国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第3期　1990年9月　Vol.12 No.3

几类特殊多叶函数的极值点和支撑点

朱 健 民
（系统工程与应用数学系）

摘　要　设$S(p,\alpha)$、$C(p,\alpha)$及$K(p,\alpha)$分别表示α阶的p叶星像、凸像和近于凸函数族。本文对这些函数族的支撑点和$S(p,\alpha)$的从属函数族的极值点和支撑点进行了研究，推广了Grassmann和Perera等人的结果。

关键词　函数，复变量，极值，p叶星像，凸像，近于凸函数，极值点，支撑点
分类号　O174.51

函数族$S(p,\alpha)$、$C(p,\alpha)$和$K(p,\alpha)$的意义由[1]给出，Perera等人研究了这些函数族的闭凸包和极值点，但尚无人对其支撑点进行研究，本文将刻画它们的支撑点及其相关函数族的极值点和支撑点。

对周知的概念，我们未给出定义，它们均可在[2]中查到。为叙述方便，我们引进一些记号。设$\mathscr{A}$为单位圆盘$U=\{|z|<1\}$上解析函数的全体，对$\mathscr{A}$的紧子集$\mathscr{F}$，E$\mathscr{F}$和Supp$\mathscr{F}$分别表示$\mathscr{F}$的极值点和支撑点的集合，H$\mathscr{F}$表示$\mathscr{F}$的闭凸包。对$\mathscr{A}$中的f和g，f从属于g记为$f\prec g$，而$\mathscr{F}$的从属函数族定义为$s(\mathscr{F})=\{f,\exists g\in\mathscr{F}: f\prec g\}$。

1　S(p,α)、C(p,α)及K(p,α)的支撑点

设$f\in S(p,\ \alpha)$，由[1]知存在$g\in S(1,\ \alpha)=S_t(\alpha)$使$f(z)=[g(z)]^p$. 反之，若$g\in S_t(\alpha)$，则由定义知$f(z)=[g(z)]^p\in S(p,\ \alpha)$。由此，变换$T: S_t(\alpha)\to S(p,\ \alpha)$，$T(g)=[g]^p$，为一对一的。

定理 1　设J为$S(p,\alpha)$上的连续泛函，在$g_0\in S(p,\alpha)$处Fréchet可微，Fréchet微分$I(g_0,\cdot)$不具有

$$I(g_0,h)=\sum_{n=0}^{p}A_nh^{(n)}(0),\qquad h\in\mathscr{A}\tag{1}$$

式中$A_n(n=1,\cdots,p)$为复常数。若

$$\mathrm{Re}J(g_0)=\max\{\mathrm{Re}J(g),\ g\in S(p,\alpha)\}$$

则g_0有

$$g_0(z)=z^p\Big/\prod_{j=1}^{m}(1-x_jz)^{2p(1-\alpha)t_j}\tag{2}$$

1988年12月16日收稿

此处$|x_j|=1$，$t_j>0$，$\sum_{j=1}^{m} t_j=1$.

证明　对前面给出的变换T，令$f_0=T^{-1}(g_0)$，定义$J_1=J\circ T$，则

$$\mathrm{Re}J_1(f_0)=\max\{\mathrm{Re}J_1(f),\ f\in S_t(\alpha)\}$$

显然J_1为$S_t(\alpha)$上的连续泛函，易证J_1在f_0处Fréchet可微，其微分为$I_1(f_0,h)=pI(g_0,h\cdot f_0^{p-1})$。另外，$I_1(f_0,h)$不具有形式$I_1(f_0,h)=Ah(0)+Bh'(0)$，$h\in\mathscr{A}$. 若不然，取

$$h(z)=\left[\frac{z}{f_0(z)}\right]^p z^n f_0(z),\quad n\text{ 为正整数}$$

显然，$h\in\mathscr{A}$，而

$$0=I_1(f_0,h)=pI(g_0,z^{n+p})$$

这说明$I(g_0,\cdot)$具有式(1)，矛盾。因此由[3]知

$$f_0(z)=z\Big/\prod_{j=1}^{m}(1-x_jz)^{2(1-\alpha)t_j}$$

所以g_0一定有式(2)。

定理 2　$\mathrm{Supp}S(p,\alpha)=\mathrm{EH}S(p,\alpha)=\{z^p/(1-xz)^{2(1-\alpha)p},\ |x|=1\}$

由定理1和[1]可以证明此定理，所用方法是常规的，证明从略。

推论 1　$\mathrm{Supp}\,C(p,\alpha)=\mathrm{EH}C(p,\alpha)=\left\{\int_0^z pt^{p-1}dt/(1-xt)^{2(1-\alpha)p},\ |x|=1\right\}$

下面我们讨论$K(p,\alpha)$的支撑点，为此需要

引理 1　令

$$Q(p,\varepsilon)=\{f,f\in\mathscr{A},\ f(0)=p,\ \mathrm{Re}\varepsilon f(z)>0,\ z\in U\}$$

$(p>0,|\varepsilon|=1,|\arg\varepsilon|<\pi/2)$.则有

(i) 设J为$\mathscr{A}$上的连续线性泛函，$\mathrm{Re}J$于$Q(p,\varepsilon)$上为常数当且仅当$J(h)=ah(0)$，其中$h\in\mathscr{A}$，a为复常数。

(ii) $\mathrm{Supp}Q(p,\varepsilon)=\left\{p\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1+\varepsilon^{-2}x_iz}{1-x_iz},\ |x_i|=1,\lambda_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,n\geqslant1\right\}$

证明　(i) 易知，$f\in Q(p,\varepsilon)$当且仅当

$$f\prec p\cdot\frac{1+\varepsilon^{-2}z}{1-z}$$

而

$$\frac{1+\varepsilon^{-2}z}{1-z}=\frac{1+\varepsilon^{-2}}{2}\ \frac{1+z}{1-z}+\frac{1-\varepsilon^{-2}}{2}$$

因此，算子L：$\mathscr{P}\to Q(p,\varepsilon)$　　($\mathscr{P}$为正实部函数族)

$$L(f)=p\left(\frac{1+\varepsilon^{-2}}{2}f+\frac{1-\varepsilon^{-2}}{2}\right)$$

为线性同胚。设$\{b_n\}$为连续线性泛函J的生成序列，且$\mathrm{Re}J$在$Q(p,\varepsilon)$为常数，由于$f(z)=1+xz^n(|x|=1,n\geqslant1)$在$\mathscr{P}$中，所以

$$L(f)=p+p\cdot\frac{1+\varepsilon^{-2}}{2}xz^n\in Q(p,\varepsilon)$$

于是 $\mathrm{Re}\,J(f)=\mathrm{Re}\left(pb_0+p\frac{1+\varepsilon^{-2}}{2}xb_n\right)$对任何$x$：$|x|=1$为常数，而这仅当 $b_n=0$ 才成为可能。因此，当$n\geqslant1$时$b_n=0$，亦即 $J(h)=b_0h(0)$，$\forall h\in\mathscr{A}$.

（ii）由于$L(\mathscr{P})=Q(p,\varepsilon)$，所以

$$\mathrm{Supp}Q(p,\varepsilon)=L(\mathrm{Supp}\mathscr{P})$$

熟知

$$\mathrm{Supp}\mathscr{P}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1+x_iz}{1-x_iz},\ |x_i|=1,\ \lambda_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,n\geqslant1\right]$$

由此(ii)便得证。

定理 3 $\mathrm{Supp}\,K(p,\alpha)\subset\mathrm{EH}\,K(p,\alpha)$

$$=\left\{\int_0^z\frac{pt^{p-1}(1-yt)}{(1-xt)^{2p(1-\alpha)+1}}dt,\ |x|=|y|=1,\ x\neq y\right\}$$

证明 设$f_0\in\mathrm{Supp}\,K(p,\alpha)$，仿照[4]的方法可以证明$f_0$一定具有

$$f_0'(z)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{pz^{p-1}(1-y_iz)}{(1-x_iz)^{2p(1-\alpha)+1}}\tag{3}$$

另一方面，$zf_0'(z)=g_0(z)h_0(z)$，其中 $g_0\in S(p,\alpha)$，$h_0\in Q(p,\varepsilon)$（引理1中定义）。下面我们证明$g_0(z)$与$h_0(z)$分别有

$$g_0(z)=z^p/(1-xz)^{2(1-\alpha)p},\quad |x|=1\tag{4}$$

$$h_0(z)=p\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1+\varepsilon^{-2}x_iz}{1-x_iz},\ |x_i|=1,\ \lambda_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\tag{5}$$

若 g_0 不具有式(4)，则 $g_0^{1/p}(\in S_t(\alpha))$不具有形式 $z/(1-xz)^{2(1-\alpha)}$，由[5]知存在$\varepsilon>0$及$M>0$使

$$|g_0(z)|<[M/(1-|z|)^{2(1-\alpha)-\varepsilon}]^p,\quad z\in U$$

又因存在$N>0$使

$$|h_0(z)|<N/(1-|z|),\quad z\in U$$

故有

$$|f_0'(z)|<M^pN/(1-|z|)^{p[2(1-\alpha)-\varepsilon]+1},\quad z\in U,\tag{6}$$

但在(3)式中令$z\to-\bar{x}_i(\lambda_i>0)$知$f_0'(z)$不满足(6)式，因此$g_0$一定有式(4)。

设J为与f_0相关的连续线性泛函，它由序列$\{b_n\}$生成。作泛函J'，其生成序列为$\left\{\frac{1}{n}b_n\right\}\left(n=0\text{时，令}\frac{1}{n}b_n=0\right)$，则

$$\mathrm{Re}J(f_0)=\mathrm{Re}J'(zf_0')=\mathrm{Re}J'(g_0h_0)$$
$$=\max\{\mathrm{Re}J'(g_0h),h\in Q(p,\varepsilon)\}$$

令$L(h)=J'(g_0h)$，则L可延拓成$\mathscr{A}$上的连续线性泛函，且使

$$\mathrm{Re}L(h_0)=\max\{\mathrm{Re}L(h),h\in Q(p,\varepsilon)\}$$

由引理1的(i)可以证明 ReL 在 $Q(\varepsilon,p)$ 上非常数，因此 $h_0\in\mathrm{Supp}Q(p,\varepsilon)$，由引理1的(ii)知$h_0$一定具有式(5)。于是，由式(4)、(5)有

$$f_0'(z)=\frac{pz^{p-1}}{(1-xz)^{2(1-\alpha)p}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1+\varepsilon^{-2}x_iz}{1-x_iz} \tag{7}$$

$|x_i|=|x|=1$，$\lambda_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

将式(7)与式(3)比较知$f_0'(z)$一定有

$$f_0'(z)=\frac{pz^{p-1}(1-yz)}{(1-xz)^{2p(1-\alpha)+1}},\quad |x|=|y|=1,\quad x\neq y$$

这便证明了 $f_0\in\mathrm{EH}K(p,\alpha)$.

当$p=1,\alpha=0$时，上述定理即为 Grassmann 等人在[4]中的结果，但我们这里不能完全沿用他们的方法。

2 s(S(p,α))的极值点和支撑点

Perera 等人在[6]中研究了$s(S_t(\alpha))$的极值点和支撑点，以下我们对 $S(p,\alpha)$建立相应的定理。在此之前我们给出

引理 2 设$a>0$，$\mathscr{F}_a$表示形如

$$f(z)=\int_R\frac{x}{(1-yz)^a}d\mu(x,y)$$

的 f 之全体，其中$R=\{|x|=1\}\times\{|y|=1\}$，$\mu$为$R$上的概率测度。若$f\in\mathscr{F}_p,g\in\mathscr{F}_q$，则当$p+q\geqslant 1$时，$fg\in\mathscr{F}_{p+q}$.

证明是简单的，从略。

定理 4 当$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$\mathrm{H}s(S(p,\alpha))=\left\{\iint_R\frac{xz^p}{(1-yz)^{2p(1-\alpha)}}d\mu(x,y),\ \mu\text{ 为}R\text{ 上的概率测度}\right\}\triangleq\mathscr{F}$$

$$\mathrm{EH}s(S(p,\alpha))=\left\{\frac{xz^p}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}},\ |x|=|y|=1\right\}$$

证明 首先注意到对 $f\in s(S(p,\alpha))$，存在 $g\in S(p,\alpha)$使 $f\prec g$. 而$g=[g_1]^p$，$g_1\in S_t(\alpha)$，令$f=[f_1]^p$，则$f_1\prec g_1$，即 $f_1\in s(S_t(\alpha))$。由[6]及引理2易知 $\mathrm{H}s(S(p,\alpha))=\mathscr{F}$.

欲证第二个等式，我们只需证明

$$\left\{\frac{xz^p}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}},\ |x|=|y|=1\right\}\subset\mathrm{E}\mathscr{F}$$

由于

$$f(z)=\frac{xz^p}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}}=xz^p+2p(1-\alpha)xyz^{p+1}+\cdots$$

作$\mathscr{A}$上的连续线性泛函$J(h)=\frac{1}{p!}\left[\alpha h^{(p)}(0)+\frac{\beta}{2(1-\alpha)p(p+1)}h^{(p+1)}(0)\right]$ $(|\alpha|=|\beta|=1)$. 则

$$\mathrm{Re}J(f)=\mathrm{Re}(\alpha x+\beta xy)\leqslant 2$$

等号仅当$x=1/\alpha$，$y=\alpha/\beta$时成立，由此知$f\in \mathrm{E}\mathscr{F}$.

下面研究$s(S(p,\alpha))$的支撑点。在叙述定理之前，我们给出两个引理。

引理 3 令

$$\mathscr{F}_{\alpha}(p)=\left\{\int_{R}\frac{xz^{p}}{(1-yz)^{\alpha p}}d\mu(x,y),\ \mu\text{为}R\text{上的概率测度}\right\}$$

(p为正整数，$\alpha>0$). 则

$$\mathrm{Supp}\,\mathscr{F}_{\alpha}(p)=\left\{\int_{|y|=1}\frac{\overline{B(y)}z^{p}}{(1-yz)^{\alpha p}}d\mu(y),\ B\text{为有限的 Blaschke 乘积},\ \mu\text{ 为}|y|=1\text{上的概率测度}\right\}.$$

此引理可由[6]直接推得。

引理 4 设$\varphi(z)$为有限的 Blaschke 乘积，$c\in \mathrm{C}$，$|c|=1$. 若$0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$，

$$[z\varphi(z)/(1-cz\varphi(z))^{2(1-\alpha)}]^{p}\in \mathrm{Supp}s(S(p,\alpha))$$

则$\varphi(z)=x$，x 为常数且$|x|=1$.

证明 据[6]之引理3.1的证明有

$$F(z)=\frac{z\varphi(z)}{(1-cz\varphi(z))^{2(1-\alpha)}}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k}\frac{\bar{c}x_{k}z}{1-x_{k}z}h(z)$$

其中$\lambda_{k}\geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k}=1$，$|x_{k}|=1$，$h(z)=\left[\frac{1}{1-cz\varphi(z)}\right]^{q}=\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k}\frac{1}{1-x_{k}z}\right]^{q}$，$q=1-2\alpha>0$. 于是

(Ⅰ) $[F(z)]^{p}=\Sigma\lambda_{n_1}\cdots\lambda_{n_p}\frac{\bar{c}x_{n_1}z}{1-x_{n_1}z}\cdots\frac{\bar{c}x_{n_p}z}{1-x_{n_p}z}[h(z)]^{p}$ $(\Sigma\lambda_{n_1}\cdots\lambda_{n_p}=1)$. 由引理2知

(Ⅱ) $\frac{\bar{c}x_{n_1}z}{1-x_{n_1}z}\cdots\frac{\bar{c}x_{n_p}z}{1-x_{n_p}z}[h(z)]^{p}=\int_{R}\frac{xz^{p}}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}}d\lambda(x,\ y)$

因$[F(z)]^{p}\in \mathrm{Supp}s(S(p,\alpha))$,当然$[F(z)]^{p}\in \mathrm{Supp\,H}s(S(p,\alpha))$.

由(Ⅰ)和(Ⅱ)知

$$\frac{\bar{c}x_{n_1}z}{1-x_{n_1}z}\cdots\frac{\bar{c}x_{n_p}z}{1-x_{n_p}z}[h(z)]^{p}\in \mathrm{Supp\,H}s(S(p,\alpha))$$

而由引理3知

$$\frac{\bar{c}x_{n_1}z}{1-x_{n_1}z}\cdots\frac{\bar{c}x_{n_p}z}{1-x_{n_p}z}[h(z)]^{p}=\int_{|y|=1}\frac{\overline{B(y)}z^{p}}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}}d\nu(y)$$

不难推出ν为一质点测度 (point mass)，由此φ一定具有 形式 $\varphi(z)=x$ (x 为常数，

$|x|=1)$．

定理 5 设 J 为 $\mathscr{A}$ 上的连续线性泛函，且不具有形式

$$J(h)=\sum_{n=0}^{p}A_nh^{(n)}(0),\ h\in\mathscr{A}$$

则当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 时

$$\mathrm{Supp}\{s(S(p,\alpha)),\ J\}=\mathrm{EH}s(S(p,\alpha))$$

此定理的证明可完全按[6]中的方法进行，这里只须注意到[2]中的一结论：设 $F\in\mathscr{A}$ 非常数，则

$\mathrm{Supp}s(F)\subset\{F(z\varphi(z))$，$\varphi$ 为有限的Blaschke乘积$\}$。

参 考 文 献

[1] Kapoor G P, Mishra A K. J. Math. Anal. Appl., 1982, 87(1): 116~126

[2] Hallenbeck D J, Mac Gregor T H. Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1984

[3] Kirwan W E, Schober G. Duke Math. J., 1975, 42(3): 285~296

[4] Grassmann E, Hengartner W. Can. Math. Bull., 1976, 19(2): 177~179

[5] Cochrane P C, MacGregor T H. Trans. A. M.S., 1978, 236(1): 75~92

[6] Perera A A S, Wilken D R. Pacific J. Math., 1986, 123(2): 197~207

Extreme Points and Support Points of Some Special Classes of Multivalent Functions

Zhu Jianmin

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

Let $S(p,\alpha)$, $C(p,\alpha)$ and $K(p,\alpha)$ denote the classes of p-valent starlike, convex and close-to-convex functions of order α respectively. In this paper the extreme points and support points of these classes are studied and a series of results have been obtained as follows:

Theorem 1. (1) $\mathrm{Supp}S(p,\alpha)=\mathrm{EH}S(p,\alpha)$;

(2) $\mathrm{Supp}C(p,\alpha)=\mathrm{EH}C(p,\alpha)$;

(3) $\mathrm{Supp}K(p,\alpha)\subset\mathrm{EH}K(p,\alpha)$.

Theorem 2. (1) $\mathrm{EH}s(S(p,\alpha))=\left\{\frac{xz^p}{(1-yz)^{2(1-\alpha)p}},\ |x|=|y|=1\right\}$

$$\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

（下转第91页）

3　三角网格上的C^1有理插值曲面函数

前面讨论的是每一个小三角形上的插值函数在其局部坐标系下的表示，而整个三角形网格上的曲面插值函数必须在同一坐标系下表示。因此每一个三角形上的插值函数作一坐标平移和旋转可得到同一坐标系下的统一表示。而在同一坐标系下，每相邻两三角形上的插值函数是C^1连续的[4]，从而得到在三角形网格上的整个曲面插值函数是C^1连续的。

参 考 文 献

[1] 方逵．国防科技大学学报，1989,11(2):11～18

[2] Barnhill R E, Bikrhoff G,Gordon W J. J. Approx. Theory, 1973, 15(1):33

[3] Klulemicz M. Computer Graphics, 1983,17(3):92

[4] 方逵，程正兴．工程数学学报，1987,4(2):59～66

[5] 方逵．数学的认识与实践，1990,(4)

C^1 Rational Interpolation over Triangular Grid

Fang Kui

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

This paper describes a new interpolation method with the convex combination of two operators, the interpolation function is simple to construct and easy to calculate, and the error of interpolation functions is estimated. The error order is $O(h^4)$, which is better that of [4].

Key words: function, interpolation, linearization, operator, singularity, linear Taylor's operator, interpolation function of surface

（上接第97页）

$$(2)\ \mathrm{Supp}\{s(S(p,\alpha))J\}=\mathrm{EH}s(S(p,\alpha))\quad\left(0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\right).$$

where J is a continuous linear functional on $\mathscr{A}$ which does not have the form $J(h)=\sum_{n=0}^{p}A_n h^{(n)}(0)$ for each h belonging to $\mathscr{A}$.

Key words: function, complex variables, extreme value, p-valent starlike, convex function, close-to-convex functions, extreme point, support points