

采用非线性 M 序列辨识 ARMA 模型参数

胡德文

(自动控制系)

摘要 本文研究了采用非线性 M 序列辨识 ARMA 模型参数,提出了具体的算法,在特性上同 m 序列作了比较,最后给出了仿真结果。

关键词 控制系统, 非线性 M 序列, 辨识, ARMA 模型

分类号 TP11

由于 m 序列易于产生,其参数易于调整,自相关函数近似于白噪声等特点,在工程中已获得广泛的应用。随着问题的进一步深化, m 序列也暴露了一些缺点。为此,本文作者曾提出了一种改良型 m 序列^[1],并借助于组合数学与数论,找到了更广泛的新的伪随机序列^{[2][3]}。这些序列具有良好的伪随机性质,能够很好地应用于线性与非线性系统的辨识。但是,在某些场合,我们不需要序列的自相关函数在所有的非周期点上都近于零值,如本文讨论的线性离散系统的 ARMA 模型参数估计。而非线性最大长度移位寄存器序列,即非线性 M 序列^{[4][5]}(简称 M 序列)正好能满足这一性质。同时,对于同一级数 M 序列的个数比 m 序列的个数多得多,因而它能提供更多的选择余地。

目前,关于 M 序列的研究与应用主要集中在保密通讯领域,还尚未引入系统辨识的领域中。因此,本文首先论述 M 序列的性质,接着就它在系统辨识中的应用作较详细的论述。

1 非线性 M 序列

1.1 M 序列的定义及其伪随机性

定义 对于一个 n 级非线性移位寄存器,所产生的序列周期长度 $N_n = 2^n$,则称这个序列为非线性最大长度序列,简称 M 序列。

M 序列的伪随机性:

- (1) 任一 n 级 M 序列的一个周期内“0”和“1”码元的个数各占一半,即各为 2^{n-1} 个;
- (2) 任一 n 级 M 序列中,同样长度的“0”游程个数和“1”游程个数相等,其“0”

或“1”游程长度与游程个数的关系分别为：

游程长度	1	2	...	τ	...	$n-2$	$n-1$	n	$>n$
游程个数	2^{n-3}	2^{n-4}	...	$2^{n-\tau-2}$...	1	0	1	0

(3) 任一 n 级 M 序列的自相关函数的前 n 个值为：

$$R(0) = 2^n;$$

$$R(\pm\tau) = 0, \text{ 当 } 1 \leq \tau \leq n-1 \text{ 时}$$

其中“0”用电平+1代替，“1”用电平-1代替。

这些性质的证明可参见文 [4]。

对于 $n < \tau < N, -1$ 时的 $R(\pm\tau)$ 值，没有任何规律，只能采用移位比较的一般公式把 $R(\pm\tau)$ 逐点求出来。

以上这些告诉我们，M 序列有良好的伪随机特性，因此探讨构造 M 序列的方法是有意义的。但是，M 序列不再具有移位相加特性，其自相关函数也不再具有那种简单而优越的双值特性。

1.2 M 序列的构造和产生

用 n 级移位寄存器所能产生的二进制周期序列的最大周期是 $N, = 2^n$ 。这时，一定存在一个 n 级非线性移位寄存器，它从任一初始状态出发，都产生 M 序列。关于 M 序列的构造和产生已有许多研究。下面介绍的是一种基本方法：

设

$$f(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

式中 $c_i \in F_2, i=1, 2, \dots, n-1$ ；而 $c_n=1$ ，是一个 n 次本原多项式。那么，以

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_{n-1}x_2 + \dots + c_nx_n + \bar{x}_2\bar{x}_3\dots\bar{x}_n$$

为反馈的 n 级移位寄存器从任一初始状态出发都产生一个周期为 $N, = 2^n$ 的移位寄存器序列，即 M 序列（其证明见文 [4]，第 114 页）。设 $\{d_i\}$ 为 M 序列，那么，在移位脉冲作用下，

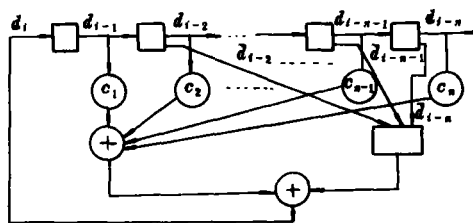


图 1 M 序列实现电路示意图

其中 $\Sigma(\cdot)$ 表示模 2 求和， $\Pi(\cdot)$ 表示乘积。图 1 是本文所用非线性 M 序列的硬件实现电路示意图。

当 M 序列用作系统辨识的输入信号时，逻辑“0”和逻辑“1”分别用 $+a$ 和 $-a$ 电平

代替。

2 ARMA 模型参数的辨识

考虑如下离散时间系统 ARMA 模型：

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_p y(k-p) + b_1 u(k-1) + \dots + b_q u(k-q) + e(k)$$

式中 $\{y(k)\}$ 、 $\{u(k)\}$ 分别为系统的输出、输入； $\{e(k)\}$ 为过程噪声，为零均值各态历经平稳时间序列，假设与输入 $\{u(k)\}$ 不相关。

取 $u(k)$ 为 M 序列信号，周期 $N_r = 2^n$ ，特别地，取： $n \geq p+q$ 。 $\tau = 1, 2, \dots$ 时，记

$$R_{xy}(\tau) = E\{y(k)u(k-\tau)\}$$

$$R_{xx}(\tau) = E\{u(k)u(k-\tau)\}$$

则又可写为：

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-\tau)$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k)u(k-\tau)$$

这时，将原系统方程式两边同时乘以 $u(k-i)$ ，并对样本取平均值，则有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-i) &= a_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-1)u(k-i) + \dots \\ &+ a_p \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-p)u(k-i) + b_1 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-1)u(k-i) \\ &+ \dots + b_q \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-q)u(k-i) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e(k)u(k-i) \end{aligned}$$

考虑到 $u(k)$ 的周期性和 $e(k)$ 的各态历经性，上式可用相关函数形式来表示：

$$\begin{aligned} R_{xy}(i) &= a_1 R_{xy}(i-1) + \dots + a_p R_{xy}(i-p) + b_1 R_{xx}(i-1) \\ &+ \dots + b_q R_{xx}(i-q) + R_{xx}(i) \end{aligned}$$

因为 $\{u(k)\}$ 与 $\{e(k)\}$ 不相关，且 $E\{e(k)\} = 0$ ，故有

$$R_{xx}(i) = 0$$

由 M 序列的伪随机性质(3)，知

$$0 < \tau \leq n-1 \text{ 时, } R_{xx}(\pm \tau) = 0$$

即 $0 < \tau \leq p+q-1$ 时, $R_{xx}(\pm \tau) = 0$

分别取 $i = p+q, p+q-1, \dots, 2, 1$ ，则得：

$$\begin{aligned}
R_{xy}(p+q) &= a_1 R_{xy}(p+q-1) + \dots + a_p R_{xy}(q) \\
&\vdots \\
R_{xy}(1+q) &= a_1 R_{xy}(q) + \dots + a_p R_{xy}(q+1-p) \\
R_{xy}(q) &= a_1 R_{xy}(q-1) + \dots + a_p R_{xy}(q-p) + b_1 R_{xx}(0) \\
&\vdots \\
R_{xy}(1) &= a_1 R_{xy}(0) + \dots + a_p R_{xy}(1-q) + b_1 R_{xx}(0)
\end{aligned}$$

在一般情况下，参数向量 $[a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_s]^T$ 的计算需求解一个 $(p+q) \times (p+q)$ 维矩阵的逆。若采用M序列，由上面的方程组可见，参数辨识分成如下较为简单的两步进行：
先计算：

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xy}(p+q-1) & R_{xy}(p+q-2) & \dots & R_{xy}(q) \\ R_{xy}(p+q-2) & R_{xy}(p+q-3) & \dots & R_{xy}(q+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xy}(q) & R_{xy}(q-1) & \dots & R_{xy}(q+1-p) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{xy}(p+q) \\ R_{xy}(p+q-1) \\ \vdots \\ R_{xy}(1+q) \end{bmatrix}$$

然后，利用已知的 $[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$ ，计算

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_s \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{xx}(0)} \begin{bmatrix} R_{xy}(1) & R_{xy}(0) & \dots & R_{xy}(1-p) \\ R_{xy}(2) & R_{xy}(1) & \dots & R_{xy}(2-p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{xy}(q) & R_{xy}(q-1) & \dots & R_{xy}(q-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{a}_1 \\ \vdots \\ -\hat{a}_p \end{bmatrix}$$

这时， $[\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p]^T$ 的计算还可以采用快速算法，如递归求逆法^[6]以及高效的非对称Toeplitz阵递归算法^[7]。

在实际辨识过程中，采样样本 N 总是有限的，但只要取 N 为M序列的周期 N ，的倍数，并利用各态历经性与周期性的假设，取

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k-i)u(k-j) &\triangleq R_{xy}(j-i) \\
\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)u(k-j) &\triangleq R_{xx}(j-i)
\end{aligned}$$

同时，对由此产生的（包括由上述替代以及有限样本 N 引起的）方程误差采用最小平方和准则，仍然得到相同的辨识算法，可以证明，这种方法渐近等价于一类辅助变量法。

3 M序列与m序列应用效果比较

(1) 从M序列的伪随机性质(3)可以看出，M序列的自相关函数远不及m序列优越，不象m序列那样具有简单而优越的双值特性。但是，在 $|\tau| \leq n-1$ 的范围内，M序列

的自相关函数 $R(\tau)$ 却呈现出比 m 序列更优越的特性：在这一段区间内非零整数点上的自相关函数严格等于零。对于本文的 ARMA 模型辨识，正好需要也仅仅需要这一特点。

(2) M 序列是一周期序列，可以象 m 序列一样方便地增加测试样本。

(3) 在一个周期内 M 序列输入信号的 $\pm a$ 个数各占一半，因而，

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i) = 0, \quad \forall i$$

若 ARMA 模型输出值存在一恒定误差(即初始测试值所造成的误差)，

$$y(k) = y^*(k) + \delta$$

(其中 $y^*(k)$ 为真实输出， δ 为误差)，则互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{xy}(i) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)u(k-i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^*(k)u(k-i) + \delta \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^*(k)u(k-i) \end{aligned}$$

由此看出，使用 M 序列作输入信号时，可消除对系统输出的初始值 $y(-\infty)$ 观测时的恒定误差。

(4) 在实际应用 m 序列时，其目的之一是用来辨识脉冲响应函数。这一点 M 序列很难代替。因为，脉冲响应函数个数往往较多，至少取 15 个以上。若要利用 M 序列的自相关函数特性，其周期就必须超过 2^{15} 。一般来讲，这是不现实的。

(5) 若辨识脉冲响应函数的最终目的是辨识 ARMA 模型参数，则 M 序列较 m 序列优越。因为， m 序列至少须预激一周期长度的时间，而 M 序列几乎不需要，从而提高了测试效率。

(6) 使用 m 序列输入辨识的第二种方法是直接应用相关分析——最小二乘二步法^[9]。这时，采用输入输出的互相关函数和输入的自相关函数作为下一步数据再辨识 ARMA 模型参数，这时须进行一个 $(p+q) \times (p+q)$ 维矩阵求逆。而采用 M 序列时，维数可降至 $p \times q$ 维。还可利用非对称 Toeplitz 矩阵特性，采用快速算法进行计算，从而大大节省计算量。若 m 序列要达到同样辨识效果(计算量)，必须令非零处自相关函数值 $(-1/N_r)$ 等于零，但这样就降低了辨识的精度。

(7) 同一级 M 序列的个数比 m 序列的(仅一个)多得多，因而提供了更多的选择余地。

(8) 在硬件实现上， M 序列产生电路需每一个抽头都参与反馈，而且还增加了与门。 m 序列产生电路一般仅须二抽头模 2 相加。因此， M 序列的硬件实现要复杂得多。若采用计算机编制软件来产生，两者差别并不明显。

4 仿真与结果比较

为了验证本文方法的优越性,考虑如下二阶系统:

$$y(k) = 1.5y(k-1) - 0.7y(k-2) + u(k-1) + 0.5u(k-2) + e(k)$$

其中 $\{e(k)\}$ 为白噪声序列, $e(k) \sim N(0,1)$.

(1) 采用不同的输入信号: 5级M序列、5级m序列, 幅度均为 ± 1 , 采样周期数均为1, 共仿真20次, 其平均值如下表:

表 1

	a_1	a_2	b_1	b_2	ERR
真实值	1.5	-0.7	1	0.5	0
采用M序列	1.464725	-0.76357	0.97688	0.542285	4.33%
采用m序列	1.538545	-0.851045	0.89644	0.529685	9.49%

表中ERR表示相对误差:

$$ERR = \sqrt{(\hat{\theta} - \theta)^T (\hat{\theta} - \theta) / (\theta^T \theta)} \times 100\%$$

其中: $\hat{\theta}$ ——参数的估计值; θ ——参数的真实值。

(2) 若在输出的数据上存在一恒定的误差(由初始值 $y(-\infty)$ 测量不准确所引起), 取 $\delta=0.1$, 则采用5级m序列辨识20次的平均值的误差 $ERR=10.7\%$, 而采用5级m序列的数值误差不受 δ 影响。

(3) 在辨识算法中, 为了保证算法的简易快速性, 而令m序列的自相关函数 $R_m(\tau) \approx 0$, ($0 < |\tau| < N_p - 1$). 仿真20次, 每次输入为10个m序列周期, 再取平均值, 得:

$$\hat{a}_1 = 1.5740, \quad \hat{a}_2 = -1.0525, \quad \hat{b}_1 = 0.7951, \quad \hat{b}_2 = 0.8681.$$

相对误差 $ERR=27.7\%$. 采用M序列时, 无这种近似误差出现(无噪声时)。

5 结 论

本文首次将非线性M序列作为输入信号, 引入系统的参数辨识, 分析了其应用的优越性, 并用仿真结果进行了验证。采用M序列不仅可以消除系统输出观测值的静态误差, 大大地节省运算量, 几乎不须预激时间, 而且还可以提高系统的辨识精度。M序列应用于系统辨识具有良好的前景。

参 考 文 献

- [1] 胡德文. 改良型m-序列及其应用. 控制理论与应用, 1986, 3(1)
- [2] Hu Dewen and Shi Ren. Optimal Input Design for MA-model. International Conference on MTNS-87, Arizona, American, 1987
- [3] Hu Dewen, Wan Baiwu and Shi Ren. Optimal Input Design for Identifying the Impulse Response Functions and the statistic Properties. Proc. of 8th IFAC International conference on Identification and System Parameter Estimation, Beijing, 1988P12, 854~859
- [4] 万哲先, 代宗铎, 刘木兰, 冯绪宁. 非线性移位寄存器. 科学出版社, 1978
- [5] 肖国镇, 梁传甲, 王育民. 伪随机序列及其应用. 国防工业出版社, 1985
- [6] Carayannis G. An Alternative Formulation for the Recursive Solution of the Covariance and Autocorrelation Equa-

tions. IEEE Trans. ASSP, 1977, 25: 574~577

- [7] Carayannis G, et al. Fast Recursive Algorithms for a Class of Linear Equations. IEEE Trans. ASSP, 1982, 30: 227~239
- [8] Isermann R and Bauer U. Two-step process Identification with Correlation Analysis and Least-Squares Estimation. Trans. ASME, 1974: 426~432

Identification of ARMA Model Parameters Using Nonlinear M—sequence

Hu Dewen

(Department of Automatic Control)

Abstract

In this paper, the problem of identification of ARMA model parameters using nonlinear M—sequence is studied and detailed algorithms are proposed. It has been compared with the m—sequence and the simulation results has been given.

Key words control system, nonlinear M—sequence, identification, ARMA model

首届中苏宇航科技讨论会

第一届中苏宇航科学与技术讨论会, 1月20日在哈尔滨工业大学闭幕。这届由两国知名宇航科学工作者参加的学术会议, 是由哈尔滨工业大学、中国宇航学会、中国运载火箭技术研究院、中国空间技术研究院和西北工业大学等单位联合举办的。我国从事宇航科技研究的科研单位、高等院校与苏联国立包曼技术大学、古比雪夫航空学院、莫斯科航空学院、苏联科学院共60多个单位的170多名专家学者出席了会议。

中苏两国学者就共同关心的航天器的结构与材料、动力学与控制、设备与仪器、运载技术、空间微重力与流体力学、空间电子学等进行了交流与讨论, 一批在国际上有名望的著名学者的报告, 引起了与会学者的高度重视。

(摘自《中国航空航天报》1991年1月26日)