

用加权余量法求解弹性机构的 稳态响应

李栋成 金芝英 张启先

(国防科技大学) (北京航空航天大学)

摘要 在机构的运动弹性动力分析中, 稳态响应的求解已有了多种方法。本文通过分析、比较, 提出了用加权余量法求解弹性机构稳态响应的思想, 并给出了两种基本算法。作为应用, 本文还给出了两个算例, 其中空间四杆RS/SR机构为本文首次给出。

关键词 弹性机构, 稳态响应, 加权余量法, 空间四杆机构

分类号 TH112.5

在机构的弹性动力分析中, 稳态响应的求解, 已有了多种方法^[6], 其中较为成熟的有文献[2]的代数封闭式算法及文献[1]的富立叶级数展开法。一般来说, 计算效率以这两种为高。但封闭式算法有一个缺点, 就是它要作很多次广义特征值及特征向量的求解。这不仅很费机时, 而且对那些较为精确的、含有陀螺项的弹性动力学方程^[6]来说, 它甚至不可用。同时, 采用这种方法, 线性代数方程组的生成也比较麻烦, 不利于程序的编制。富立叶级数展开法由于要把方程所有的系数项都展开成富立叶级数, 故计算量很大; 另外, 它还存在一个系数阵的谐波阶次与广义座标的谐波阶次相互匹配的问题^[6]。

有鉴于此, 通过对各种方法进行分析、比较, 本文建议采用加权余量法(Method of Weighted Residue)求解弹性机构的稳态响应。加权余量法的优点在于它概念清楚、计算简单、易于编程且能有效地控制计算精度。

1 弹性机构稳态响应的求解

由文[4]可知, 机构的弹性动力学普遍方程为:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{\ddot{u}_0\} + \{P\} \quad (1)$$

式中 $[M]$ 是常正定阵, $[C]$ 、 $[K]$ 均为时变的对称阵。出于更为一般的理由, 这里假定方程(1)的所有系数阵都是时变的(一般的弹性动力学模型^[6]及文[5]中经模态缩减后的系统方程都是如此)函数阵。

方程(1)的稳态解的数学描述为:

1989年11月9日收稿

$L \times L$ 阶方阵。

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{m_1} \end{Bmatrix}, \text{ 它为 } L \text{ 维列向量。}$$

则式(7)可写成:

$$[B]\{r\} = \{Q\} \quad (8)$$

$$\{r\} = [B]^{-1}\{Q\} \quad (9)$$

由此即可得方程(2)的近似解 $\{\bar{u}\}$ 。

I 最小二乘配点法:

在时间区 $[0, T]$, 选取 $m_2 (m_2 > 2n + 1)$ 个配点 $t_i, i = 1, 2, \dots, m_2, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{m_2} \leq T$ 。

$$\text{令 } \sigma = \sum_{i=1}^{m_2} \{\Delta_i\}^T \{\Delta_i\} / m_2 \quad (10)$$

把 $\{\Delta_i\} = [A_i]\{r\} - \{P_i\}$ 代入上式, 有

$$\begin{aligned} \sigma = \{r\}^T & \left(\sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T [A_i] / m_2 \right) \{r\} - 2\{r\}^T \left(\sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T \{P_i\} / m_2 \right) \\ & + \sum_{i=1}^{m_2} \{P_i\}^T \{P_i\} / m_2 \end{aligned} \quad (11)$$

由泛函极值条件 $\partial\sigma/\partial\{r\} = \{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T [A_i] \{r\} - \sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T \{P_i\} = \{0\} \quad (12)$$

令 $[S] = \sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T [A_i]$, 它为 $L \times L$ 阶对称阵; $\{Q\} = \sum_{i=1}^{m_2} [A_i]^T \{P_i\}$, 它为 L 维列向量。故有

$$[S]\{r\} = \{Q\} \quad (13)$$

$$\{r\} = [S]^{-1}\{Q\} \quad (14)$$

由此即得方程(2)的近似解 $\{\bar{u}\}$ 。

2 算例

例1 (参见文献[4], 这里从略)。

例2 一空间四杆RS'SR机构, 如图1。

已知: $h_0 = 0.35\text{m}, h_1 = 0.25\text{m}, h_2 = 1.1\text{m}, h_3 = 0.55\text{m}, \alpha_{30} = 90^\circ, S_0 = S_3 = 0.7\text{m}$; 构件材料为铝合金, 密度 $\rho = 2.796 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 7.031 \times 10^{10} \text{N/m}^2$; 剪切弹性模量 $G = 2.712 \times 10^{10} \text{N/m}^2$; 截面均为半径为1.5cm的圆; 摇杆输出轴带有一转动惯量为 $8.065 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ 的飞轮。曲柄 AB 以匀角速度 $\omega = 1200 \text{rpm}$ 转动。

采用二次等参梁单元(参考文献[3]), 在曲柄 AB 、连杆 BC 及摇杆 CD 上分别划分

了3个、7个和5个等参单元，这样整个机构系统就离散为15个等参单元和18个广义座标。利用文献[5]的模态综合技术，最后可得到一自由度为24的系统弹性动力学方程。采用完全配点法（广义座标谐波阶次 $n=10$ ），在IBM4341机上进行求解。

图2及图3分别为摇杆中点外侧的弯曲应力及其横向变形在机构运转一周中的变化曲线。从图中可以看出，摇杆中点的最大弯曲应力及横向变形都发生在摇杆的回转平面内。图4为源程序计算框图。

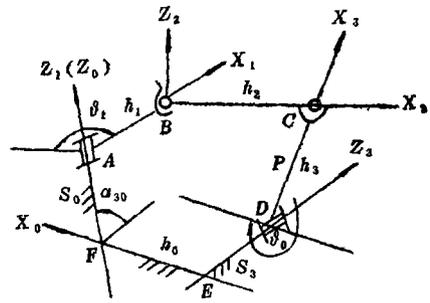


图 1

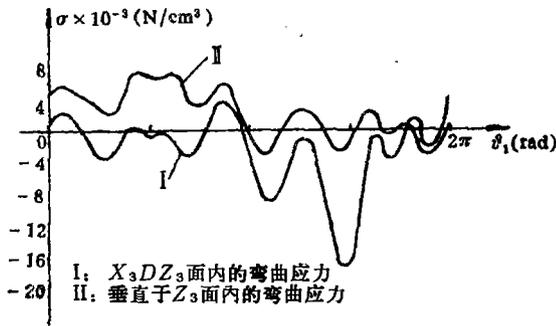


图 2 摇杆中点外侧弯曲应力

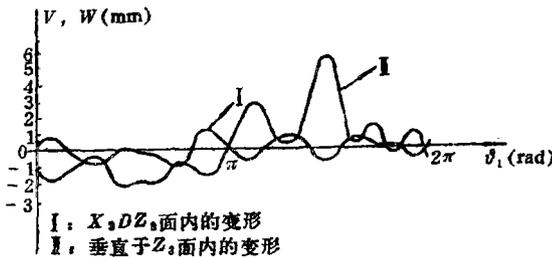


图 3 摇杆中点的横向变形

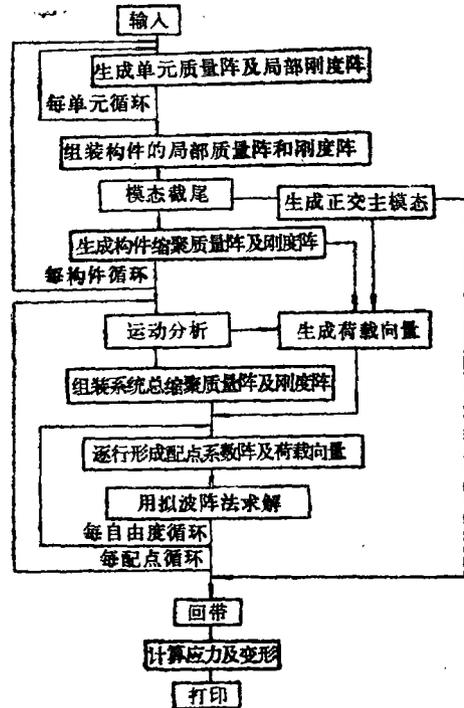


图 4 空间四杆机构源程序框图

3 结束语

加权余量法是一种很有发展前途的数值方法。由于它不必进行多次的广义特征值及特征向量的求解，也不必进行繁复的富立叶级数展开，因此无论在计算精度、计算效率还是在程序编制上，都将比其它算法优越。本文在这方面只作了些初步的尝试，所给出的两种算法也远非完善，无疑还需要作更为细致深入的研究。

参 考 文 献

- [1] Nath P K, Ghosh A. Steady State Response of Mechanisms with Elastic Links by Finite Element Method. MMT,1980,15: 199~211
- [2] Midha, Erdman A. A Closed-Form Numerical Algorithm for the Periodic Response of High-Speed Elastic Linkages. ASME, J. Eng. for Indus, 1979, 101: 154~162
- [3] 李栋成. 机构运动弹性动力分析研究. 北京航空学院硕士论文, 1987
- [4] 李栋成等. 机构运动弹性动力学普遍方程的研究, 国防科技大学学报, 1989, 11(3): 113~121
- [5] 李栋成等. 空间机器人的弹性动力分析研究. 全国第六届机构学年会, 1988
- [6] 张策. 弹性连杆机构的分析与设计. 北京: 机械工业出版社, 1989
- [7] 徐文焕, 陈虬. 加权余量法在结构分析中的应用. 北京: 中国铁道出版社, 1985

Method of Weighted Residue for the Steady State Response of Elastic Mechanisms

Li Dongcheng

(National University of Defense Technology)

Jin Zhiying Zhang Qixian

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

Many methods of the steady state response of elastic mechanisms have been developed in recent years. As a trial, this paper proposed to adopt the method of weighted residue for the periodic response. And two basic algorithms and two examples are given. Between the two examples, the spatial four-bar RS'SR mechanism is new.

Key words elastic mechanisms, the steady state response, method of weighted residue, the spatial four-bar mechanism