国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期　1990年9月　Vol.12 No.3

散度、旋度和梯度在共同模式上的统一定义及其在一般坐标系中的应用

徐　黎　平
（航天技术系）

摘　要　本文在推广的散度定理的基础上给出了散度、旋度和梯度与坐标无关的统一定义。着重在一般曲线坐标系中利用以三对坐标面为包容面的微元体为共同模式，把散度、旋度和梯度统一表示为某一微分量的极限值，从而直接导出了张量分析中这三种量的熟知的表达式。

关键词　张量分析，散度，梯度，旋度，统一定义
分类号　O183.2

在矢量场和标量场的微积分中，矢量场的散度、旋度以及标量场的梯度通常用两种方式定义，一种是作为哈尔米顿算子∇以某种乘积的形式与矢量函数或标量函数相作用的结果；另一种是作为矢量函数或标量函数在边界上的某种形式的积分量与边界所包容的范围之比值的极限。这两种定义方式都各有不足，前者没有明确表示出所定义的量的意义，并且关于算子∇的采用要依赖于具体选定的坐标系；后者则是在定义的形式上不够统一，不便于记忆和推广。本文从推广的散度定理出发，首先建立了散度、旋度和梯度与坐标系的选取无关的统一定义。根据这个定义，并利用一般曲线坐标系的微元面积、微元体积的表达式，在一个共同的模式上导出一般曲线坐标系中的散度、旋度和梯度的微分表达式

1　在共同模式上的统一定义

在标量场和矢量场的积分学中，有如下三个积分公式：

$$\oint\!\!\!\!\oint_{s} \boldsymbol{n} f dS = \iiint_{V_s} \nabla f dV \tag{1a}$$

$$\oint\!\!\!\!\oint_{s} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F} dS = \iiint_{V_s} \nabla\cdot\boldsymbol{F} dV \tag{1b}$$

1988年11月1日收稿

$$\oiint_S n \times F dS = \iiint_{V_s} \nabla \times F dV \tag{1c}$$

其中：S 为空间一简单闭曲面，V_s 为以 S 为边界的单连通区域，n 为 S 的外法线方向。

分析以上三个积分公式，可以发现这样一个规律：只要把单位法向矢量 n 换成算子 ∇，闭曲面 S 上的积分就变成区域 V_s 上的积分。还注意到微元面积矢量 ndS 可以写成 ds，这样，以上三个积分公式就统一表示为

$$\oiint_S ds * \Phi = \iiint_{V_s} \nabla * \Phi dv \tag{2}$$

这里，“ * ”是待定的乘积符号，Φ 是在区域 V_s 上足够光滑的某一矢量函数或标量函数。当“ * ”取点积，Φ 为一矢量函数，$\nabla \cdot \Phi$ 为散度；当“ * ”取叉积，Φ 也为一矢量函数，$\nabla \times \Phi$ 为旋度；当“ * ”为普通乘积，Φ 为一标量函数，$\nabla \Phi$ 表示梯度。

由于积分公式(1b)在场论中称为散度定理，我们把统一的积分公式(2)称为推广的散度定理。

设 d 是 V_s 相对于 V_s 中某一定点的当量直径，当 V_s 以任意方式收缩于该一定点时，由(2)式可以导出

$$\nabla * \Phi = \lim_{d \to 0} \frac{\oiint_S ds * \Phi}{V_s} \tag{3}$$

(3)式就是函数 Φ 在这一定点处的散度、旋度和梯度的与坐标无关的统一定义式。以上述讨论可以看出，通过这个定义，将张量分析中的这三个微分量很自然地融合成一个统一的封闭系统。它不仅形式上统一，简单易记，而且还不依赖于坐标系的选取，在物理和力学中都可以有各自的明确的物理意义。

为了能从公式(3)出发很方便地导出散度、旋度和梯度在一般曲线坐标系中的微分表达式，需要把定义式(3)写在一般曲线坐标系中的一个共同模式上。为此，选取一个与曲线坐标 $u^i(i=1,2,3)$ 相对应的以三对坐标面为包容面的特殊微元体。请注意，由于曲线坐标系 u^i 不是正交的，则相交于空间任一点的三个坐标面或三个坐标线也不一定正交。如图1所示，设微元体的体积是 ΔV，三对与 u^i 相对应的微元面积矢量表示为 ΔS^i 和 $\Delta S'^i(i=1,2,3)$，其中，ΔS^i 和 $\Delta S'^i$ 是相对的坐标面上的矢量面积元。在取极限的情况下，得到与(3)式完全等价的统一定义式为

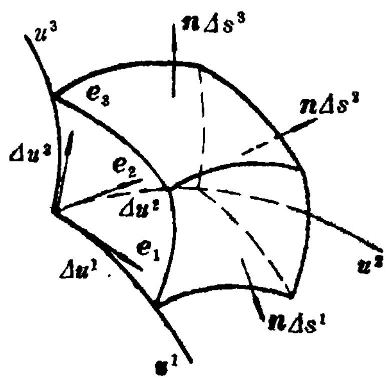

图1 一般坐标系中的微元体

$$\nabla * \Phi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum(\Delta S_i * \Phi)}{\Delta V} \tag{4}$$

式中，$\sum(\Delta S^i * \Phi)$ 是对包容 ΔV 的所有六个坐标面上的 $\Delta S^i * \Phi$ 求和，注意 ΔS^i 的方向

相对于微元体来说总是向外的。极限$\Delta V\to 0$应理解为体积ΔV以任意的方式收缩于ΔV中的某一定点。

(4)式就是在一般曲线坐标系中按照一个共同的模式导出的散度、旋度和梯度的统一定义式。后面，我们将按这个统一定义式推导出这三种量在一般曲线坐标系中的微分表达式。

2　一般曲线坐标系中的量

为在后面推导中引用方便，下面列出一般曲线坐标系中的一些要素及其关系式。

2.1　局部基、局部互易基、度量张量

局部基：$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$

局部互易基：$\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^3$

度量张量

$$(g_{ij})(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3\end{bmatrix}\tag{5}$$

用g表示度量张量矩阵的行列式，即$g=|g_{ij}|$，则有如下关系：

$$\begin{cases}\sqrt{g}=\boldsymbol{e}_i\cdot(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k)\\ 1/\sqrt{g}=\boldsymbol{e}^i\cdot(\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k)\end{cases}\quad(i,j,k\text{按}1,2,3\text{循环置换})\tag{6}$$

$$\begin{cases}\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}^i=\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k\\ \boldsymbol{e}_i/\sqrt{g}=\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k\end{cases}\quad(i,j,k\text{按}1,2,3\text{循环置换})\tag{7}$$

$$\partial\boldsymbol{e}_i/\partial u^j=\delta\boldsymbol{e}_j/\partial u^i\qquad(i,j=1,2,3)\tag{8}$$

这里，我们引入的基矢量$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$按$\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)>0$这样的次序构成右手系。

2.2　微元面积、微元体积

对应于图1所示的微元体，与坐标线u^i相对应的棱边的微元弧长矢量表示为

$$\Delta\boldsymbol{l}_i=\boldsymbol{e}_i\Delta u^i\ (\text{指定指标}i=1,2,3)\tag{9}$$

这样，与坐标面u^i相对应的沿u^i增加方向的微元面积矢量表示为

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{S}^1=\boldsymbol{e}_2\Delta u^2\times\boldsymbol{e}_3\Delta u^3=\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}^1\Delta u^2\Delta u^3\\ \Delta\boldsymbol{S}^2=\boldsymbol{e}_3\Delta u^3\times\boldsymbol{e}_1\Delta u^1=\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}^2\Delta u^3\Delta u^1\\ \Delta\boldsymbol{S}^3=\boldsymbol{e}_1\Delta u^1\times\boldsymbol{e}_2\Delta u^2=\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}^3\Delta u^1\Delta u^2\end{cases}\tag{10}$$

即

$$\Delta\boldsymbol{S}^i=\sqrt{g}\,\boldsymbol{e}^i\Delta u^j\Delta u^k\quad(i,j,k\text{按}1,2,3\text{循环置换})\tag{11}$$

很显然，$\Delta\boldsymbol{S}^i$与和它相对应的微元体表面的面积矢量$\Delta\boldsymbol{S}'^i$之间仅相差一个负号。

微元体积则给出为

$$\Delta V=\boldsymbol{e}_1\Delta u^1\cdot(\boldsymbol{e}_2\Delta u^2\times\boldsymbol{e}_3\Delta u^3)=\sqrt{g}\,\Delta u^1\Delta u^2\Delta u^3\tag{12}$$

2.3　曲线坐标系中的矢量

矢量$\boldsymbol{F}$可以在局部基和局部互易基上表示为

$$F=F^1e_1+F^2e_2+F^3e_3 \tag{13a}$$

$$F=F_1e^1+F_2e^2+F_3e^3 \tag{13b}$$

$$F_i=\sum_{j=1}^{3}g_{ij}F^j \qquad (i=1,2,3) \tag{14}$$

3 一般曲线坐标系中的散度、旋度和梯度

3.1 矢量函数的散度

由统一定义式(4)，矢量函数的散度为

$$\nabla\cdot F=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum(\Delta S^i\cdot F)}{\Delta V} \tag{15}$$

对应于图1的微元体模式，(15)式右边分子上的和式展开的结果为

$$\sum(\Delta S^i\cdot F)=(\sqrt{g}F^1)\Big|_{u^1}^{u^1+\Delta u^1}\Delta u^2\Delta u^3+(\sqrt{g}\,F^2)\Big|_{u^2}^{u^2+\Delta u^2}\Delta u^3\Delta u^1$$
$$+(\sqrt{g}\,F^3)\Big|_{u^3}^{u^3+\Delta u^3}\Delta u^1\Delta u^2$$

这里，采用了记法

$$(\sqrt{g}\,F^i)\Big|_{u^i}^{u^i+\Delta u^i}=(\sqrt{g}\,F^i)_{u^i+\Delta u^i}-(\sqrt{g}\,F^i)_{u^i}$$

由于$\Delta V=\sqrt{g}\,\Delta u^1\Delta u^2\Delta u^3$，并注意到

$$\lim_{\Delta u^i\to 0}\frac{(\sqrt{g}\,F^i)\Big|_{u^i}^{u^i+\Delta u^i}}{\Delta u^i}=\frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{g}\,F^i)\quad (i=1,2,3)$$

于是从(15)式得到

$$\nabla\cdot F=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,F^1)}{\partial u^1}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,F^2)}{\partial u^2}+\frac{\partial(\sqrt{g}\,F^3)}{\partial u^3}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{g}\,F^i) \tag{16}$$

表达式(16)正是张量分析中得到的一般曲线坐标系中的散度。

3.2 矢量函数的旋度

由统一定义式(4)，矢量函数的旋度为

$$\nabla\times F=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Sigma(\Delta S^i\times F)}{\Delta V} \tag{17}$$

仍采用图1表示的微元体，(17)式右边分子上的和式展开为

$$\sum(\Delta S^i\times F)=\sqrt{g}\,(e^1\times e^2F_2+e^1\times e^3F_3)\Big|_{u^1}^{u^1+\Delta u^1}\Delta u^2\Delta u^3$$
$$+\sqrt{g}\,(e^2\times e^1F_1+e^2\times e^3F_3)\Big|_{u^2}^{u^2+\Delta u^2}\Delta u^3\Delta u^1$$
$$+\sqrt{g}\,(e^3\times e^1F_1+e^3\times e^2F_2)\Big|_{u^3}^{u^3+\Delta u^3}\Delta u^1\Delta u^2$$
$$=(F_2e_3-F_3e_2)\Big|_{u^1}^{u^1+\Delta u^1}\Delta u^2\Delta u^3+(F_3e_1-F_1e_3)\Big|_{u^2}^{u^2+\Delta u^2}\Delta u^3\Delta u^1$$

$$+(F_1e_2-F_2e_1)\Big|_{u^3}^{u^3+\Delta u^3}\Delta u^1\Delta u_2$$

ΔV 为$\sqrt{g}\,\Delta u^1\Delta u^2\Delta u^3$，于是由(17)式得到

$$\nabla\times F=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(F_2e_3-F_3e_2)+\frac{\partial}{\partial u^2}(F_3e_1-F_1e_3)+\frac{\partial}{\partial u^3}(F_1e_2-F_2e_1)\right]$$

将上式中各偏微分展开，并注意$\frac{\partial e_i}{\partial u_j}$一般不为零以及(8)式所确定的关系，最后得到

$$\nabla\times F=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial u^2}-\frac{\partial F_2}{\partial u^3}\right)e_1+\left(\frac{\partial F_1}{\partial u^3}-\frac{\partial F_3}{\partial u^1}\right)e_2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial u^1}-\frac{\partial F_1}{\partial u^2}\right)e_3\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3}\\ F_1 & F_2 & F^3\end{vmatrix}\tag{18}$$

(18)式正是张量分析中得到的一般曲线坐标系中的旋度的表达式。

3.3 标量函数的梯度

由统一定义式(4)，标量函数的梯度为

$$\nabla f=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Sigma(\Delta S^i f)}{\Delta V}\tag{19}$$

采用与上述相同的模式，(19)式分子上的和式为

$$\Sigma(\Delta S^i f)=(\sqrt{g}\,e^1 f)\Big|_{u^1}^{u^1+\Delta u^1}\Delta u^2\Delta u^3+(\sqrt{g}\,e^2 f)\Big|_{u^2}^{u^2+\Delta u^2}\Delta u^3\Delta u^1$$
$$+(\sqrt{g}\,e^3 f)\Big|_{u^3}^{u^3+\Delta u^3}\Delta u^1\Delta u^2$$

由(19)式得：

$$\nabla f=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}(\sqrt{g}\,e^1 f)+\frac{\partial}{\partial u^2}(\sqrt{g}\,e^2 f)+\frac{\partial}{\partial u^3}(\sqrt{g}\,e^3 f)\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(\sqrt{g}\,e^i f)=\sum_{i=1}^{3}e^i\frac{\partial f}{\partial u^i}+\frac{f}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}(e_j\times e_k)$$
$$=\sum_{i=1}^{3}e^i\frac{\partial f}{\partial u^i}+\frac{f}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\left[e_i\times\left(\frac{\partial e_j}{\partial u^k}-\frac{\partial e_k}{\partial u^j}\right)\right]\tag{20}$$

上式中，i，j，k 按1,2,3循环置换。

由(8)式所确定的关系，$\frac{\partial e_j}{\partial u^k}=\frac{\partial e_k}{\partial u^j}$，于是，由(20)式得：

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{3}e^i\frac{\partial f}{\partial u^i}=e^1\frac{\partial f}{\partial u^1}+e^2\frac{\partial f}{\partial u^2}+e^3\frac{\partial f}{\partial u^3}\tag{21}$$

这正是一般曲线坐标系中梯度的表达式。

4 正交系中的形式

4.1 正交系的特点

对于正交曲线坐标系，常采用单位正交基$e_i^\circ(i=1,2,3)$，相应的度规系数为$h_i(i=1,2,3)$，且有

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}(h_1)^2 & 0 & 0\\ 0 & (h_2)^2 & 0\\ 0 & 0 & (h_3)^2\end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\sqrt{g}=h_1h_2h_3 \tag{23}$$

在单位正交基上，矢量函数F用物理分量表示为

$$F=\tilde{F}^1e_1^\circ+\tilde{F}^2e_2^\circ+\tilde{F}^3e_3^\circ \tag{24}$$

矢量函数的各种分量之间有如下关系：

$$\begin{cases}F^i=\dfrac{1}{h_i}\tilde{F}^i\\ F_i=h_i\tilde{F}^i\end{cases} \tag{25}$$

正交系各种基之间有如下关系：

$$\begin{cases}e_i=h_ie_i^\circ\\ e^i=\dfrac{1}{h_i}e_i^\circ\end{cases} \tag{26}$$

4.2 散度、旋度、梯度

根据正交系中上述关系，由(16)、(18)和(21)式，在正交系中散度、旋度和梯度为

$$\nabla\cdot F=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}\tilde{F}^i\right) \tag{27}$$

$$\nabla\times F=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1e_1^\circ & h_2e_2^\circ & h_3e_3^\circ\\ \dfrac{\partial}{\partial u^1} & \dfrac{\partial}{\partial u^2} & \dfrac{\partial}{\partial u^3}\\ h_1\tilde{F}^1 & h_2\tilde{F}^2 & h_3\tilde{F}^3\end{vmatrix} \tag{28}$$

$$\nabla f=\sum_{i=1}^{3}\frac{e_i^\circ}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u^i} \tag{29}$$

这些结果都是我们所熟知的。

参考文献

[1] Eutiquio C.Young, Vector and Tensor Analysis. Marcel Dekker, Inc.New York, 1978

[2] Tyldesley J R.An Introduction to Tensor Analysis. Bartholomew Press, Dorking, Surrey, 1975

[3] Wrede R C. Introduction to Vector and Tensor Analysis. Dover Publications, Inc., New York, 1972

[4] 戴振铎. 应用数学和力学, 1986,(1):2

Unified Definition of Divergence, Curl and Gradient Based on a Common Model and It's Application in a General Coordinate System

Xu Liping
(Department of Aerospace Technology)

Abstract

In this paper, the unified definition of divergence, curl and gradient independent of the coordinate system is given by the extended divergence theorem. Stressed on using a common model which is a volume element enclosed by the three pairs of coordinate surfaces, all the divergence, curl and gradient are denoted uniformly in the form of the limiting value of a differential quantity. So the known expressions of these three quantities in tensor analysis can be derived directly.

Key words: tensor analysis, divergence, gradient, curl, unified definition

（上接第78页）

A Fast Computer Algorithm for Matrix Transposing

Zou Qingyun　Huang Xinmin
(Department of Applied Mathematics and System Engineering)
Zhao Ling
(Department of Automatical Control)

Abstract

A new fast computer algorithm for the transposing of an $n \times n$ data matrix, which requires more internal storage than the available to a certain computer, is given in this paper. The required computation time is much less than the conventional algorithm.

Key words: matrix, algorithm, record, transpose, internal storage, block