

## 阻尼的非线性最小二乘滤波算法

周一宇

(电子技术系)

**摘要** 为提高在弱可观测条件下滤波器的稳定性, 本文把非线性优化方法应用于递推滤波, 形成了阻尼的最小二乘迭代滤波算法。同时还得出了该方法的信息平方根滤波形式。

**关键词** 卡尔曼滤波, 非线性, 最小二乘滤波

**分类号** TN911.23

扩展卡尔曼滤波 (EKF) 是一种用于非线性测量方程的常用估计方法。但是, 在非线程度较严重, 可观测条件较差的应用环境, EKF时常会失败。其原因主要有两点。首先, 可观测条件较弱, Fisher信息阵容易表现为病态, 在解测量值修正方程时, 很可能使解更远地偏离真值或根本就无法求解。其次, 不准确的初始条件可能产生极大的非线性误差而使EKF更容易发散。

迭代的方法用于EKF可以减小非线性误差<sup>[1]</sup>。它相当于 Gauss-Newton(G-N)最小二乘方法。但是G-N法不是全局收敛的, 它要求比较靠近真解的迭代起始点和良态的修正方程, 并且不能保证每次迭代都使目标函数下降。因此当可观测条件较弱时, 迭代本身就很容易发散。在本文的实例中, 这种迭代几乎都是发散的。为解决这个问题, 本文把阻尼的最小二乘(LS)的优化算法(或称Levenberg-Marquardt算法)<sup>[2], [3]</sup>应用于递推滤波, 形成了阻尼的LS迭代滤波算法。同时还把阻尼方法和基于Householder变换的信息平方根滤波相结合, 使性能得到进一步改善。在本文的最后, 给出了这些算法的应用例子和计算机模拟计算的结果。

## 1 阻尼LS滤波的基本方法

对于  $n$  维状态矢量  $x_k$  的非线性测量方程

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (1)$$

加权最小二乘的目标函数为

$$F_k(x_k) = \|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|_{P_{k|k-1}^{-1}}^2 + \|z_k - h_k(x_k)\|_{R_k^{-1}}^2 \quad (2)$$

其中  $P_{k|k-1}$  和  $R_k$  分别是  $\hat{x}_{k|k-1}$  和  $z_k$  的协方差阵。把(2)式写成分块矩阵的形式

$$F_k(x_k) = \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - h_k(x_k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^{-1} & 0 \\ 0 & R_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k-1} \\ z_k - h_k(x_k) \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \frac{S_{k|k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})}{V_k^{-1}(z_k - h_k(x_k))} \right]^T \left[ \frac{S_{k|k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})}{V_k^{-1}(z_k - h_k(x_k))} \right] \\ \triangleq f_k^T(x_k) f_k(x_k) \quad (3)$$

其中  $S_{k|k-1}^{-1}$  和  $V_k^{-1}$  是  $P_{k|k-1}^{-1}$  和  $R_k^{-1}$  的三角分解的上三角阵。使目标函数(3)式最小的第  $i$  次迭代的测量值修正法方程为

$$(P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k + \mu_k^i I) p_k^i = P_{k|k-1}^{-1} (\hat{x}_{k|k-1} - \hat{x}_k^i) \\ + H_k^T R_k^{-1} [z_k - h_k(\hat{x}_k^i)] \quad (4)$$

其中正常数  $\mu_k^i$  为阻尼系数,  $I$  为单位矩阵。

$$H_k^i = \left. \frac{\partial h_k(x_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^i} \quad (5)$$

迭代式为

$$\hat{x}_k^{i+1} = \hat{x}_k^i + p_k^i \quad (6)$$

$$\hat{x}_k^0 = \hat{x}_{k|k-1} \quad (7)$$

法方程(4)仅仅是在G-N的法方程上加了一个起阻尼作用的正定矩阵  $\mu_k^i I$ 。阻尼的LS迭代算法由于具有全局收敛性,而且运算简便,因此可以用来弥补G-N法的不足,增强迭代的稳定性。

这里附带指出,在一般EKF的增益计算中,为了防止求逆奇异,也有采用阻尼方法的。即

$$K_k = (P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k + \rho I)^{-1} H_k^T R_k^{-1} \quad (8)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k [z_k - h_k(\hat{x}_{k|k-1})] \quad (9)$$

其中  $\rho$  为一个适当选择的正小量。这种方法似乎与阻尼LS方法相当,但它不适宜于迭代运算。因为在阻尼LS中全局收敛性依赖于  $\mu \rightarrow \infty$  时,迭代步长  $\|p\| \rightarrow 0$ ,且迭代步的方向趋于目标函数的负梯度方向。而EKF公式(8)、(9)对应于经过了平移变换

$$\tilde{x} = x_k - \hat{x}_{k|k-1} \quad (10)$$

的目标函数  $F(\tilde{x})$ 。可以证明,对于  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $p^i \rightarrow \hat{x}_{k|k-1} - \hat{x}_k^i$ ,因此迭代的全局收敛性不能保证。

## 2 阻尼系数的选择方法

在阻尼LS方法中,确定阻尼系数  $\mu$  的方法有许多。目前公认较有效的是 Fletcher 的准则<sup>[2],[3]</sup>。Fletcher 方法的特点是构造一个参数  $r$ ,来估计当目标函数假设为二次时,在  $\hat{x}^i$  点的二阶近似改变量与真实改变量的接近程度,根据  $r$  的大小来控制  $\mu$  值的增减。因此是对阻尼做了一种优化选择。此外,Fletcher 方法是从  $\mu = 0$  开始的,所以若迭代能够顺利地进行下去,则完全等同于G-N法,从而具有高的效率。因此在阻尼LS滤波中采用Fletcher方法是比较合适的。但是Fletcher算法用在不利条件下仍可能出现问题,需要进行修改和补充。

(1) 若设非线性函数矢量  $f(x)$  的 Jacobi 阵为  $J(x) \in R^{m \times m}$ , 令

$$T(x) = 2J^T(x)J(x) \quad (11)$$

则可以说G—N法是用 $T(x)$ 来近似 $F'(x)$ 的Hessian阵 $G(x)$ 的近似Gauss方法。若 $f(x)$ 的非线性严重或者它在解点的剩余较大, 则 $T(x)$ 对 $G(x)$ 的近似就较差。根据 $r$ 的定义式<sup>[3]</sup>可推知

$$r = 1 - \frac{p^T(G(x+\theta p) - T(x))p}{2p^T\left(\frac{1}{2}T(x) + \mu I\right)p} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad (12)$$

也就是说 $r$ 的大小反映了 $T(x)$ 对 $G(x)$ 的近似程度。当 $|r-1|$ 很大时, 就表明近似程度很差, 算法的收敛将变得缓慢。常常进行了许多次迭代, 获得的解的质量却不高。故设置一个上界, 当 $|r-1|$ 超过这个上界时, 则停止迭代。

(2) 在阻尼LS算法中, 一般若 $\tau > 0$ , 则目标函数必下降。然而当法方程病态或接近病态时, 可能给迭代矢量 $p$ 带来大的数值计算误差, 从而使上述条件不再成立。于是有可能不断减小 $\mu$ , 而实际的目标函数却不下降, 进入死循环。所以应以真正的目标函数是否下降和 $r$ 一起作为双重的判断依据, 来确定 $\mu$ 的增减。

(3) Fletcher方法用 $T(x)$ 的最小特征值 $\lambda_n$ 作为 $\mu$ 的截断值 $\mu_0$ 的上限, 而用 $1/\|T^{-1}(x)\|$ 作为 $\lambda_n$ 的估计值。然而实际上有可能由于病态无法计算出 $T(x)$ 的逆矩阵。这时要确切地获得 $\lambda_n$ 的下限估计是困难的。但可以取

$$\mu_0 = \max\left\{\frac{1}{m} \min(T_{ii}), \mu'_0\right\} \quad (13)$$

其中 $\mu'_0$ 是与计算机字长有关的一个下限。实算表明, 这种取法是合适的。

以上修改措施在实际应用中被证明能有效地完善算法, 提高可靠性和效率。

### 3 阻尼平方根滤波

平方根滤波方法<sup>[4]</sup>可以大大地提高滤波的数值稳定性。LS滤波在形式上与信息平方根滤波是一致的、而且阻尼的方法没有根本改变运算的形式, 因此也能够基于Householder变换, 以平方根的形式实现。阻尼的LS平方根滤波迭代式为

$$Q \begin{bmatrix} S_{k|k-1}^{-1} & S_{k|k-1}^{-1}(x_{k|k-1} - x_k^i) \\ V_k^{-1} H_k^i & V_k^{-1}(z_k - h_k(x_k^i)) \\ \mu_k^{i,1/2} I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k|k}^{i,-1} & \delta_{k|k}^i \\ 0 & e_{k|k}^i \end{bmatrix} \quad (k > 1) \quad (14)$$

$$x_k^{i+1} = x_k^i + p_k^i = x_k^i + S_{k|k}^i \delta_{k|k}^i \quad (15)$$

$$x_k^0 = x_{k|k-1} \quad (16)$$

其中 $Q$ 是三角分解的Householder正交变换。由于非线性, 在(15)式中不能象对线性模型那样直接用 $\delta_{k|k}$ 进行递推。

若设目标函数 $F_k$ 的G—N近似为 $\hat{F}_k$ , 则

$$\hat{F}_k^i = \|\delta_{k|k}^i\|^2 + \|e_{k|k}^i\|^2 \quad (17)$$

一般认为 $\|\delta_{k|k}^i\|^2$ 和 $\|e_{k|k}^i\|^2$ 分别反映了 $\hat{F}_k$ 经第 $i$ 次迭代后的改变量和剩余值。但注意到(14)式是加有阻尼的, 故它们不是完全对应于由(3)式定义的目标函数, 而是相应于一个有阻尼条件约束的目标函数。或者说是相应于无约束的目标函数 $\hat{F}_{k,\mu} = \hat{F}_k +$

$\mu \|p\|^2$ 。根据G-N方程可推得,  $P_k^i$  在作了阻尼迭代后的真正改变量和剩余值分别为

$$\|\delta_{k|k}^i\|^2 + \mu \|p^i\|^2$$

和

$$\|e_{k|k}^i\|^2 - \mu \|p^i\|^2$$

于是Fletcher参数即可由下式计算

$$r = \frac{F_k^i - F_k^{i+1}}{\|\delta_{k|k}^i\|^2 + \mu \|p_k^i\|^2} \quad (18)$$

## 4 应用实例

当利用到达角和脉冲到达时间信息对运动辐射源进行单站无源定位和跟踪时<sup>[5]</sup>, 由于可观测性较弱, 而且初始状态也不确切知道, 因此LS滤波或EKF都容易发散。本文以此为例, 用提到的各种LS滤波算法在计算机上进行了Monte Carlo试验。表1(a)和1(b)分别列出了对采样周期 $T=3$ 秒和 $T=2.2$ 秒两种情况进行试验的结果。其中后一种情况发散现象更严重。图1~图4则分别相应于四种不同算法的距离跟踪误差曲线。每种算法的收敛次数以及误差曲线基本表明了它的稳定性和收敛性能。

表1(a) 各种滤波方法试验结果  
(采样周期3秒)

试验序号	滤波方法	试验次数	收敛次数	收敛时间(秒)	对应曲线图号
1	LS滤波	10	10	75	
2	阻尼LS*	10	10	70	1
3	迭代LS	8	2		
4	阻尼迭代LS	10	10	55	2
5	平方根LS	10	10	75	
6	迭代的平方根LS**	8	6		3
7	阻尼迭代平方根LS	10	10	45	4

表1(b) 各种滤波方法试验结果  
(采样周期2.2秒)

试验序号	滤波方法	试验次数	收敛次数
8	LS滤波	10	4
9	阻尼LS*	10	10
10	平方根LS	10	10

\* 仅当法方程病态而无法求解时才加阻尼; \*\* 目标函数下降则继续迭代, 否则停止。

从模拟的结果可以看出, 采用迭代方法可以加快收敛速度。但是如果不加任何措施, 那么不管是否用平方根法, 都是非常容易发散的(迭代的平方根法由于发散严重, 未列于表中)。阻尼的方法可用于迭代的(试验4, 7), 也可用于非迭代的(试验2, 9)滤波, 来加强稳定性。阻尼的迭代方法计算量较大, 但收敛速度较快, 也更稳定。不迭代的阻尼方法(试验2)或检查目标函数的无阻尼迭代方法(试验6)则是运算量和收敛速度、稳定性的折衷。平方根法性能最好, 但一般说来, 运算量也更大。

分析和实际计算表明, 基于G-N法的弱点, 在应用非线性的迭代滤波(如EKF、LS)时, 我们要谨慎对待。特别地当可观测条件差, 非线性严重或初始化不理想时, 迭代有时会导致运算过程的失败。针对这种问题, 本文提出的阻尼迭代滤波算法是一种比较

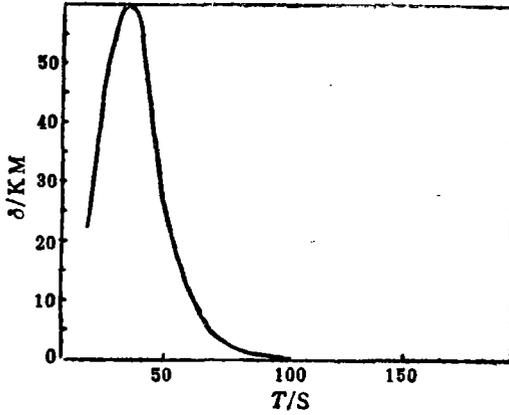


图 1 阻尼LS算法(Monte Carlo)

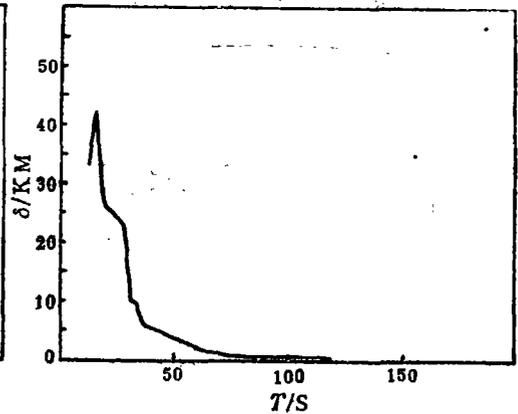


图 2 阻尼迭代LS算法(Monte Carlo)

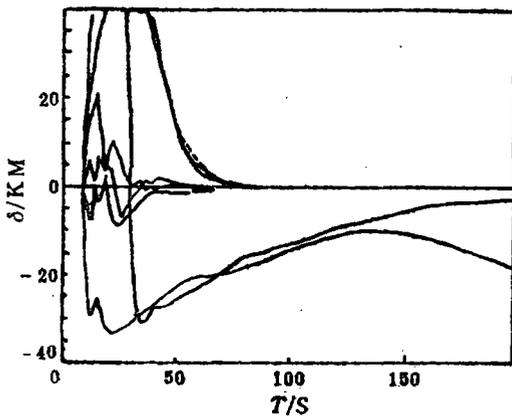


图 3 迭代的平方根LS算法(6次运行)

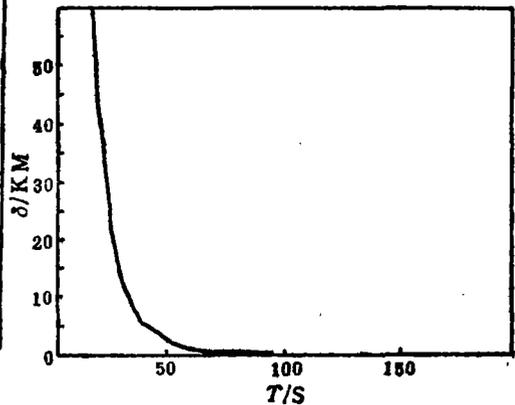


图 4 阻尼迭代平方根LS算法(Monte Carlo)

简便而又实用的方法。此外,也可根据不同环境和要求采用试验中用到的几种折衷简化方法。在阻尼迭代LS滤波算法中,当阻尼迭代效果不理想时,算法只是消极地中止了迭代,这是本算法的不足。如果此时改用适合于大剩余情况的拟牛顿法,可能更好。然而在滤波中应用拟牛顿法时,如何简化运算和初始化 Hessian 近似阵等问题还有待研究解决。

### 参 考 文 献

- [1] Jazwinski A H. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Pr., New York, 1970
- [2] Wolfe M A. Numerical Methods for Unconstrained Optimization. Reinhold, New York, 1978
- [3] 邓乃扬等. 无约束最优化计算方法. 科学出版社, 1982
- [4] Kaminski P G, Bryson A E and Schmidt S F. IEEE 1971, AC-16 (6), 727
- [5] Sun Zhongkang, Zhang Ming. Passive Location and Tracking Using DOA and TOA Measurements of Single Nonmaneuvering Observer, NAECON'88, 1988

# 一种用AR模型参数自适应检测 瞬态信号的新方法

胡步发 陆仲良 郭桂蓉

(电子技术系)

**摘要** 本文研究AR模型参数特征用于瞬态信号自适应检测的问题。本文依据AR模型参数矢量长度为特征检测信号的思思,提出了一种具有良好地自适应抑制噪声扰动的参数估计方法,弥补了LS、SVDT方法的不足。理论分析和实验结果均表明,本文的方法具有很好的AR模型参数估计和瞬态信号检测性能。

**关键词** 检测,估计,信号/瞬态信号,建模,SVD技术

**分类号** TN911.23

瞬态信号是一种来源较广的观测信号类型,如地震波、水下声呐波、冲击雷达回波等均属于瞬态信号。由于冲击雷达的特点,它广泛地应用于测量冰层的厚度、探测埋地物体(管道、地雷等)、探井、探矿、汽车防撞、近程船舶导航和探测隐身飞行器等,导致瞬态信号检测问题成了近年来信号处理界的一个研究热点。本文研究瞬态信号的检测

1990年6月15日收稿

---

## Damped Nonlinear Least Squares Filtering Algorithm

Zhou Yiyu

(Department of Electronic Technology)

### Abstract

In order to improve the stability of a filter under weak observable condition, the nonlinear optimization method is used for recursive filtering and a damped least squares iterated filtering algorithm has thus been derived. The form of information square root filtering of the method is presented.

**Key words** kalman filtering, nonlinearity, least squares filtering