

三角形网格上的 C^1 有理插值

方 逵

(系统工程与应用数学系)

摘 要 本文描述了一种用线性算子的组合插值新方法。较之已往方法,插值函数结构简单,易于计算。并且估计了插值函数的误差,误差阶是 $O(h^4)$,比[4]中的误差阶高2。

关键词 函数,内插法,线性化,算子,奇点,线性泰勒算子,曲面插值函数

分类号 O174.42

计算机辅助几何设计中引入了曲线、曲面的插值与逼近,对于定义在多边形区域上的曲面,一种有效的方法是在区域三角网格化后的每一个小三角形的三条边上插值,得到三角形上的曲面插值函数。而每相邻两个曲面插值函数是 C^1 连续的[1]。这种插值逼近且有局部限制逼近,充分光滑和一定的代数精度集,一定程度上提供了原函数的可靠放样。

70年代,三角域上的插值与逼近主要限于标准三角形上[2],但实际给定是任意三角形。因此存在一个任意三角形到标准三角形的仿射变换。由于变换后边界上的法方向发生偏移[3],因而导致构造 C^1 连续的复合曲面复杂化。本文用两个一次线性泰勒算子的组合构造了结构简单的 C^1 有理插值函数,该函数在微机上的计算量仅仅是文[1][4]的一半,而误差阶是 $O(h^4)$,比文[4]中的误差阶高2。

1 任意三角形上的 C^1 有理插值方法

设任意三角形 ABC 为 T ,它的边界为 ∂T , BC 为最长边,建立坐标系如图1。

令

$$x_0 = |OA|, y_1 = |OB|, y_2 = -|OC|$$

$$n = n(y)$$

$$= x_0(1 - y/y_j) \quad j = \begin{cases} 1 & y \geq 0 \\ 2 & y < 0 \end{cases}$$

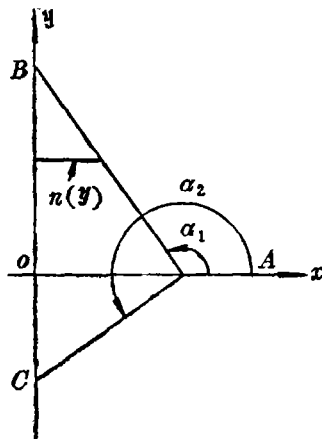


图 1

记

$$F_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} F}{\partial x^i \partial y^j}$$

首先我们定义两个一次线性泰勒算子

$$L_0 F(x, y) = F(0, y) + xF_{10}(0, y)$$

$$L_1 F(x, y) = F(x, 0) + yF_{01}(x, 0)$$

由 L_0, L_1 作布尔和得

$$\begin{aligned} P_1 F(x, y) &= (L_0 \oplus L_1) F(x, y) \\ &= F(0, y) + F(x, 0) + x(F_{10}(0, y) - F_{10}(0, 0)) \\ &\quad + y(F_{01}(x, 0) - F_{01}(0, 0)) - xyF_{11}(0, 0) - F(0, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

易验证

$$\begin{cases} P_1 F|_{BC \cup OA} = F|_{BC \cap OA} \\ \frac{\partial P_1 F}{\partial x} \Big|_{BC \cup OA} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{BC \cup OA}, \quad \frac{\partial P_1 F}{\partial y} \Big|_{BC \cup OA} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{BC \cup OA} \end{cases} \quad (2)$$

接下来定义线性泰勒算子 P_2

$$P_2 F(x, y) = F(n, y) + (x - n)F_{10}(n, y) \quad (3)$$

显然 $P_2 F(x, y)$, $\partial P_2 F(x, y)/\partial x$ 在 T 上 C^1 连续, 且 $P_2 F(x, y)$ 在 $AB \cup AC$ 上插值 F 及 F 的一阶偏导数, 即

$$\begin{cases} P_2 F(x, y)|_{AB \cup AC} = F(x, y)|_{AB \cup AC} \\ \frac{\partial P_2 F(x, y)}{\partial x} \Big|_{AB \cup AC} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \Big|_{AB \cup AC} \\ \frac{\partial P_2 F(x, y)}{\partial y} \Big|_{AB \cup AC} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \Big|_{AB \cup AC} \end{cases} \quad (4)$$

由于 dn/dy 在 OA 上不连续, 使 $\partial P_2 F/\partial y$ 在 OA 上不连续。但我们定义一个 $P_1 F_1$, $P_2 F$ 的凸组合形式的插值函数 $G(x, y)$, $G(x, y)$ 不但在 $\partial T \cup OA$ 上插值 F 及 F 的一阶偏导数, 而且 $G(x, y) \in C^1(T)$ 。

令

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \frac{(x - n)^2}{(xy)^2 + (x - n)^2}, \quad \beta(x, y) = 1 - \alpha(x, y) \\ G(x, y) &= \alpha(x, y)P_1 F(x, y) + \beta(x, y)P_2 F(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

首先我们证明 $G(x, y) \in C^1(T)$ 。

从式(5)及 $P_1 F(x, y)$, $P_2 F(x, y)$ 的性质知, OA 上的点是 $G_{01}(x, y)$ 的间断点, $(x_0, 0)$, $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ 是 $G(x, y)$, $G_{10}(x, y)$, $G_{01}(x, y)$ 的奇点。但 $P_1 F(x, y)$, $P_2 F(x, y)$, $\partial P_1 F(x, y)/\partial x$, $\partial P_1 F(x, y)/\partial y$, $\partial P_2 F(x, y)/\partial x$ 都是 T 上的连续函数。综上知, 要证明 $G(x, y) \in C^1(T)$, 只需证以上出现的奇点和间断点都是可去的。

第一步证明奇点是可去奇点, 令

$$\begin{aligned} L(x, y) &= P_2 F(x, y) - P_1 F(x, y) \\ M(x, y) &= L_{10}(x, y), \quad N(x, y) = L_{01}(x, y) \end{aligned}$$

则

$$G(x, y) = P_1 F(x, y) + \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} L(x, y) \quad (6)$$

$$G_{10}(x, y) = \partial P_1 F(x, y) / \partial x + \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} M(x, y) - \frac{2nx(x-n)^2 y}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} L(x, y) \quad (7)$$

$$G_{01}(x, y) = \partial P_1 F(x, y) / \partial y + \frac{(x-n)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} N(x, y) - \frac{2x^2 y(x-n)^2 - 2x^2 y^2(x-n) \frac{x_0}{y_j}}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} L(x, y) \quad (8)$$

由式(2)知

$$\begin{cases} P_1 F|_E = P_2 F|_E = F|_E \\ \partial P_1 F / \partial x|_E = \partial P_2 F / \partial x|_E = \partial F / \partial x|_E \\ \partial P_1 F / \partial y|_E = \partial P_2 F / \partial y|_E = \partial F / \partial y|_E \end{cases} \quad (9)$$

其中 $E = \{A, B, C\}$.

将 L, M, N 在 A, B, C 三点按泰勒公式展开得 (参见[5]).

$$\begin{aligned} L(x, y) &= O(x^2) + O(x(y-y_j)) + O((y-y_j)^2) \\ &= O(x^2) + O(x(y-y_j)) + O(n^2) \\ &= O(x)^2 + O(x(y-y_j)) + O((x-n)^2) + O(x(x-n)) \end{aligned} \quad (10)$$

或

$$L(x, y) = O(y^2) + O((x-n)^2) + O(y(x-x_0)) + O(y(x-n)) \quad (11)$$

$$M(x, y) = O(x) + O(y-y_j) \quad (12)$$

或

$$M(x, y) = O(x) + O(x-x_0) \quad (13)$$

$$N(x, y) = O(x) + O(y-y_j) \quad (14)$$

或

$$N(x, y) = O(y) + O(x-x_0) \quad (15)$$

下面仅以 $A(x_0, 0)$ 为例证明是可去奇点。

将(11), (13), (15)式代入(6), (7), (8)式得

$$G(x, y) = P_1 F(x, y) + O(y)^2 + O(y(x-x_0)) + O((x-x_0)^2) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} G_{10}(x, y) &= \partial P_1 F(x, y) / \partial x + O(y) + O(x-x_0) \\ &\quad - \frac{2xn(x-n)y^2}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} [O(y^2) + O(y(x-x_0)) + O(y(x-n)) + O((x-n)^2)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_{01}(x, y) &= \partial P_1 F(x, y) / \partial y + O(x) + O(y-y_j) - \frac{2xy(x-n)^2 - 2x^2 y^2(x-n) \frac{x_0}{y_j}}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} \\ &\quad \cdot [O(y^2) + O((x-n)^2) + O(y(x-x_0)) + O(y(x-n))] \end{aligned} \quad (18)$$

化简(17), (18)式得

$$G_{10}(x, y) = \partial P_1 F / \partial x + O(y) + O(x - x_0) + O(x - n) \quad (19)$$

$$G_{01}(x, y) = \partial P_1 F / \partial y + O(y) + O(x - x_0) + O(x - n) \quad (20)$$

对(17), (19), (20)式取极限得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} G(x, y) = F(x_0, 0)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} G_{10}(x, y) = F_{10}(x_0, 0), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 0)} G_{01}(x, y) = F_{01}(x_0, 0)$$

只要重新定义 $G(x, y)$, $G_{10}(x, y)$, $G_{01}(x, y)$ 在 A 点的值。则证明了 A 是可去奇点。

接下来证明 OA 上的所有点是 $G_{01}(x, y)$ 的可去间断。因 A 是可去奇点, 自然 A 是可去间断点。因此我们限定讨论的区间为 $x \in [0, x_0)$ 。

因

$$G_{01}(x, y) = \frac{-2yx^2(x-n)^2}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} P_1 F(x, y) + \frac{(x-n)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} \frac{\partial P_1 F}{\partial y} \\ + \frac{2yx^2(x-n)^2}{((xy)^2 + (x-n)^2)^2} P_2 F(x, y) + \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} \frac{\partial P_2 F}{\partial y} \quad (21)$$

又

$$\frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} \frac{\partial P_2 F}{\partial y} = \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} \left(\frac{F_{20}(n, y)x_0}{y} + F_{11}(n, y) \right)$$

因 $F \in C^2(T)$, 则 $F_{20}(n, y)$, $F_{11}(n, y)$ 在 T 上是有界函数, 故 $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} \cdot \frac{\partial P_2 F}{\partial y}$

$= 0$, 对(21)式两边取极限得:

$$\lim_{v \rightarrow 0} G_{01}(x, y) = F_{01}(x, 0)$$

重新定义 $G_{01}(x, y)|_{v=0} = F_{01}(x, 0)$, 结合(21)式, 我们有

$$G_{01}(x, y)|_{OA} = F_{01}(x, 0)|_{OA} \quad (22)$$

这样我们证明了 $G_{01}(x, y)$ 在 OA 上是连续的, 综上所述我们有 $G(x, y) \in C^1(T)$ 。

由(2), (3), (5), (22)式易验证

$$\begin{cases} G(x, y)|_{\partial T \cup OA} = F(x, y)|_{\partial T \cup OA} \\ G_{10}(x, y)|_{\partial T \cup OA} = \partial F(x, y)/\partial x|_{\partial T \cup OA} \\ G_{01}(x, y)|_{\partial T \cup OA} = \partial F(x, y)/\partial y|_{\partial T \cup OA} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} G(x, y)|_{\partial T \cup OA} = F(x, y)|_{\partial T \cup OA} \\ G_{01}(x, y)|_{OA} = F_{01}(x, y)|_{OA}, \quad G_{10}(x, y)|_{OA} = F_{10}(x, y)|_{OA} \\ \partial G(x, y)/\partial n|_{\partial T} = \partial F(x, y)/\partial n|_{\partial T} \end{cases}$$

其中 n 表示 ∂T 上的法向矢。

于是我们有如下的定理。

定理 1 设 $F \in C^2(T)$, 则插值函数 $G(x, y) \in C^1(T)$, $G(x, y)$ 沿 ∂T 插值 F 及 F 的一阶法向导数, 且 $G(x, y)$ 在 T 内部 OA 上插值 F 及 F 的一阶偏导数。

2 误差估计

设 $G(x, y)$ 逼近 $F(x, y)$ 的误差为 $E(x, y)$, 则

$$E(x, y) = \left| \frac{(x-n)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} (F(x, y) - P_1 F(x, y)) + \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} (F(x, y) - P_2 F(x, y)) \right| = \left| \frac{(x-n)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} (I - L_0)(I - L_1) F(x, y) + \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-n)^2} (F(x, y) - P_2 F(x, y)) \right|$$

其中 I 为单位算子 ($IF = F$).

由泰勒余式知

$$\begin{aligned} (I - L_0)(I - L_1)F &= (I - L_1) \int_0^y \frac{\partial^2 F(x, v)}{\partial v^2} (v - y) dv \\ &= \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^4 F(u, v)}{\partial u^2 \partial v^2} (u - x)(v - y) dudv \\ &= \frac{x^2 y^2}{4} F_{22}(\theta_1 x, \theta_2 y) \end{aligned} \quad (24)$$

而

$$F(x, y) - P_2 F(x, y) = (x - n)^2 F_{20}(\theta_3 n, y) \quad (25)$$

这里

$$0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$$

将(24), (25)式代入 $E(x, y)$ 得

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \left| \frac{x^2 y^2 (x - n)^2}{(xy)^2 + (x - n)^2} \frac{F_{22}(\theta_1 x, \theta_2 y)}{4} + \frac{(x - n)^2 x^2 y^2}{(xy)^2 + (x - n)^2} \frac{F_{20}(\theta_3 n, y)}{2} \right| \\ &\leq \frac{x^2 y^2}{2} M \leq \frac{M}{32} h^4 \end{aligned}$$

其中

$$M = \max \left\{ \max_{(x, y) \in T} F_{22}(x, y), \max_{(x, y) \in T} F_{20}(x, y) \right\}$$

$$h = \max \{x_0, y_1, |y_2|\}$$

定理 2 设 $F(x, y) \in C^4(T)$, 则

$$|G(x, y) - F(x, y)| \leq \frac{M}{32} h^4$$

其中

$$M = \max \left\{ \max_{(x, y) \in T} F_{22}(x, y), \max_{(x, y) \in T} F_{20}(x, y) \right\}, h = \max \{x_0, y_1, |y_2|\}$$

例 1 设 $F(x, y) = \sin(2\pi x^2 y^2)$

$$A = (0.5, 0), B = (0, 0.4), C = (0, -0.4)$$

用平行于 x, y 轴的平行线将 $\triangle ABC$ 分成 81 个网格, 在 IBM-PC 机上, 我们计算了插值函数 $G(x, y)$ 在所有网格点上的值, 计算总时间是 [2][4] 的一半。计算结果与误差估计式(24)相吻合。

3 三角网格上的 C^1 有理插值曲面函数

前面讨论的是每一个小三角形上的插值函数在其局部坐标系下的表示, 而整个三角形网格上的曲面插值函数必须在同一坐标系下表示。因此每一个三角形上的插值函数作一坐标平移和旋转可得到同一坐标系下的统一表示。而在同一坐标系下, 每相邻两三角形上的插值函数是 C^1 连续的^[4], 从而得到在三角形网格上的整个曲面插值函数是 C^1 连续的。

参 考 文 献

- [1] 方遼. 国防科技大学学报, 1989, 11(2): 11~18
- [2] Barnhill R E, Birkhoff G, Gordon W J. J. Approx. Theory, 1973, 15(1): 33
- [3] Klulemicz M. Computer Graphics, 1983, 17(8): 92
- [4] 方遼, 程正兴. 工程数学学报, 1987, 4(2): 59~68
- [5] 方遼. 数学的认识与实践, 1990, (4)

C^1 Rational Interpolation over Triangular Grid

Fang Kui

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

This paper describes a new interpolation method with the convex combination of two operators, the interpolation function is simple to construct and easy to calculate, and the error of interpolation functions is estimated. The error order is $O(h^4)$, which is better than that of [4].

Key words: function, interpolation, linearization, operator, singularity, linear Taylor's operator, interpolation function of surface

(上接第97页)

$$(2) \text{Supp}\{s(S(p, \alpha))J\} = \text{EHs}(S(p, \alpha)) \left(0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \right).$$

where J is a continuous linear functional on \mathcal{A} which does not have the form $J(h) = \sum_{n=0}^p A_n h^{(n)}(0)$ for each h belonging to \mathcal{A} .

Key words: function, complex variables, extreme value, p -valent starlike, convex function, close-to-convex functions, extreme point, support points