}$，令

$$\begin{aligned}
x_{1j_1}&=\min\{b_{j_1},a_1\}\\
x_{1j_2}&=\min\{b_{j_2},a_1-x_{1j_1}\}\\
&\vdots\\
x_{1j_r}&=\min\{b_{j_r},a_1-x_{1j_1}-x_{1j_2}-\cdots-x_{1j_{r-1}}\}
\end{aligned}$$

对第2行，即$i=2$，设$(2,j)\in\mathscr{B},j\in\bar{A}_2=\{l_1,l_2,\cdots,l_k\}$，令

$$\left.\begin{aligned}
x_{2l_1}&=\begin{cases}\min\{a_2,b_{l_1}\}, & \text{若} l_1\notin\bar{A}_1\\ \min\{a_2,b_{l_1}-x_{1l_1}\}, & \text{若} l_1\in\bar{A}_1\end{cases}\\
x_{2l_2}&=\begin{cases}\min\{a_2-x_{2l_1},b_{l_2}\}, & \text{若} l_2\notin\bar{A}_1\\ \min\{a_2-x_{2l_1},b_{l_2}-x_{1l_2}\}, & \text{若} l_2\in\bar{A}_1\end{cases}\\
&\vdots\\
x_{2l_k}&=\begin{cases}\min\{a_2-x_{2l_1}-\cdots-x_{2l_{k-1}},b_{l_k}\}, & \text{若} l_k\notin\bar{A}_1\\ \min\{a_2-x_{2l_1}-\cdots-x_{2l_{k-1}},b_{l_k}-x_{1l_k}\}, & \text{若} l_k\in\bar{A}_1\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

对于 $i=3,4,\cdots,m$，如此继续做下去，直到穷尽$\mathscr{B}$中的所有元素，并令所有非基变量 $x_{ij}=0$. 于是有下列结论：

定理 3 对于前面选定的基变量指标集 $\mathscr{B}$，利用式(4)确定(TP)的一组基变量值 $\{x_{ij}\}$，有下列结论成立：

(1) 如果(TP)存在对偶可行解，则$\{x_{ij}\}$至少有一行和一列饱和；

(2) 如果存在不饱和的行，则也存在不饱和的列。反之亦然；

(3) 如果所有行均饱和，则$\{x_{ij}\}$是(TP)的正则解（但不一定是可行解）。

证明 结论(1)由$\{x_{ij}\}$的构造及平衡运输条件可得；

结论(2)由平衡运输条件及定义1可得；

结论(3)由定理1、定理2及正则解定义[1]得证。

定理 4 设(TP)存在对偶可行解，并设$\{x_{ij}\}$是由式(4)确定的一组基变量值。如果$\{x_{ij}\}$是(TP)的不饱和基变量值，则必存在可增路。因此，若不存在可增路，则得到(TP)的正则解。

证明 由定义1、定理3及定义3可证。

定理 5 如果(TP)存在一条可增路$P=\{x_{st},x_{s_1t},x_{s_1t_1},\cdots,x_{kl_1},x_{kl}\}$，并令

$$\bar{x}_{ij}=\begin{cases}x_{ij}, & \text{格子}(i,j)\text{不在路}P\text{上}\\ x_{ij}+\theta, & (i,j)\text{是}P\text{上奇序号格子}\\ x_{ij}-\theta, & (i,j)\text{是}P\text{上偶序号格子}\end{cases} \tag{5}$$

其中$\theta=\min\{\theta_1,\theta_2\}$，且

$$\begin{cases}\theta_1=b_l-\sum\limits_{i:(i,l)\in\mathscr{B}}x_{il}\\ \theta_2=a_s-\sum\limits_{j:(s,j)\in\mathscr{B}}x_{sj}\end{cases} \tag{6}$$

则下面二个结论成立：

(1) $\{\bar{x}_{ij}\}$仍是关于$\mathscr{B}$的一组基变量值，且保持原来的行和列的饱和性；

(2) 如果$\theta_1>\theta_2$，则增加第 s 行为饱和行；如果$\theta_1<\theta_2$，则增加第 l 列为饱和列；如果$\theta_1=\theta_2$，则第 l 列和第 s 行同时变成饱和的列和饱和的行。

证明 由 θ 的选取及定义1和定义3，结论(1)和(2)立即可证。

定理 6 对(TP)的一组不饱和基变量值，利用定理5，经有限次调整必得(TP)的正则解。

证明 由定理3到定理5及行、列的有限性得证。

2.3 (TP)不可行解的调整[2]

假设$\{x_{ij}\}$是(TP)的正则解，但不可行。于是，任取 $x_{sk}<0$，记$N=\{(l,t)|$使存在除x_{lt}外全是基变量的回路且含x_{sk}，并要求(s,k)及(l,t)均为接收元$\}$。在N中取(l_0,t_0)使其相对成本 $\lambda_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$ 最小（若不止一个，可任取一个）。在含格子(s,k)及(l_0,t_0)为顶点的回路上进行调整，调整量为$\theta=-x_{sk}$，使得x_{sk}为非基变量，$x_{l_0t_0}$为基变量，从而得到一组新的基变量值$\{\bar{x}_{ij}\}$。于是有下列结论。

定理 7 设$\{x_{ij}\}$是(TP)的一组正则解，但不可行。如果$\{\bar{x}_{ij}\}$是按上述方式迭代而得的一组基变量值，则$\{\bar{x}_{ij}\}$仍是(TP)的正则解。

证明 由θ和进基、出基变量的选取得证。

2.4 (TP)的对偶算法

在上面的准备之后，下面就具体给出(TP)对偶算法的迭代步骤。

① 对(TP)，用式(1)到(3)的方法求出(DTP)的可行解u、v，并确定$\mathscr{B}$，转入②；

② 用(4)式确定(TP)的一组基变量值$\{x_{ij}\}$，转入③；

③ 如果$\{x_{ij}\}$是(TP)的饱和基变量值，这时$\{x_{ij}\}$是(TP)的正则解，转入⑤；否则，转入④；

④ 找出一条可增路P，用定理5中方法调整得到一组新的基变量值，仍记作$\{x_{ij}\}$，返回③；

⑤ 如果所有$x_{ij}\geqslant 0$，则$\{x_{ij}\}$是(TP)的可行解，从而是最优解，转入⑦；否则，转入⑥；

⑥ 任取$x_{sk}<0$，用定理7中方法（或见[2]）求出一组新的正则解$\{\bar{x}_{ij}\}$，并用[1中方法重新求出(DTP)的可行解$\bar{u},\bar{v}$. 用$\{\bar{x}_{ij}\}$，$\bar{u}$和$\bar{v}$代替$\{x_{ij}\}$，u,v并返回⑤；

⑦ 计算最优值$f^*=\min f$，停止。

定理 8 按照上述方式迭代有限次后必得到(TP)的最优解，从而本文算法有效。

证明 由定理1到定理7及命题易知结论成立。

3 算　　例

利用本文算法求解实例。

例 设有一运输问题如表2.

解 取$p=1$，用(1)～(4)式立即得最优表3，不需作任何调整。但用[1]中方法需作2次调整。在令$v_1=0$下，所得最优表与表3一致。最优值$f^*=63$.

表 2

运价＼销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	5	12	8
A_2	1	9	2	18	7
A_3	7	4	10	5	10
销量	7	6	8	4	20

表 3

u_i	c_{ij}＼v_j	B_1 (0)	B_2 (−3)	B_3 (1)	B_4 (−2)	产量
8	A_1	③ 3	+11 11	+1 5	+11 12	8
1	A_2	④ 1	+11 9	③ 2	+19 18	7
7	A_3	⓪ 7	⑥ 4	+2 10	④ 5	10
	销量	7	6	8	4	20

由上例可见，本文算法在解决某些问题时比[1]中方法简便，易于获得最优解，但是，本文算法也同运输问题的其它算法[1][2][3]一样，在解决某些问题时，仍显得不够理想，有待继续研究改进。

刘德铭教授审阅了全文，并提出宝贵意见，谨以致谢！

参 考 文 献

[1] 俞玉森主编．数学规划的原理和方法．武汉：华中工学院出版社，1985
[2] 李登峰．变量带上界的运输问题的一种新的对偶算法．系统工程，1989，(1)：54～58
[3] 陈庆华．有容量限制的运输问题．国防科技大学学报，1986，(3)：87～92

A New Dual Algorithm for the Transportation Problem

Li Dengfeng
(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

The paper gives a new method for solving the transportation problem-the dual algorithm for the transportation problem (on the table work). Finally, the author gives one examples which show that the algorithm is simpler for solving some problems than the method in [1].

Key words: linear programming, transportation model, duality theory, regular solution, feasible solution, incremental path

---

（上接第57页）

Abstract

In this paper, linear models with p variance components are considered and the explicit and easy computable expressions for Bayes invariant quadratic unbiased estimates (BAIQUE's) are presented. The class of BAIQUE's is proved to form the entire class of admissible invariant quadratic unbiased estimates. A necessary and sufficient condition for the existence of admissible nonegative definte quadratic unbiased estimates is given.

Key words: mathematical statistics, estimation theory, variance components, Bayes invariant quadratic unbiased estimation, admissibility, nonnegative estimation, elliptically contoured distribution