国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第2期 1991年6月 Vol. 13 No. 2

大系统的LQG/H_∞优化模型降阶

刘 频 王正志 张良起
（自动控制系）

摘 要 本文给出了大规模控制系统的一种新的综合LQG/H_∞模型降阶方法。该方法同时兼顾了系统的时域特性与频域特性，使得对于在状态空间形式下的大系统的降阶既尽量保持原系统的频率特性，又具有与原对象更为接近的最小二次误差。

关键词 控制系统，优化控制，大系统降阶，H_∞控制
分类号 TP273

1 引言及问题描述

在大系统的分析与综合设计中，最根本的问题之一是对原有的较为精确的高维模型进行降阶。已有的降阶方法，无论是时域方法还是频域方法，对于多输入多输出的情况均不理想，而且难以兼顾频率响应特性与时域特性的一致性。有的方法对降阶后系统的稳定性也难保证。为此，本文利用H_∞优化理论，对由时域描述的大系统，即状态方程描述的大系统，保证其频率传递函数的尽可能逼进，同时使系统输出的误差达到最小。

给定n阶大规模线性系统，其传递函数为$G(S)$：

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \tag{1}$$

$$Y(t)=CX(t) \tag{2}$$

其中X为n阶状态，U为m阶输入矢量，Y为p阶输出矢量，求其$n_1(n_1<n)$阶降模型：

$$\dot{Z}(t)=A_1Z(t)+B_1U(t) \tag{3}$$

$$Y_1(t)=C_1Z(t) \tag{4}$$

其中$Y_1\in R^p$，$Z\in R^{n_1}$，其传递函数为$G_1(S)=C_1(SI-A_1)^{-1}B_1$，使得下列指标满足：

(1) A_1为渐近稳定的；

(2) 传递函数误差满足不等式：

$$\| G(S)-G_1(S) \|_\infty \leqslant \mu \tag{5}$$

其中$\mu>0$为给定常数；

(3) $$J(A_1,B_1,C_1)=\int_0^\infty (Y-Y_1)^T\cdot r\cdot(Y-Y_1)dt \tag{6}$$

1990年6月5日收稿

达到最小，其中 $r>0$ 为给定的误差比例因子。

引入误差传递函数 $H(S)=G(S)-G_1(S)$，显然其有一实现为$\{\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C},\ 0\}$，其中

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},\qquad \overline{B}=\begin{bmatrix} B \\ B_1 \end{bmatrix},\qquad \overline{C}=[C \quad -C_1]$$

则(5)式等价于

$$\| H(S) \|_\infty \leqslant \mu \tag{7}$$

同时 $H(S)$即为输入 U 至输出误差 $Y-Y_1$ 的传递函数阵。更进一步假设原系统(1)与降阶系统(3)均为稳定的，那么二次输出误差判据(6)由下式给定：

$$J(A_1,\ B_1,\ C_1)=\mathrm{tr}\overline{Q}\,\overline{R} \tag{8}$$

其中 $\overline{Q}=\int_0^\infty[(Y-Y_1)(Y-Y_1)^T]dt,\overline{R}=rI$，满足 $\overline{N}\times\overline{N}(\overline{N}=n+n_1)$ Lyapunove 方程[1]

$$\overline{A}\,\overline{Q}+\overline{Q}\,\overline{A}^T+\overline{V}=0 \tag{9}$$

其中 $\overline{V}=r\overline{B}\cdot\overline{B}^T$.

2 主要结论

引理 1 [1] 给定 $\{A_1,\ B_1,\ C_1\}$ 且设存在对称非负定阵 Я，满足

$$\overline{A}Я+Я\overline{A}^T+\mu^{-2}Я\overline{R}Я+\overline{V}=0 \tag{10}$$

则 $(\overline{A},\ \overline{B})$ 为可稳的充要条件为 A_1 是渐近稳定的。更进一步地，在此情况下有

$$\| H(S) \|_\infty \leqslant \mu \tag{11}$$

$$\overline{Q}\leqslant Я \tag{12}$$

且

$$J(A_1,\ B_1,\ C_1)\leqslant\Psi(A_1,\ B_1,\ C_1,\ Я) \tag{13}$$

其中

$$\Psi(A_1,\ B_1,\ C_1,\ Я)\leqslant=\mathrm{tr}Я\overline{R} \tag{14}$$

由此，我们将整个问题化为一辅助最优化问题：求 $(A_1,\ B_1,\ C_1,\ Я)$ 使得 Я 为对称半负定且满足(10)式的前提下有 $\Psi(A_1,\ B_1,\ C_1,\ Я)$为最小。

首先我们定义开集：

$\Phi=\{(A_1,B_1,C_1,Я)$：Я 为正定，$\overline{A}+\mu^{-2}Я\overline{R}$ 为渐近稳定的，(A_1,B_1,C_1)为最小实现$\}$且不失一般性地设 $r=1$.

引理 2 设 $\overline{P},\overline{Q}$ 为非负定阵且设 $\mathrm{rank}\overline{Q}\,\overline{P}=n_1$，则存在 $n_1\times n$ 阵 G、Γ 及 $n_1\times n_1$ 可逆阵 M 使得：

$$\overline{Q}\,\overline{P}=G^TM\Gamma \tag{15}$$

$$\Gamma G^T=I_{n1} \tag{16}$$

更进一步地，$n\times n$ 阵 $G^T\Gamma$ 与

$$\tau=I_n-G^T\Gamma \tag{17}$$

为艾得蒙特的且分别有秩 n_1 与 $n-n_1$. 又若 $\mathrm{rank}\overline{Q}=\mathrm{rank}\overline{P}=n_1$，则

$$\overline{Q}=G^T\Gamma\overline{Q},\qquad \overline{P}=\overline{P}G^T\Gamma \tag{18}$$

若 P 为可逆非负定阵，则

$$S=(I+\mu^{-2}\overline{Q}P)^{-1} \tag{19}$$

存在。

证明 (15)～(18)式由文[2]之定理 6.2.5 直接可得。由于 $\overline{Q}P$ 的特征根对偶于非负定阵 $P^{1/2}\overline{Q}P^{1/2}$ 的特征根，故 $\overline{Q}P$ 的特征值非负，从而 $(I+\mu^{-2}\overline{Q}P)$ 的特征值实部均不小于 1，即 S 可逆。

由上面的结果可得下面的定理：

定理 1 若 $(A_1,B_1,C_1,\mathcal{R})\in\Phi$ 为辅助最优问题的解，则存在非负定阵 Q，P，$\overline{Q}$，$\overline{P}$ 使得：

$$A_1=\Gamma(A-\mu^{-4}QC^TCQPS)G^T \tag{20}$$

$$B_1=\Gamma B \tag{21}$$

$$C_1=CS_1G^T \tag{22}$$

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix}Q+\overline{Q} & \overline{Q}\Gamma^T\\ \Gamma\overline{Q} & \Gamma\overline{Q}\Gamma^T\end{bmatrix} \tag{23}$$

其中 $\Gamma G^T=I$，$\overline{P}(I_n-G^T\Gamma)=0$，$S_1=I_n+\mu^{-2}QPS$，$S$ 同(19)式，而 P，Q，$\overline{Q}$，P 满足下列方程组：

$$AQ+QA^T+\mu^{-2}QC^TCQ+\tau BB^T\tau^T=0 \tag{24}$$

$$A^TP+PA-\mu^{-4}S^TPQC^TCQPS+\tau^TS_1^TC^TCS_1\tau=0 \tag{25}$$

$$(A-\mu^{-4}QC^TCQPS)\overline{Q}+\overline{Q}(A-\mu^{-4}QC^TCQPS)^T+\mu^{-6}\overline{Q}S^TPQC^TCQPS\overline{Q}$$
$$+BB^T-\tau BB^T\tau^T=0 \tag{26}$$

$$(A+\mu^{-2}QC^TC)^T\overline{P}+\overline{P}(A+\mu^{-2}QC^TC)+S_1^TC^TCS_1-\tau^TS_1^TC^TCS_1\tau=0 \tag{27}$$

且

$$\mathrm{rank}\overline{Q}=\mathrm{rank}\overline{P}=\mathrm{rank}\overline{Q}\,\overline{P}=n_1 \tag{28}$$

同时，辅助指标由下式给定：

$$\Psi(A_1,B_1,C_1,\mathcal{R})=\mathrm{tr}C^TC(\dot{Q}+\mu^{-4}QPS\overline{Q}S^TPQ) \tag{29}$$

反之，若存在非负定的 Q，P，$\overline{Q}$，$\overline{P}$ 满足式(24)～(28)，则由式 (20) ～ (23) 所给定的 A_1，B_1，C_1，$\mathcal{R}$ 满足(10)式且 $\mathcal{R}$ 为非负定的，同时辅助指标为(29)式。

证明 为了在开集 Φ 中优化满足约束(10)的辅助指标(14)，引入 Lagrange 函数：

$$\mathscr{L}=\mathrm{tr}\{\lambda\mathcal{R}\tilde{R}+[\tilde{A}\mathcal{R}+\mathcal{R}\tilde{A}^T+\mu^{-2}\mathcal{R}\tilde{R}\mathcal{R}+\tilde{V}]\varnothing\} \tag{30}$$

其中 Lagrange 算子 $\lambda\geqslant0$ 与对称阵 $\varnothing$ 不同时为零。由于 $\tilde{A}+\mu^{-2}\mathcal{R}\tilde{R}$ 为稳定的，不失一般性，不妨设 $\lambda=1$. 由最优化原理，令

$$(\partial L)/(\partial\mathcal{R})=0 \qquad (\partial L)/(\partial A_1)=0$$

$$(\partial L)/(\partial B_1)=0 \qquad (\partial L)/(\partial C_1)=0 \tag{31}$$

且将 $\mathcal{R}$，$\varnothing$ 分块为：

$$\mathcal{R}=\begin{bmatrix}Q_1 & Q_{12}\\ Q_{12}^T & Q_2\end{bmatrix},\quad \varnothing=\begin{bmatrix}P_1 & P_{12}\\ P_{12}^T & P_2\end{bmatrix},\quad \varnothing\mathcal{R}=\begin{bmatrix}Z_1 & Z_{12}\\ Z_{21} & Z_2\end{bmatrix} \tag{32}$$

其中 Q_1，Q_2 分别为 $n\times n$，$n_1\times n_1$ 的，其余类似。则有

$$\bar{R}+[\bar{A}+\mu^{-2}Я\bar{R}]^T\varnothing+\varnothing[\bar{A}+\mu^{-2}Я\bar{R}]=0 \tag{33}$$

$$Z_2=0 \tag{34}$$

$$P_{12}^TB+P_2B_1=0 \tag{35}$$

$$-2CQ_{12}+2C_1Q_2-\mu^{-2}CQ_1Z_{12}-\mu^{-2}CZ_1^TQ_{12}-\mu^{-2}CZ_{21}^TQ_2+2\mu^{-2}C_1Z_{12}^TQ_{12}=0 \tag{36}$$

记

$$\begin{aligned} &\Gamma=-P_2^{-1}P_{12}^T && G=Q_2^{-1}Q_{12}^T \\ &\bar{P}=P_{12}P_2^{-1}P_{12}^T && \bar{Q}=Q_{12}Q_2^{-1}Q_{12}^T \\ &P=P_1-\bar{P} && Q=Q_1-\bar{Q} \end{aligned} \tag{37}$$

代入(35)式得(21)式。又将(32)式代入(33)式并展开得：

$$C^TC+A^TP_1+P_1A+\mu^{-2}C^TCZ_1^T-\mu^{-2}C^TC_1Z_{12}^T+\mu^{-2}Z_1C^TC-\mu^{-2}Z_{12}C_1^TC=0 \tag{38}$$

$$-C^TC_1+A^TP_{12}+P_{12}A_1+\mu^{-2}C^TCZ_{21}^T-\mu^{-2}Z_1C^TC_1+\mu^{-2}Z_{12}C_1^TC_1=0 \tag{39}$$

$$C_1^TC_1+A_1^TP_2+P_2A_1-\mu^{-2}C_1^TCZ_{21}^T-\mu^{-2}Z_{21}C^TC_1=0 \tag{40}$$

将(10)式展开得：

$$AQ_1+Q_1A^T+\mu^{-2}\{Q_1C^TCQ_1-Q_{12}C_1^TCQ_1-Q_1C^TC_1Q_{12}^T+Q_{12}C_1^TC_1Q_{12}^T\}+BB^T=0 \tag{41}$$

$$AQ_{12}+Q_{12}A_1^T+\mu^{-2}\{Q_1C^TCQ_{12}-Q_{12}C_1^TCQ_{12}-Q_1C^TC_1Q_2+Q_{12}C_1^TC_1Q_2\}+BB_1^T=0 \tag{42}$$

$$A_1Q_2+Q_2A_1^T+\mu^{-2}\{Q_{12}^TC^TCQ_{12}-Q_2C_1^TCQ_{12}-Q_{12}^TC^TC_1Q_2+Q_2C_1^TC_1Q_2\}+B_1B_1^T=0 \tag{43}$$

由(37)式得：

$$\begin{aligned} &Q_1=Q+\bar{Q} && P_1=P+\bar{P} \\ &Q_{12}=\bar{Q}\Gamma^T && P_{12}=-\bar{P}G^T \\ &Q_2=\Gamma\bar{Q}\Gamma^T && P_2=G\bar{P}G^T \end{aligned} \tag{44}$$

由(36)式有

$$C_1[I+\mu^{-2}\Gamma\bar{Q}PG^T]=C[I+\mu^{-2}(Q+\bar{Q})P]G^T$$

易证 $G^T[I+\mu^{-2}\Gamma\bar{Q}PG^T]^{-1}=SG^T$，代入上式即得 C_1 如(22)式。

计算 $\Gamma\cdot(42)-(43)$式得：

$$A_1Q_2=-P_2^{-1}P_{12}^TAQ_{12}+\mu^{-2}\{(Q_{12}^T+P_2^{-1}P_{12}^TQ_1)C^T(C_1Q_2-CQ_{12})\}$$

将(44)式代入整理得 A_1 如(20)式，同时有 $\Gamma(42)$式$=(43)$式。又将(20)式代入(39)、(40)式有 $G(39)$式$=(40)$式，即(40)、(43)式分别与(39)、(42)式相关，故消去(40)、(43)式并将(44)式代入(38)、(39)、(41)及(42)式整理得(24)～(27)式。

反之，由(20)～(28)式可得(10)式及(31)式。设 A_1，B_1，C_1，G，Γ，τ，Q，P，$\bar{Q}$，$\bar{P}$，$Я$ 如定理 1 所定义，又定义 Q_1，Q_{12}，Q_2，P_1，P_{12}，P_2 如(44)式，将(37)式代入(24)～(27)式并注意到(16)～(18)式得(10)及(33)式。最后注意到：

$$Я=\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}I\\ \Gamma\end{bmatrix}\bar{Q}\begin{bmatrix}I & \Gamma^T\end{bmatrix}$$

故 $Я\geqslant 0$.

定理 2 假设存在非负定的 Q，P，$\bar{Q}$，$\bar{P}$ 满足(24)～(28)式，且设 $(A_1,B_1,C_1,Я)$ 由(20)～(23)式给定，则 $(\bar{A},\bar{B})$ 为稳定的充要条件是 A_1 为渐近稳定的。在此情况下，传递函数阵 $H(S)$满足

$$\| H(S) \|_\infty \leqslant \mu$$

且二次误差判据(6)满足边界：

$$J(A_1, B_1, C_1) \leqslant \mathrm{tr} C^T C (Q + \mu^{-4} QPS\bar{Q}S^T PQ)$$

该定理的证明由引理 1 及定理 1 直接可得。

参 考 文 献

[1] Haddad W M, Bernstein D S. System & Control Letters, 1989, (12):9～16

[2] Rao C R, Mitra S K. Generalized Inverse of Matrices and Its Applications. John Wiley and Sons, New York, 1971

[3] Doyle J C, Glover, K, Khargonekar P P and Francis B A. Proc. Amer. Control Conf., Atlanta, GA, 1988: 786～788

Large—scale Systems: LQG/H_∞ Optimal Model Reduction

Liu Pin   Wang Zhengzhi   Zhang Liangqi

(Department of Automatic Control)

Abstract

A new LQG/H_∞ model reduction method for large scale systems is given in this paper. Properties in both time domain and frequency domain are considered, hence the reduction in state-space form has advantages in keeping the frequency stability and it has a less LQG error.

Key words control system, optimal control, large scale system, H_∞ control

---

我国 40 年高等教育的成就

新中国成立的 40 年来，我国高等教育为祖国社会主义现代化建设事业输送 1073 万名合格人才。近 10 年来，我国高等教育建立起完整的学位授予体系和人才培养基地。我国绝大多数学科硕士生的培养已经做到立足于国内，大多数学科的博士生培养也具备了立足国内的条件。到 1989 年底，已培养 5000 名博士和近 15 万名硕士。为了吸收国外先进的科学技术和管理办法，我国先后向 70 多个国家和地区派出留学人员，已有 5 万多人学成归来，投身于祖国建设。

（摘自《人民日报》1991 年 1 月 26 日）