国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第2期 1991年6月 Vol. 13 No. 2

状态空间中的 H_∞ 控制方法研究

博士论文摘要

刘 频
（自动控制系）

摘 要 本文简要介绍了 H_∞ 控制方法的发展与应用。给出了作者博士论文期间的主要工作。

关键词 线性系统，H_∞ 控制，状态空间实现，鲁棒控制
分类号 TP273

最优化控制是本世纪五六十年代发展起来的现代控制理论的一个重要组成部分。其研究的中心问题是：怎样选择控制规律才能使控制系统的性能及品质在某种意义下是最优的。而本世纪80年代出现的 H_∞ 设计方法是利用 H_∞ 范数来度量控制特性的一种新的优化控制方法。尽管该方法仍处于继续研究和发展的阶段，但它以已显示出的一系列优越性而一跃成为当今控制理论研究中的一个前沿课题。

当前控制系统设计的主要任务之一是克服各种不确定性对系统特性的不良影响。一般地说，在古典的自动控制领域中，各种综合设计方法，如30年代以来建立的基于系统频率响应的 Nyquist 图和 Bode 图的单变量频率域设计方法，虽然能适应一定程度的不确定性，并且以其直观和便于应用常能较好的解决许多实际的单变量控制问题。但是这类方法对于多变量系统则存在极大的局限性。虽然在60年代末形成的多变量系统的频率域设计方法，如逆 Nyquist 阵列（INA）方法（Rosenbrock，1974）、特征轨迹（CL）方法（MacFarlane，1980）等，能解决一些多变量频率设计问题，但又存在闭环系统鲁棒性不好的弱点（Doyle，Stein，1981）。同时，所有这类综合设计方法本质上均属于探索性质，因而与设计人员的经验有很大关系。而最优控制理论使得在严格的数学基础上获得使描述系统性能与品质的某个“性能指标”达到最优值的控制规律成为可能。其中最重要的成果之一是线性二次型高斯最优设计方法，即 LQG 方法。它最大的优点在于：它使寻找多变量线性系统的最优反馈控制规律及对高斯白噪声过程的干扰的有效衰减变得简易可行。但是 LQG 方法亦存在着一个很大的弱点，这就是不能直接处理不确定性，从而可能

1990年7月5日收稿

导致闭环系统鲁棒性能欠佳。

1981 年，Zames 等人为弥补上述方法的缺陷，从根本上解决控制系统的鲁棒性问题，提出了 H_∞优化控制理论。该理论是现代控制理论的一个延拓和发展。其基本出发点在于将优化控制特性改以 H_∞范数来度量。对于一个稳定的传递函数阵 $G(S)$，其 H_∞范数定义为：

$$\| G(S) \|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}[G(j\omega)]$$

其中 $\sigma_{\max}[G]$表示 G 的最大奇异值。从物理意义上讲，H_∞范数就是一个“极大极小”问题。这里的“极大”表示在所有的干扰情况下，系统的最大输出能量。而“极小”则表示使系统的最大输出能量为最小。或者我们给出一个等价的更为直观的定义：设输入 $d(t)$为有限能量信号，其拉氏变换为 $D(S)$，系统为渐近稳定的，具有传递函数 $P(S)$，输出为 $y(t)$，相应拉氏变换为 $Y(S)$，则 $P(S)$的 H_∞范数定义为

$$\| P(S) \|_\infty = \sup_{D(S)} \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |D(j\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}} = \sup_{d(t)} \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt \right]^{1/2}}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d^2(t) dt \right]^{1/2}}$$

由这个等价定义我们可以直观地看出，传递函数的 H_∞范数描述了输入有限能量信号传递到输出的最大能量放大倍数。因此，按这种思想方法得到的控制器能使外界干扰对于系统的影响达到最小。H_∞设计方法，就是以系统的某类频率特性（传递函数）的 H_∞范数作为性能指标来进行控制系统的优化设计的方法。

1 H_∞理论、应用及其发展状况

近十年来，H_∞设计方法不论是从理论研究方面还是从实际应用方面都取得了引人注目的发展。与经典控制理论和现代控制理论相对应地，H_∞设计理论从思想方法上讲分为两大类，即频率设计方法和时间域（状态空间形式）设计方法。由于 H_∞设计思想首先是从频率域上提出来的，因而近几年来在频率域设计方面，已取得了丰硕的结果。首先 Zames 和 Francis 解决了单输入单输出系统的最优问题，给出了一般形式的解。随后，许多学者利用各种数学工具如 N－P 插值法、Hankel 算子理论、内外分解理论等等，开始对一般性的多输入多输出系统进行研究，提出了多种求 H_∞最优解的算法。他们还将 H_∞理论的适用对象推广到线性时变系统、自适应系统、分布参数系统、广义系统和时延系统。他们中比较突出的有：J. Doyle，J. Zames，B. Francis，M. Vidyasagar，I. Postlethwaite，K. Glover，M. Grimble，M. Safanov，H. Kwakernaak，H. Kimura 等。

首先，Zames 和 Francis(1983)指出，使加权灵敏度指标 $\| WS \|_\infty$($S=(I+GK)^{-1}$为灵敏度函数)达到最小的最优函数 $X=WS$ 具有全通(all-pass)形式。他们利用 P－N 插值理论给出了 SISO 系统在右半平面为单重零点时的最优函数解。尔后，Z. Z. Wang、J. Pearson 与 Chang 在 1984 年对多重零点及 MIMO 的情况进行了探讨。1985 年，Kwarkernaak 给出了利用多项式方法求取 H_∞最优控制器的解法。Hatori 讨论了在有传感器噪声情况下的灵敏度指标极小化问题。Helton（1986）则讨论了单变量系统的多目标设计问题。Glover 亦在 1984 年给出了一种最优近似算法。还有许多学者对综合灵敏度指标及一般性能指标设计问题进行了探讨（Verma，Jonckheere，1984；Kwakernaak，1985）. Jonckheere，Verma

(1986) 和 Jonckheere，Juang (1987) 分别给出了两种以估计 T－H 算子谱半径的逼近算法；Chu 等 (1986) 提出的 γ 叠代算法是使用得较多的方法。Chen，Kung (1984) 讨论了在 Hankel 范数下的最优设计问题。Limebeer (1987，1988) 研究了 H_∞设计中出现的零极点相消的问题，指出对 McMillan 度为 n 阶的对象，存在阶数小于或等于 $n-1$ 的最优控制器。Tsai，Gu (1988) 研究了加强的 H_∞最优问题，并给出了 H_∞超最优解的求法。所得的超最优控制器不仅极小化了指标的最大奇异值 (H_∞范数)，还极小化了指标的其余奇异值，因而具有更好的鲁棒性。两自由度控制器设计方法 (Vidyasagar，1985) 给设计者提供了更多的设计自由度，是兼顾鲁棒性与跟踪性能的有效方法。

然而，最为引人注目的是近两三年提出的 H_∞优化问题的状态空间解法，在这方面，首推 Glover，Francis，Doyle 与 Khargonekar 等人的工作。他们对模型匹配等问题给出了在一定约束条件下的状态空间形式的次优解。另外，W. Haddad 与 D. Bernstein (1989) 将 H_∞指标与 LQG 指标相结合，得出了一些富有启发性的结果。在时间域的 H_∞设计中，解代数 Riccati 方程 (ARE) 是一个中心问题。很多学者还对 H_∞范数与 ARE 之间的关系展开了一些有益的讨论(R. J. Veillette，J. V. Medanic，1989；Zhou，Khargonekar，1988；M. Sampei，T. Mita 与 M. Nakamichi，1990 等)。尽管整个状态空间解法尚在发展初期，但其更便于计算机实现的特点使其将展现出越来越大的优越性。

国内控制界对 H_∞理论的研究工作虽然起步较晚，但亦取得了一些可喜的进展。除了前面提到的顾大伟博士 (Gu) 在超优稳定性等方面的工作，以及王正志教授 (Z. Z. Wang) 在 MIMO 插值优化方法中的成果外，北京航空航天大学的路精保博士在 1987 年给出了 α 稳定裕度的设计方法和 H_∞链优化问题非矩阵迭代方法的设计算法；上海交大的徐冬玲博士与施松椒教授 (1988，1989) 将 H_∞设计方法应用于广义系统的设计；而胡庭姝，施松椒教授 (1989，1990) 又给出了状态反馈系统的 H_∞灵敏度最小化设计的算法，同时讨论了带有观测器的问题。在实际应用方面，清华大学的范玉顺博士与吴麒教授、中科院系统所的王恩平付研究员应用 H_∞理论对倒立摆平衡控制系统与汽轮发电机控制器进行设计取得了一些令人满意的结果 (1990)；上海交大的张愈文，吴智铭，叶庆凯，毛剑琴 (1988) 给出的采用分割映射方法求解带容差的 H_∞优化设计方法则能够解决比较符合实际工程要求的问题。

然而，作为一种优化理论，H_∞方法还远非完美，还有许多问题亟待解决。主要有以下几个方面：

(1) 控制阶次偏高。

已有的大多数 H_∞优化控制算法，不论是频率域的还是时间域的，大都存在着控制器阶数偏高的缺点。这对直接应用 H_∞理论来解决实际问题是一个很大的障碍。

(2) 算法极繁琐。

对于频率域解法尤其明显。即使是对于时间域的状态空间方法，虽然利用计算机求解 ARE 的问题已经解决，但对很多实际问题及一些 LQG/H_∞的理论问题，整体算法仍觉偏繁。

(3) 控制器的不稳定性。

在 H_∞设计方法中，尤其是对于模型匹配问题的解法，不能保证所得的控制器本身是

稳定的。事实上常常出现不稳定的情况。这就给实际应用带来了很大的困难。这是因为不稳定的控制器在实际制作时不仅调试不方便，而且在有测量噪声时容易饱和且可靠性低。因此，如何保证控制器的稳定性是使这类方法能有效地应用于实际问题的关键。

(4) 虚轴零点问题。

对于多输入多输出系统，现有的结果都对虚轴上的极点的分布有一定的约束（如至少是块零点或无零点)。而有的学者提出的对象平移方法，在理论上和实际应用中都有待完善和补充。

2 作者的主要工作与研究背景

根据 H_∞控制理论的发展要求和实际存在的问题，为了使 H_∞理论能够更有效地应用于实际工程问题，也为了利用计算机这一有力的工具对实际系统进行 H_∞综合设计，本文从时间域出发，将算子理论与状态空间方法相结合，对状态空间形式下的 H_∞优化控制设计问题进行了较为详细的研究。并给出了一整套便于在计算机上实现的设计计算方法。同时，在此基础上，建立了计算机辅助设计软件包。作者的主要工作如下：

(1) 对一般情况下的标准的模型匹配问题，给出了状态空间形式下的显式解。

首先，我们简单说明一下什么是模型匹配问题。所谓模型匹配问题，即是对于已知的对象 T_1、T_2 和 T_3，求出稳定的控制器 Q 使得干扰 ω 对输出 Z 的影响尽可能的小（参见图 1)。表示成数学形式，即

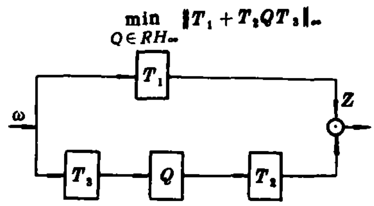

图 1 模型匹配问题

$$\min_{Q\in RH_\infty} \| T_1 + T_2QT_3 \|_\infty$$

文中主要讨论了次优问题，即

$$\| T_1 + T_2QT_3 \|_\infty < \mu$$

这里 μ 为给定正数。根据 T_i，$i=1$，2，3 的维数可将模型匹配问题分为三大类，即

1－块问题：　$\| T_{11}+Q \|_\infty<\mu$

2－块问题：

$$\left\| \begin{matrix} T_{11}+Q \\ T_{12} \end{matrix} \right\|_\infty < \mu \qquad \text{或} \qquad \| [T_{11} + QT_{12}] \|_\infty < \mu$$

4－块问题：

$$\left\| \begin{matrix} T_{11}+Q & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{matrix} \right\|_\infty < \mu$$

之所以要解决模型匹配问题是因为 H_∞控制问题有很大一部分可以归结为模型匹配问题。Francis 等人给出了系统参数正交情况下该问题的解。而 Doyle 则给出了一块与四块问题中 $T(S)$的状态空间实现的 D 矩阵为零时的特解。为了使模型匹配问题的解能够更有效地

用来解决其余的扩展控制问题，我们需要一个系统约束条件尽可能小的，对实际系统应用更为方便、更为适应的通解。基于此目的，我们对一块、两块和四块全部三种情况进行了研究，给出了 $D\neq0$ 的显式通解。需要指出的是：在各类控制问题中，$D=0$ 的条件是很苛刻的，对有的问题甚至是不可能满足的。而 $D\neq0$ 的显式通解在推导上要比 $D=0$ 的解复杂得多。作者利用矩阵正交分解的原理来解决了谱分解的困难，从而使该问题获得通解。详见文献 [1].

(2) 给出了动态反馈问题的非内外分解方式的显式解。

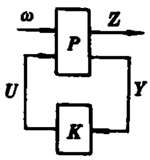

图 2 动态反馈控制器设计

通常，动态反馈问题总能化为模型匹配问题。然而在求解过程中，往往需要用求解两个 Riccati 方程来获得这个模型匹配问题的内外分解，从而化为标准形式。这不仅增大了运算量，而且还有可能加大所设计出的控制器的维数。为了解决这个问题，作者提出了一种新的思路，并在文中以一块问题为具体例子，详细给出了整个思路的理论基础及具体设计方法。这种设计方法可以很容易的推广到二块与四块问题当中去。从结果来看，这种方法减少了求解 Riccati 方程的次数，这使在实际设计中的误差得以降低。

(3) 给出了跟踪问题与鲁棒稳定性问题的状态空间显式解。

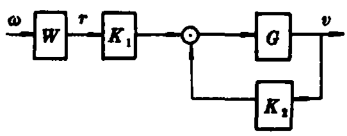

图 3 跟踪问题

作者对控制系统设计中的典型问题：跟踪问题与鲁棒稳定性控制问题（见图 3 与图 4）进行了详细的讨论。并利用前面获得的结果，给出了这些问题的 H_∞次优化设计的显式通解，给出了将 H_∞应用于实际问题的求解思想方法。

(4) 提出一种新的具有 H_∞边界的 Kalman 滤波器。

为了改进标准 Kalman 滤波器的鲁棒性，作者对所需观测的系统 H_∞范数边界约束和 LQG 指标进行滤波器的综合设计，以求在噪声频谱不准（发生变化）时，也有较好的滤波特性和状态空间估计。同时，对标准的 Kalman 滤波器的 H_∞特性以及新的 LQG/H_∞滤波器与标准的 Kalman 滤波器的差异与包容特性进行了理论上的详尽分析和讨论，得到一些有价值的结论。如：

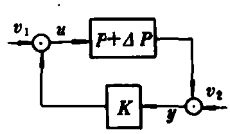

图 4 具有摄动对象的反馈系统

(a) 当 μ 充分大时，两种滤波器是等价的，即 LQG/H_∞滤波器是标准 Kalman 滤波器的延拓，前者包容了后者，而后者是前者的特例。

(b) 对于 LQG/H_∞滤波器来说，性能指标的好坏与 μ 的取值大小密切相关。从仿真结果来看，μ 越小，所能达到的 J 就越大。

(c) 当噪声谱分布有摄动或噪声谱分布发生变化时，LQG/H_∞方法显示出比标准 Kalman 滤波器优越的鲁棒性。

(5) 提出一套新的 LQG/H_∞动态反馈控制器设计方法和算法。

利用模型匹配标准形式解动态反馈控制问题虽然已有通解（见上面(3)），但控制器本身的稳定性不能得到充分的保证。同时，控制器的阶次很有可能偏高。为了弥补这个缺陷，更为了使 H_∞优化控制问题的指标明朗化，以便于更好的运用于工程实际，我们提出了新的 LQG/H_∞动态反馈控制器设计方法。该方法不同于 Bernatein 等人的方法在于：从另外两个低阶的 Riccati 方程入手进行讨论，不仅解决了求解过程中的 Riccati 方程组的耦合性问题，而且使获得的解更为显式，整个设计过程更为直接，计算机实现也更为方便。同时，给出了运算框图与计算实例。

(6) 提出了一种新的大系统降阶方法。

作者将 LQG/H_∞综合设计思路应用于大系统中，提出了一种新的 LQG/H_∞综合降阶方法。尝试使系统的降阶既保持原稳定性，又具有与原对象更为接近的最小二次误差。

(7) 进行了一系列计算机实例仿真。

为了验证上面的理论分析与所得到的结果的正确性，作者文章最后给出了计算机实例仿真结果。建立了下面一系列设计方法的计算机软件程序包：(a) 标准模型匹配 2－Block 问题通解程序包；(b) 鲁棒问题求解程序包；(c) 对标准的 Kalman 滤波器的 H_∞特性以及新的 LQG/H_∞滤波器与标准的 Kalman 滤波器的差异与包容特性进行了计算机实例分析和讨论，得出了一系列对比结果，直观地再现了二者的差异与包容特性。

致　谢

本文是在导师张良起教授和副导师王正志教授的精心指导下完成的，借此机会向他们表示深切的谢意。作者在上机实验与论文打印期间，得到了肖树立高级工程师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] 刘频，王正志，张良起．状态空间形式下的 H_∞优化控制问题．国防科技大学学报，1990，12(2)

[2] Zames G. IEEE Trans. Auto. Control，1981，26：301～320

A Study of State-space Solutions to H_∞ Control Problems

Liu Pin

(Department of Automatic Control)

Abstract

The development and applications of H_∞ optimal control theory are introduced and major results are given in this paper.

Key words　linear system，LQG control，H_∞－optimizing，robust control