国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第12卷第4期 1990年12月 Vol.12 No.4

正切函数的契比协夫逼近及其系数的加速计算法

李晓梅 王宏斌 赵自春
（计算机系）

摘 要 本文给出正切函数的有理展开和契比协夫展开式系数的加速计算方法；同时在YH-1机上进行了数值试验，结果表明：用现在的系数来计算正切函数，其精度比原来正切函数的精度可提高30%左右。

关键词 逼近法，函数，绝对误差，相对误差/数值计算，契比协夫多项式
分类号 O241.8

在进行正切函数数学子程序方案设计时，首先利用它的有理展开式来构造契比协夫逼近式，再使用契比协夫逼近式构造有理分式逼近式及进行误差估计。因此，本部分

1989年7月28日收稿

The Compiler Implementation of Parallel Programming Language on Serial Machine

Guo Qiang
(PLA Chengdu Military-Area)

Abstract

At present the array-array (matrix-matrix) opreation has been introduced into parallel programming languages, such as Fortran 8x. This makes compiler implementation on serial machine difficut. This paper proposes the concept of "serialization" and gives the algorithm about serial opreating.

Keg words parallel programming, matrix, serial computer/array-array (matrix-matrix) opreation, serialization, original shape serialization

工作是整个数学子程序方案设计中较为困难的一部分，特别是精度要求。比如，正切函数的有理分式逼近式系数是由契比协夫展式的系数

$$c_0=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}},$$

$$c_{2r}=\frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(4n+2)-\sqrt{(4n+2)^2-1}]^{2r}}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}},\quad r=1,2,\cdots$$

来计算。如果要使有理分式逼近式的相对误差小于10^{-16}，则c_0至少要取级数前1.6×10^{15}项计算，其计算量之大是可想而知的。为了减少计算量，而又不损失精度，我们重新研究了c_0和c_{2r}的计算公式，得到了较为理想的加速计算方法：使用这种加速方法计算出c_0和c_{2r}，再求出有理分式逼近式系数，然后用这组系数计算正切函数。在YH-1机上通过一系列测试点测试，结果表明：其精度比原来正切函数子程序的精度提高30%.

1 $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x$逼近公式的建立

1.1 $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x$ 的有理展开式

这里使用一种比文[1]中更为简单的方式来建立 $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x$ 的有理展开式。

考虑函数

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z} \tag{1}$$

其中z为复数，在整个复平面上，$\mathrm{tg}z$为半纯函数，在点$z=\left(K+\frac{1}{2}\right)\pi$，$K=0,\pm1,\pm2,\cdots$上为一阶极点，同时在复平面任一闭环路$C_m$上，$|\mathrm{tg}z|<M$，$M$和$m$无关。事实上，在复平面上作任一闭环路$C_m$（见图1）。

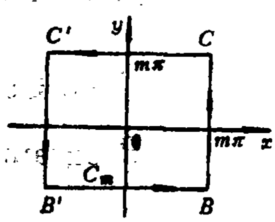

图 1 任一闭环路c_m

由于

$$|\mathrm{tg}z|^2=\mathrm{tg}z\cdot\overline{\mathrm{tg}z}=\frac{e^{-2y}+e^{2y}-2\cos 2x}{e^{-2y}+e^{2y}+2\cos 2x} \tag{2}$$

其中$z=x+iy$.

在BC和$B'C'$边上，$x=\pm m\pi$，所以$\cos 2m\pi=1$，而

$$|\mathrm{tg}z|^2=\frac{e^{-2y}+e^{2y}-2}{e^{-2y}+e^{2y}+2}<1 \tag{3}$$

在CC'和BB'边上，$y=\pm m\pi$，$\cos 2x$用-1代入，则有

$$|\mathrm{tg}z|^2<\frac{(1+e^{-2y})^2}{(1-e^{-2y})^2}\to1,\ \text{当}\ m\to\infty \tag{4}$$

由(3)和(4)式知，在C_m上，$|\mathrm{tg}z|<M$，且M与m无关。

在$\left(K+\frac{1}{2}\right)\pi$，$K=0,\pm1,\pm2,\cdots$上，tg$z$的留数为$-1$，因此按下面定理[2]：

定理　如果$f(z)$是一个半纯函数，$a_1,a_2,\cdots$是$f(z)$的一阶极点，且在复平面任一闭环路C_m上，$|f(z)|<M$，M与m无关，则有展开式：

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}\right) \tag{5}$$

其中b_n是$f(z)$在a_n点的留数。

利用(5)式，tg$z$的有理展开式为：

$$\mathrm{tg}z=-\sum_{m}\left\{\frac{1}{z-m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{z+m}-\frac{1}{m}\right\}=\sum_{m}\frac{2z}{m^2-z^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z}{\left[\frac{1}{2}(2n+1)\pi\right]^2-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8z}{(2n+1)^2\pi^2-4z^2} \tag{6}$$

令$z=\frac{\pi}{4}x$，则得到tg$\frac{\pi}{4}x$的展开式：

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x=\frac{8}{\pi}x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2-x^2} \tag{7}$$

1.2　tg$\frac{\pi}{4}x$的契比协夫展开式：

假定

$$\frac{1}{K^2-x^2}=\frac{1}{2}A_0T_0(x)+\sum_{r=1}^{\infty}A_{2r}T_{2r}(x)\quad (K^2>1) \tag{8}$$

其中$T_{2r}(x)$为契比协夫多项式，则

$$\begin{cases}A_2=(2K^2-1)A_0-4\\ A_{2r+2}=2(2K^2-1)A_{2r}-A_{2r-2},r=1,2,\cdots\end{cases} \tag{9}$$

为计算A_0，利用契比协夫多项式族$\{T_n(x)\}$在$[-1,1]$上关于权函数$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$正交性，在(8)式两边乘以$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，再沿-1到1积分得到：

$$A_0=\frac{2}{K\sqrt{K^2-1}}$$

将A_0代入(9)式得：

$$A_{2r}=\frac{2}{K\sqrt{K^2-1}}(K-\sqrt{K^2-1})^{2r}$$

将A_{2r}代入(8)式后，再将结果代入(7)式得到：

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x=x\sum_{r=0}^{\infty}C_{2r}T_{2r}(x) \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}} & (11) \\ c_{2r}=\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{[(4n+2)-\sqrt{(4n+2)^2-1}]^{2r}}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}},\quad r=1,2,\cdots & (12) \end{cases}$$

(10)式即为契比协夫展开式。

1.3 $x\sum\limits_{r=0}^{\infty}C_{2r}T_{2r}(x)$的有理分式逼近式

令

$$F_{m,k}(x)=\left[x\sum_{j=0}^{m}a_{2j}T_{2j}(x)\right]\Big/\left[\sum_{j=0}^{k}b_{2j}T_{2j}(x)\right] \tag{13}$$

如果取$m=K=3,b_0=1$，则按梅莱方法，$\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}x$可表示成

$$x\sum_{r=0}^{\infty}c_{2r}T_{2r}(x)[1+b_2T_2(x)+b_4T_4(x)+b_6T_6(x)]-x\sum_{j=0}^{3}a_{2j}T_{2j}(x)$$
$$=x\sum_{j=7}^{\infty}h_{2j}T_{2j}(x) \tag{14}$$

利用

$$T_{i+j}(x)+T_{|i-j|}(x)=2T_i(x)T_j(x) \tag{15}$$

消去$T_i(x)T_j(x)$，(14)式变为

$$x\sum_{r=0}^{\infty}c_{2r}T_{2r}(x)+x\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}c_{2r}b_{2j}[T_{2r+2j}(x)+T_{|2r-2j|}(x)]$$
$$-x\sum_{j=0}^{3}a_{2j}T_{2j}(x)=x\sum_{j=7}^{\infty}h_{2j}T_{2j}(x) \tag{16}$$

比较两边系数得到：

$$\begin{cases} a_0-c_0-\frac{1}{2}b_2c_2-\frac{1}{2}b_4c_4-\frac{1}{2}b_6c_6=0 \\ a_2-c_2-b_2c_0-\frac{1}{2}b_2c_4-\frac{1}{2}b_4(c_2+c_6)-\frac{1}{2}b_6(c_4+c_8)=0 \\ a_4-c_4-\frac{1}{2}b_2(c_2+c_6)-b_4c_0-\frac{1}{2}b_4c_8-\frac{1}{2}b_6(c_2+c_{10})=0 \\ a_6-c_6-\frac{1}{2}b_2(c_4+c_8)-\frac{1}{2}b_4(c_2+c_{10})-b_6c_0-\frac{1}{2}b_6c_{12}=0 \\ c_8+\frac{1}{2}b_2(c_6+c_{10})+\frac{1}{2}b_4(c_4+c_{12})+\frac{1}{2}b_6(c_2+c_{14})=0 \\ c_{10}+\frac{1}{2}b_2(c_8+c_{12})+\frac{1}{2}b_4(c_6+c_{14})+\frac{1}{2}b_6(c_4+c_{16})=0 \\ c_{12}+\frac{1}{2}b_2(c_{10}+c_{14})+\frac{1}{2}b_4(c_8+c_{16})+\frac{1}{2}b_6(c_6+c_{18})=0 \end{cases} \tag{17}$$

先由后面三个方程解出b_2, b_4, b_6，再将它们代入前面四个方程得到

$$
\begin{aligned}
&a_0 = c_0 + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{3} b_{2r}c_{2r} \\
&a_{2j} = c_{2j} + \frac{1}{2}c_0 b_{2j} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} b_{2i}(c_{2j+2i} + c_{|2j-2i|}),\ j=1,2,3
\end{aligned} \tag{18}
$$

从而得到$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x$的有理分式逼近式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x &\approx \frac{x[a_0 + a_2T_2(x) + a_4T_4(x) + a_6T_6(x)]}{1 + b_2T_2(x) + b_4T_4(x) + b_6T_6(x)} \\
&= \frac{x(A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6)}{B_0 + B_2x^2 + B_4x^4 + x^6}
\end{aligned} \tag{19}
$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{32b_6}(a_0 - a_2 + a_4 - a_6),\quad A_2 = \frac{1}{16b_6}(a_2 - 4a_4 + 9a_6)$$

$$A_4 = \frac{1}{4b_6}(a_4 - 6a_6),\quad A_6 = \frac{1}{b_6}a_6$$

$$B_0 = \frac{1}{32b_6}(1 - b_2 + b_4 - b_6),\quad B_2 = \frac{1}{16b_6}(b_2 - 4b_4 + 9b_6)$$

$$B_4 = \frac{1}{4b_6}(b_4 - 6b_6)$$

通常为了计算方便，将$|x| \leqslant 1$变换到$|t| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

2　误差分析

由(16)式知，逼近式的绝对误差为

$$\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x - \frac{x[A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6]}{B_0 + B_2x^2 + B_4x^4 + x^6}\right| \leqslant |xh_{14}T_{14}(x)| \leqslant x\,|h_{14}| \tag{20}$$

而逼近式的相对误差为

$$\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x - \frac{x[A_0 + A_2x^2 + A_4x^4 + A_6x^6]}{B_0 + B_2x^2 + B_4x^4 + x^6}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x}\right| \leqslant \frac{|x||h_{14}|}{\left|\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x\right|} \leqslant \frac{4}{\pi}\,|h_{14}| \tag{21}$$

其中

$$h_{14} = -c_{14} - \frac{b_2}{2}(c_{12} + c_{16}) - \frac{b_4}{2}(c_{10} + c_{18}) - \frac{b_6}{2}(c_8 + c_{20}) \tag{22}$$

下面分析一下在计算c_{2r}时应截取的项数。由(11),(12)式知，在c_{2r}的计算中，c_0是关键，现在考虑用$c_0^{(N)}$来逼近c_0时，N应多大？

令

$$c_0^{(N)}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}}$$

其误差为：

$$\begin{aligned}E_0^{(N)}&=\frac{8}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}}\\&<\frac{8}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)(4n+1)}<\frac{1}{2\pi}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2\pi N}\end{aligned}\tag{23}$$

对于给定的正数ε，由$\frac{1}{2\pi N}<\varepsilon$得$N>\frac{1}{2\pi\varepsilon}$. 另一方面，

$$\begin{aligned}E_0^{(N)}&=\frac{8}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)\sqrt{(4n+2)^2-1}}>\frac{8}{\pi}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)(4n+3)}\\&>\frac{1}{2\pi}\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2\pi(N+2)}\end{aligned}\tag{24}$$

得到$N>\frac{1}{2\pi\varepsilon}-2$. 若取 $\varepsilon=10^{-16}$，则要求

$$N>\frac{1}{2\pi 10^{-16}}\approx 1.6\times 10^{15}\tag{25}$$

这说明计算c_0至少要取级数的前1.6×10^{15}来求和，才能使$c_0^{(N)}$逼近c_0的误差小于10^{-16}.

3 c_{2r} 的加速计算法

由(25)式知，要取 1.6×10^{15} 这么多项来计算，其计算量大得惊人，因此 有必要寻找c_{2r}新的加速计算方法。

令

$$y(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})^{2r}}\tag{26}$$

两边积分得到

$$\int y(x)dx=\frac{1}{(2r-1)(1+\sqrt{1-x^2})^{2r-1}}+c\tag{27}$$

利用幂级数

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+z}}\right)^k=1-K\frac{z}{4}+\frac{K(K+3)}{2!}\left(\frac{z}{4}\right)^2-\frac{K(K+4)(K+5)}{3!}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\tag{28}$$

上式中令$z=-x^2$，$K=2r-1$得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})^{2r-1}}&=2^{1-2r}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+z}}\right)^{2r-1}\\&=2^{1-2r}\left[1-(2r-1)\frac{z}{4}+\frac{(2r-1)(2r+2)}{2!}\left(\frac{z}{4}\right)^2\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{(2r-1)(2r+3)(2r+4)}{3!}\left(\frac{z}{4}\right)^3+\cdots\Big] \tag{29}$$

由(29)和(27)式得到：

$$\int y(x)dx=\frac{1}{2^{2r-1}(2r-1)}\left[1+(2r-1)\frac{x^2}{4}+\frac{(2r-1)(2r+2)}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(2r-1)(2r+2K-2)!}{K!(2r+K-1)!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k+\cdots\right]+c \tag{30}$$

将上式逐项微分。并把所得结果回代到(12)式得到

$$c_{2r}=\frac{16}{\pi}\left[\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^{2r}+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{K(2r+2K-2)!}{2^{4r+4K-2}\cdot K!(2r+K-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2r+2K}\right],$$

$$r=1,2,\cdots \tag{31}$$

$$c_0=\frac{8}{\pi}\left[1+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3K-1}(K-1)!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2K}\right]$$

4 c_{2r} 计算中截断误差弥补法

在(31)式中，当K和r取一定整数值时，级数收敛很快，但当K和r很小时，如取$K=1,r=0$时，后面所乘的级数收敛较慢，例如取$N=10^3$，则第一项的误差为

$$\frac{1}{4}\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\geqslant\frac{1}{4}\int_N^{\infty}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2dx=\frac{1}{8}\frac{1}{2N+1}$$

这样造成了较大的误差。然而对于$2r+2K\geqslant6$时，则取$N=10^3$时，丢失的数是10^{-18}量级或更小。因此在c_0及c_{2r}计算中，只要对$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4$进行截断误差弥补即可。

4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$截断误差弥补法

对于任一正整数N，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tag{32}$$

考虑

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2n+3}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^2 \tag{33}$$

将(33)式右边第一个和用积分近似计算

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2n+3}\right)^2\right]\approx\int_N^{\infty}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2dx=\frac{1}{2(2N+1)} \tag{34}$$

其误差为

$$\varepsilon=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\left(\frac{1}{2n+3}\right)^2\right]-\sum_{n=N}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)^2\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3 \tag{35}$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$截断误差一次弥补法

一次弥补法就是使用下式近似计算

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\approx\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^2 \tag{36}$$

其误差$\varepsilon\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3$，当精度要求为$10^{-15}$时，取$N=10^5$即可满足要求，而不采用该方法需要取$N=\frac{10^{15}}{4}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$截断误差二次弥补法

二次弥补法就是针对其误差

$$\frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)^2=2\sum_{n=N}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]^2$$

重复使用上面的方法，即：

$$2\sum_{n=N}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right]^2\approx2\int_N^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^2(2x+3)^2}dx+\frac{1}{(2N+1)^2(2N+3)^2}$$

$$\approx2\int_N^{\infty}\left(\frac{1}{2x+2}\right)^4dx+\frac{1}{(2N+1)^2(2N+3)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2N+2}\right)^3+\frac{1}{(2N+1)^2(2N+3)^2} \tag{37}$$

其误差为

$$\varepsilon=\sum_{n=N}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)^2}+\frac{1}{(2n+3)^2(2n+5)^2}\right]-\sum_{n=N}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{2dx}{(2x+2)^4}$$

$$\leqslant8\sum_{n=N}^{\infty}\frac{4}{(2n+2)^2(2n+1)^2(2n+5)^2}<\frac{16}{5}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^5 \tag{38}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^2$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2N+2}\right)^3+\frac{1}{(2N+1)^2(2N+3)^2} \tag{39}$$

此时，对于精度要求10^{-15}，只需取$N=10^3$就足够了。

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4$截断误差弥补法

利用上面同样方法

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4=\int_N^{\infty}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^4 dx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^4$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^4 \tag{40}$$

其误差为

$$\varepsilon=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4+\left(\frac{1}{2n+3}\right)^4\right]-\sum_{n=N}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^4 dx$$

$$\leqslant 2\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^6\leqslant\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^5 \tag{41}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4\approx\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^4+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3 \tag{42}$$

对于精度要求10^{-15}，取$N=10^3$就足够了。

对于c_0计算，要达到10^{-15}精度，只要取$K=20$. 对其中求和式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$，采用(39)式计算；而对$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^4$采用(42)式计算；对其他和式，直接截取前$N$项，则取$N=10^3$就够了。计算出$c_0$和$c_{2r}$后，再由它们计算出$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}x$有理分式逼近式系数，代入到正切函数子程序进行测试，其最大相对误差为0.7×10^{-14}（见表1)。与此同时，计算了下列几种情况：使用公式(31)计算c_{2r}（取$N=10^3$，未考虑截断误差弥补)；使用公式(36)、

表 1　部分检测点验证数据

1	$x=0.1250834016146799E+00$ $F(x)=0.1244174204618961E+00$ $y(x)=0.1244174204618961E+00$ $\mathrm{AER}=0.0000000000000000E+00$ $\mathrm{CER}=0.0000000000000000E+00$	5	$x=0.1262609212492044E+20$ $F(x)=0.1570796326794896E+01$ $y(x)=0.1570796326794896E+01$ $\mathrm{AER}=-0.7105427357601037E-14$ $\mathrm{CER}=-0.4523455546970307E-14$
2	$x=0.2577333681796207E+03$ $F(x)=0.1566916367783646E+01$ $y(x)=0.1566916367783646E+01$ $\mathrm{AER}=0.0000000000000000E+00$ $\mathrm{CER}=0.0000000000000000E+00$	6	$x=0.3125000000000017E-01$ $F(x)=0.3123983343026832E-01$ $y(x)=0.3123983343026832E-01$ $\mathrm{AER}=0.0000000000000000E+00$ $\mathrm{CER}=0.0000000000000000E+00$
3	$x=-0.4403150586063215E+14$ $F(x)=-0.1570796326794828E+01$ $y(x)=-0.1570796326794878E+01$ $\mathrm{AER}=0.7105427357601037E-14$ $\mathrm{CER}=-0.4523455546970378E-14$	7	$x=0.3392591660227761E-14$ $F(x)=0.3392591660227761E-14$ $y(x)=0.3392591660227726E-14$ $\mathrm{AER}=-0.1262177448353627E-28$ $\mathrm{CER}=-0.3720393064542566E-14$
4	$x=0.9993683192864146E+38$ $F(x)=0.1570796326794896E+01$ $y(x)=0.1570796326794896E+01$ $\mathrm{AER}=-0.7105427357601037E-14$ $\mathrm{CER}=-0.4523455546970307E-14$	8	$x=-0.1775180518498045E-37$ $F(x)=-0.1775180518498045E-37$ $y(x)=-0.1775180518498027E-37$ $\mathrm{AER}=0.8352389719038093E-52$ $\mathrm{CER}=-0.4705093162077371E-14$

注：x：自变量；$y(x)$：计算正切值　　　　最大相对误差：$0.8667424174852E-14$

$F(x)$：正切真值；AER：绝对误差；　　　　最大绝对误差：$0.7105427357601E-14$

CER：相对误差

(37)和(31)计算c_{2r}（取$N=10^3$，考虑截断误差一次弥补）；使用公式(34)、(37)和(31)计算c_{2r}（取$N=10^3$，考虑截断误差二次弥补）。计算结果表明：若不考虑截断误差弥补，其精度只达到10^{-3}；若只考虑截断误差一次弥补，其精度则达到10^{-11}；若考虑截断误差二次弥补，其精度则达到10^{-14}。这是比较理想的结果。

参考文献

[1] YH-1数学子程序设计說明书．国防科大研究所

[2] A·拉尔斯登．徐献瑜等译．数字计算机上用的数学方法．上海科学技术出版社

[3] 王竹溪，郭敦仁．特殊函数概论．科学出版社

[4] 沙金．tgax的契比协夫级数展开．计算机工程与科学，1985

Chebyshev Approximation of Tangent Functions and the Accelerated Computional Method of the Coefficients of the Tangent Functions

Li Xiaomei　Wang Hongbin　Zhao Zichun

(Department of Computer Science)

Abstract

The rational and Chebyshev approximation polynomials of tangent are given. The accelerated computational methods of the Chebyshev coefficients are also presented. The experimental results on the YH-1 super-computer show that using the coefficients with this accelerated method the accuracy can be increased by 30% compared with the original confficients.

Key words approximation method, function, absolute error, relative error/numerical evaluation, Chebyshev polynomial