

经典  $f$ 、 $g$  级数的修正法

李晓明

(自动控制系)

**摘要** 文中对开普勒轨道方程中的经典  $f$ 、 $g$  级数进行修正,使其适用于考虑主要带谐项的摄动情形,克服了  $f$ 、 $g$  级数仅用于开普勒轨道短弧段的限制。公式的推导借助计算机完成。使用此方法所得结果与使用数值积分方法所得结果比较:该方法速度快、精度高、可直接得到连续的状态。该方法简洁有效,在航天导航和制导领域具有很大实用价值。

**关键词** 航天动力学, 轨道, 摄动, 轨道预报, CA

**分类号** V413

在航天飞行器的轨道计算,特别是人造地球卫星的轨道预报时,可用普遍摄动和特殊摄动两种方法。前者是基于对飞行器的受力环境作一些近似假设,并用一定的数学模型表示,从而得到具有一定精度的解析解,其结果表达式往往很繁杂,不便使用。后者精度高,可以包含所有作用力。随着计算机技术的发展,目前倾向于用特殊摄动法进行轨道预报。这时只能给出离散的状态,因而要进行高阶插值运算,以得到希望时刻的状态。通常,长时间的状态外推均以大步长多步法进行,以减少累积误差。

在状态外推时间不太长的情况下,一般可略去摄动,用开普勒轨道进行计算。这时,有很多状态外推的方法。由于开普勒方程为一超越方程,在以时间为变量的状态外推法中,除  $f$ 、 $g$  级数方法外,都需迭代求解。

$f$ 、 $g$  级数的缺点是收敛慢,高阶项的表达式较长,不便应用,且仅适于开普勒轨道。然而在很多场合需要考虑主要的摄动,从而限制了  $f$ 、 $g$  级数法的使用范围。

本文在作了合理近似的基础上,得到了考虑主要带谐项  $J_2$  项的修正  $f$ 、 $g$  级数。借助计算机代数系统 REDUCE,推导出较高阶的结果。推导出的公式以 FORTRAN 程序格式输出,使编程时避免了输入错误。为 REDUCE 系统编制的程序可以推导出更高阶的结果。与数值积分的结果进行的比较表明,结果是正确的,从而克服了经典  $f$ 、 $g$  级数的不足。

1 经典  $f$ 、 $g$  级数<sup>[1]</sup>

对于开普勒轨道,已知  $t_0$  时刻的状态  $\vec{r}_0$ 、 $\vec{v}_0$ ,则对于任一时刻  $t$ ,其位置矢量可表示为  $\vec{v}_0$  和  $\vec{r}_0$  的线性组合,因为  $\vec{r}$ 、 $\vec{r}_0$  和  $\vec{v}_0$  总是位于同一固定平面。 $\vec{r}_0$  及  $\vec{v}_0$  在线性组合中的

硕士生论文

1990年8月25日收稿

系数为  $t$ 、 $\dot{r}_0$  和  $\dot{v}_0$  的函数，可表示为

$$\dot{r}(t) = f(\dot{r}_0, \dot{v}_0, t)\dot{r}_0 + g(\dot{r}_0, \dot{v}_0, t)\dot{v}_0 \quad (1)$$

函数  $f, g$  可以通过  $\dot{r}$  在  $t=t_0$  按台劳公式展开求得：

$$\dot{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \dot{r}_0^{(n)} \quad (2)$$

这里

$$\dot{r}^{(n)} \equiv \left. \frac{d^n \dot{r}}{dt^n} \right|_{t=t_0} \quad (3)$$

由于不考虑摄动，则开普勒轨道总是位于一个固定平面内， $\dot{r}$  的各阶时间导数也必位于该平面内，并可写为

$$\dot{r}^{(n)} = F_n \dot{r} + G_n \dot{v} \quad (4)$$

对时间求导：

$$\dot{r}^{(n+1)} = \dot{F}_n \dot{r} + F_n \ddot{r} + \dot{G}_n \dot{v} + G_n \ddot{v} \quad (5)$$

但  $\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{r}$ ，令  $u = \frac{\mu}{r^3}$ ，上式可写为

$$\dot{r}^{(n+1)} = (\dot{F}_n - uG_n)\dot{r} + (F_n + \dot{G}_n)\dot{v} \quad (6)$$

与(4)式比较，可得如下公式：

$$F_{n+1} = \dot{F}_n - uG_n \quad (7)$$

$$G_{n+1} = F_n - \dot{G}_n \quad (8)$$

将  $n=0$  代入(4)式，可得  $F_0=1, G_0=0$ 。

引入以下变量：

$$u = \frac{\mu}{r^3}, \quad p = \frac{1}{r^2}(\dot{r} \cdot \dot{v}), \quad q = \frac{1}{r^2}(v^2) - u \quad (9)$$

注意到  $\dot{r} \cdot \dot{v} = r\dot{r}$ ， $\ddot{r} = -u\dot{r}$ ，可得

$$\dot{u} = -3up \quad (10)$$

$$\dot{p} = q - 2p^2 \quad (11)$$

$$\dot{q} = -p(u + 2q) \quad (12)$$

到此，即可递推求出  $F_n, G_n$ 。用计算机求得的直到  $n=10$  的结果（见附录 1）。

令  $\tau = t - t_0$ ，则

$$f(\dot{r}_0, \dot{v}_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} [F_n]_{t=t_0} \quad (13)$$

$$g(\dot{r}_0, \dot{v}_0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} [G_n]_{t=t_0} \quad (14)$$

可以看到，高阶导数虽然可一直求下去，但表达式太繁，一般取到 10 阶即可。参数  $u, p, q$  的引入使展开式的项数大为减少。如取 10 阶作为近似，当  $|t-t_0| \leq 10$  分钟时，用  $f, g$  级数计算的结果误差在米级（对于近地轨道）。

显然， $f, g$  级数取前 10 项相当于普通的 10 阶数值积分，但能得到连续的状态。只要知道  $\dot{r}_0, \dot{v}_0, t_0$ ，则反复使用它即可不断求得以后的状态，精度与同阶的数值积分相当。

## 2 考虑 $J_2$ 项的修正 $f, g$ 级数

$f, g$  级数实际上是建立在台劳公式展开的基础上的。为使导数的表达式简单,在求解中用了变量置换的方法。下面是考虑主要带谐项  $J_2$  时的情况。

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \delta\dot{\vec{r}} \quad (15)$$

这里,  $\dot{\vec{r}}_0$  为不考虑  $J_2$  部分时的位矢,  $\delta\dot{\vec{r}}$  为  $J_2$  项的摄动部分,  $\dot{\vec{r}}$  为实际位矢(忽略更高阶摄动), 则

$$\dot{\vec{r}}^{(n)} = \dot{\vec{r}}_0^{(n)} + (\delta\dot{\vec{r}})^{(n)} \quad (16)$$

高阶导数可分为两部分:  $\dot{\vec{r}}_0^{(n)}$  为开普勒轨道的解, 可用上述的经典  $f, g$  级数求出;  $(\delta\dot{\vec{r}})^{(n)}$  为  $J_2$  项引起的摄动部分的  $n$  阶导数。现在来求  $(\delta\dot{\vec{r}})^{(n)}$ 。

因  $\dot{\vec{r}} = (X, Y, Z)^T$ ,  $\delta\dot{\vec{r}} = (\delta X, \delta Y, \delta Z)^T$ , 则

$$\begin{cases} (\delta X)^{(2)} = JX(r^2 - 5Z^2)/r^7 \\ (\delta Y)^{(2)} = JY(r^2 - 5Z^2)/r^7 \\ (\delta Z)^{(2)} = JZ(3r^2 - 5Z^2)/r^7 \end{cases} \quad (17)$$

这里  $J = -\frac{3}{2}J_2$ , 因取正则计算单位\*,  $\mu=1$ 。

设  $\delta\dot{\vec{r}} = (\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1)^T + (\delta X_2, \delta Y_2, \delta Z_2)^T$ , 分为如下两部分:

$$\begin{cases} (\delta X_1)^{(2)} = JX/r^5, & (\delta X_2)^{(2)} = -5JZ^2X/r^7 \\ (\delta Y_1)^{(2)} = JY/r^5, & (\delta Y_2)^{(2)} = -5JZ^2Y/r^7 \\ (\delta Z_1)^{(2)} = 3JZ/r^5, & (\delta Z_2)^{(2)} = -5JZ^2Z/r^7 \end{cases} \quad (18)$$

只要求出  $\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1, \delta X_2, \delta Y_2, \delta Z_2$  的各阶导数, 即可得到  $\delta\dot{\vec{r}}^{(n)}$ 。这时运动不在一个固定平面, 推导时将用分量形式。

### (1) $\delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1$ 的求法

仍采用式(9)的定义, 并注意  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \hat{v}/r = r\dot{p}$ , 则

$$(\delta X_1)^{(3)} = (JX/r^5)' = J\dot{X}/r^5 + JX\left(\frac{1}{r^5}\right)' \triangleq F_1(3)X + G_1(3)\dot{X} \quad (19)$$

⋮

若  $(\delta X_1)^{(n)} = F_1(n)X + G_1(n)\dot{X}$ , 则

$$(\delta X_1)^{(n+1)} = \dot{F}_1(n)X + F_1(n)\dot{X} + \dot{G}_1(n)\dot{X} + G_1(n)\ddot{X} \quad (20)$$

如略去高阶小量, 认为  $\ddot{X} = -uX$ , 则

$$(\delta X_1)^{(n+1)} = [\dot{F}_1(n) - uG_1(n)]X + [F_1(n) + \dot{G}_1(n)]\dot{X} \quad (21)$$

依此类推, 可得

$$\begin{cases} F_1(n+1) = \dot{F}_1(n) - uG_1(n) \\ G_1(n+1) = F_1(n) + \dot{G}_1(n) \end{cases} \quad (22)$$

初值为:

\* 正则单位: |DU<sub>⊕</sub> = 6378.145km(距离单位),  
|TU<sub>⊕</sub> = 806.8118744sec(时间单位)

$$\begin{cases} F_1(0) = G_1(0) = F_1(1) = G_1(1) = 0 \\ F_1(2) = J/r^5, G_1(2) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

由此可递推求得  $F_1(n)$ ,  $G_1(n)$ . 直到  $n=8$  的结果 (见附录 2)。

这样

$$(\delta X_1)^{(n)} = F_1(n)X + G_1(n)\dot{X} \quad (24-1)$$

同理

$$(\delta Y_1)^{(n)} = F_1(n)Y + G_1(n)\dot{Y} \quad (24-2)$$

$$(\delta Z_1)^{(n)} = 3[F_1(n)Z + G_1(n)\dot{Z}] \quad (24-3)$$

这同经典  $f, g$  级数形式一样简洁。

### (2) $\delta X_2, \delta Y_2, \delta Z_2$ 的求法

仍采用式(9)的定义。注意  $\dot{Z} = v_Z$ ,  $\ddot{Z} = -uZ$ , 则与(1)中类似, 有

$$\begin{cases} (\delta X_2)^{(n)} = F_2(n)X + G_2(n)\dot{X} \\ (\delta Y_2)^{(n)} = F_2(n)Y + G_2(n)\dot{Y} \\ (\delta Z_2)^{(n)} = F_2(n)Z + G_2(n)\dot{Z} \end{cases} \quad (25)$$

或

$$(\delta \vec{r}_2)^{(n)} = F_2(n)\vec{r} + G_2(n)\dot{\vec{v}} \quad (26)$$

仍用递推关系

$$\begin{cases} F_2(n+1) = \dot{F}_2(n) - uG_2(n) \\ G_2(n+1) = F_2(n) + \dot{G}_2(n) \end{cases} \quad (27)$$

初始条件为

$$\begin{cases} F_2(0) = G_2(0) = F_2(1) = G_2(1) = 0 \\ F_2(2) = -5JZ^2/r^7 \\ G_2(2) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

直到  $n=8$  的结果(见附录 3)。

### (3) $\vec{r}^{(n)}$

由式(16)的定义, 可得考虑  $J_2$  摄动项的台劳展开式中的各阶导数如下:

$$\vec{r}^{(n)} = (F_n\vec{r} + G_n\dot{\vec{v}}) + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 3Z \end{bmatrix} F_1(n) + \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 3\dot{Z} \end{bmatrix} G_1(n) + G_2(n)\dot{\vec{v}} + F_2(n)\vec{r} \quad (29)$$

令  $F_0(n) = F_n$ ,  $G_0(n) = G_n$ , 上式成为

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(n)} &= [F_0(n) + F_1(n) + F_2(n)]\vec{r} \\ &+ [G_0(n) + G_1(n) + G_2(n)]\dot{\vec{v}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Z \end{bmatrix} F_1(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\dot{Z} \end{bmatrix} G_1(n) \end{aligned} \quad (30)$$

这样，任一时刻的位置、速度可表示为：

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \dot{\tilde{r}}^{(n)}|_{t=t_0} \\ \dot{\tilde{v}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \dot{\tilde{r}}^{(n)}|_{t=t_0} \end{cases} \quad (31)$$

令

$$\begin{cases} F(n) = F_0(n) + F_1(n) + F_2(n) \\ G(n) = G_0(n) + G_1(n) + G_2(n) \end{cases} \quad (32)$$

则

$$\dot{\tilde{r}}^{(n)} = F(n)\dot{\tilde{r}} + G(n)\dot{\tilde{v}} + F_1(n) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Z \end{bmatrix} + G_1(n) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Z \end{bmatrix} \quad (33)$$

式(31)和(33)即构成修正  $f$ 、 $g$  级数的计算公式。只需给出  $t_0$  时刻的状态  $\dot{\tilde{r}}_0$ 、 $\dot{\tilde{v}}_0$ ，则可直接求出  $F_0(n)$ 、 $F_1(n)$ 、 $F_2(n)$ 、 $G_0(n)$ 、 $G_1(n)$ 、 $G_2(n)$ ，即  $\dot{\tilde{r}}^{(n)}|_{t=t_0}$ ，从而任一时刻的状态只是求算两个多项式的值。

### 3 修正 $f$ 、 $g$ 级数与直接数值积分所得结果的比较

在上面的推导中，近似认为  $\dot{\tilde{r}} = -u\dot{\tilde{r}}$ ，略去了高阶小量。为了确定这种近似带来的误差大小，将用修正  $f$ 、 $g$  级数和用 4 阶阿达姆斯预估——校正公式积分（用 4 阶  $R-K$  方法起步）所得结果进行了比较。位置及速度各分量随时间的误差变化分别画于图 1 和图 2。标题中  $st$  表示步长（正则时间）。

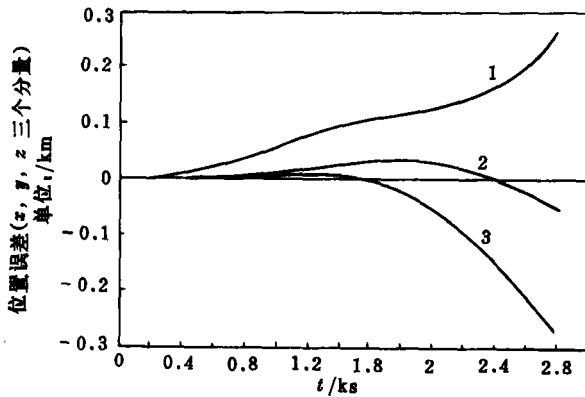


图 1

计算中选取的轨道初值为：轨道高度  $H=500\text{km}$ ，倾角  $i=65^\circ$ ， $e=0$ ， $t=0$  时， $Y=Z=0$ ，在大约半圈中进行了计算。

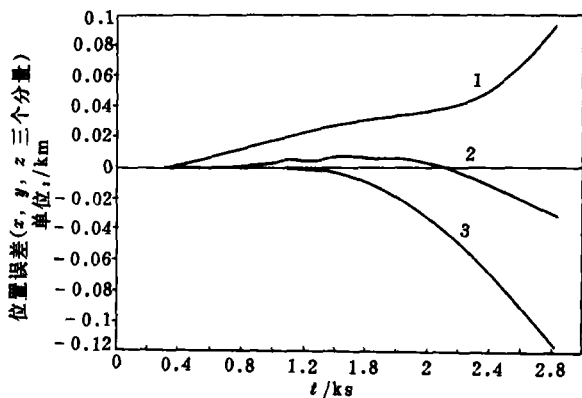


图 2

计算时，用初值得得  $\dot{\vec{r}}(0)$  后，在一定的时间间隔  $\tau$  内（下称步长），状态值由求算多项式给出。下一个步长内，则将  $t_0+\tau$  时的结果作为初值，重新计算多项式系数  $\dot{\vec{r}}^{(n)}/n!$ 。如此反复。

和数值积分一样，步长  $\tau$  的选取直接影响结果精度。由于我们的目的是确定修正  $f$ 、 $g$  级数的精度，所以要求数值积分很准确。通过试算，选取积分步长约 0.5 秒。这样在半圈的积分时间内，其累积误差为数米，完全可以忽略。

结果表明，当  $\tau$  由大变小时，此方法与数值积分迅速接近，误差很小。例如当  $\tau=0.2$  时，在半小时内，最大误差仅 100 米左右（图 1）；当  $\tau=0.1$  时，则为 40 米左右（图 2）。图 1 和图 2 中的 1, 2, 3 分别表示  $x, y, z$  的偏差。它表明虽作了近似 ( $\dot{\vec{r}} = -u\dot{\vec{r}}$ )，修正  $f, g$  级数从原理上讲有足够的精度。当用于代替插值法填补数值积分离散点之间的空白时，步长可加大。因为对于不太长的一段，误差积累较小。

## 4 结 论

本文提出的修正  $f, g$  级数方法，具有速度快、精度高、适合于并行计算、对轨道类型没有限制和表达式简洁的特点。它对于远程导弹的制导，人造地球卫星的自主导航及变轨，飞船与空间站的交会对接等技术，均有应用价值。从原理上讲，对于高阶带谐项，也能得到类似结果。

本文成文过程中得到任萱教授的热情指导，在此表示谢意。

## 参 考 文 献

- [1] Roger R. Bate, etc. Fundamentals of Astrodynamics. Dover Publications Inc, New York, 1971
- [2] 朱龙根. 计算机公式推演及其在航天动力学中的应用. 国防科技大学讲义 1989

- [3] 任董. 航天飞行器轨道动力学. 国防科技大学讲义 1987  
 [4] 刘林等. 人造地球卫星运动理论. 科学出版社, 1974

## 附录 1

$$\begin{aligned}
 F(1.) &= 0. \\
 G(1.) &= 1. \\
 F(2.) &= -u \\
 G(2.) &= 0. \\
 F(3.) &= 3. * p * u \\
 G(3.) &= -u \\
 F(4.) &= u * (3. * q - 15. * p * * 2 + u) \\
 G(4.) &= 6. * p * u \\
 F(5.) &= 15 * p * u * (-3. * q + 7. * p * * 2 - u) \\
 G(5.) &= u * (9. * q - 45. * p * * 2 + u) \\
 F(6.) &= u * (-45. * q * * 2 + 630. * q * p * * 2 - 24. * q * u - 945. * p * * 4 + 210. * p * * 2 * u - u * * 2) \\
 G(6.) &= 30. * p * u * (-6. * q + 14. * p * * 2 - u) \\
 F(7.) &= 63. * p * u * (25. * q * * 2 - 150. * q * p * * 2 + 14. * q * u + 165. * p * * 4 - 50. * p. * * 2 * u + u * * 2) \\
 G(7.) &= u * (-225. * q * * 2 + 3150. * q * p * * 2 - 54. * q * u - 4725. * p * * 4 + 630. * p. * * 2 * u - u * * 2) \\
 F(8.) &= u * (1575. * q * * 3 - 42525. * q * * 2 * p * * 2 + 1107. * q * * 2 * u + 155925. * q. * p * * 4 - 24570. \\
 &\quad * q * p * * 2 * u + 117. * q * u * * 2 - 135135. * p * * 6 + 51975. * p * * 4 * u - 2205. * p * * 2 * u * * 2 \\
 &\quad + u * * 3) \\
 G(8.) &= 126. * p * u * (75. * q * * 2 - 450. * q * p * * 2 + 24. * q * u + 495. * P * * 4 - 100. * p * * 2 * u + u * * 2) \\
 F(9.) &= 15. * p * u * (-6615. * q * * 3 + 72765. * q * * 2 * p * * 2 - 4959. * q * * 2 * u - 189189. * q * p * * 4 \\
 &\quad + 42966. * q * p * * 2 * u - 729. * q * u * * 2 + 135135. * p. * * 6 - 63063. * p * * 4 * u + 4389. * p * * 2 \\
 &\quad * u * * 2 - 17. * u * * 3) \\
 G(9.) &= u * (11025. * q * * 3 - 297675. * q * * 2 * p * * 2 + 4131. * q * * 2 * u + 1091475. * q * p * * 4 - \\
 &\quad 111510. * q * p * * 2 * u + 243. * q * u * * 2 - 945945. * p * * 6 + 259875. * p * * 4 * u - 6615. * p * * 2 \\
 &\quad * u * * 2 + u * * 3) \\
 F(10.) &= u * (-99225. * q * * 4 + 4365900. * q * * 3 * p * * 2 - 85410. * q * * 3 * u - 28378350. * q * * 2 * p \\
 &\quad * * 4 + 3421400. * q * * 2 * p * * 2 * u - 15066. * q * * 2 * u * * 2 + 56756700. * q * p * * 6 - \\
 &\quad 17027010. * q * p * * 4 * u + 599940. * q * p * * 2 * u * * 2 - 498. * q * u * * 3 - 34459425. * p * * 8 + \\
 &\quad 18918900. * p * * 6 * u - 1891890. * p * * 4 * u * * 2 + 21120. * p * * 2 * u * * 3 - u * * 4) \\
 G(10.) &= 30. * p * u * (-26460. * q * * 3 + 291060. * q * * 2 * p * * 2 - 12393. * q * * 2 * u - 756756. * q * p \\
 &\quad * * 4 + 120582. * q * p * * 2 * u - 1170. * q * u * * 2 + 540540. * p * * 6 - 189189. * p * * 4 * u + 8778. \\
 &\quad * p * * 2 * u * * 2 - 17. * u * * 3)
 \end{aligned}$$

## 附录 2

$$\begin{aligned}
 F1(3.) &= (-5. * p) / r * * 5 \\
 G1(3.) &= 1. / r * * 5 \\
 F1(4.) &= -(-5. * q + 35. * p * * 2 - u) / r * * 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G1(4.) &= (-10. * p) / r * * 5 \\
F1(5.) &= (p * (105. * q - 315. * p * * 2 + 23. * u)) / * * 5 \\
G1(5.) &= (-15. * q + 105. * p * * 2 - u) / r * * 5 \\
F1(6.) &= (105. * q * * 2 - 1890. * q * p * * 2 + 38. * q * u + 3465. * p * * 4 - 440. * p * * 2 * u + u * * 2) / r * * 5 \\
G1(6.) &= (2. * p * (210. * q - 630. * p * * 2 + 23. * u)) / r * * 5 \\
F1(7.) &= (5. * p * (-945. * q * * 2 + 6930. * q * p * * 2 - 378. * q * u - 9009. * p * * 4 + 1686. * p * * 2 * u - 19. * u * * 2)) / r * * 5 \\
G1(7.) &= (525. * q * * 2 - 9450. * q * p * * 2 + 84. * q * u + 17325. * p * * 4 - 1320. * p * * 2 * u + u * * 2) / r * * 5 \\
F1(8.) &= (-4725. * q * * 3 + 155925. * q * * 2 * p * * 2 - 2415. * q * * 2 * u - 675675. * q * p * * 4 + 66870. * q * p * * 2 * u - 179. * q * u * * 2 + 675675. * p * * 6 - 169995. * p * * 4 * u + 4445. * p * * 2 * u * * 2 - u * * 3) / r * * 5 \\
G1(8.) &= (10. * p * (-2835. * q * * 2 + 20790. * q * p * * 2 - 642. * q * u - 27027. * p * * 4 + 3372. * p * * 2 * u - 19. * u * * 2)) / r * * 5
\end{aligned}$$

### 附录 3

$$\begin{aligned}
F2(3.) &= (z * (-7. * p * z + 2. * v z)) / r * * 7 \\
G2(3.) &= z * * 2 / r * * 7 \\
F2(4.) &= (-7. * q * z * * 2 + 63. * p * * 2 * z * * 2 - 28. * p * v z * z + 2. * v z * * 2 - 3. * u * z * * 2) / r * * 7 \\
G2(4.) &= (2. * z * (-7. * p * z + 2. * v z)) / r * * 7 \\
F2(5.) &= (189. * q * p * z * * 2 - 42. * q * v z * z - 693. * p * * 3 * z * * 2 + 378. * p * * 2 * v z * z - 42. * p * v z * * 2 + 79. * p * u * z * * 2 - 14. * v z * u * z) / r * * 7 \\
G2(5.) &= (-21. * q * z * * 2 + 189. * p * * 2 * z * * 2 - 84. * p * v z + 6. * v z * * 2 - 7. * u * z * * 2) / r * * 7 \\
F2(6.) &= (189. * q * * 2 * z * * 2 - 4158. * q * p * * 2 * z * * 2 + 1512. * q * p * v z * z - 84. * q * v z * * 2 + 142. * q * u * z * * 2 + 9009. * p * * 4 * z * * 2 - 5544. * p * * 3 * v z * z + 756. * p * * 2 * v z * * 2 - 1704. * p * * 2 * u * z * * 2 + 508. * p * v z * u * z - 20. * v z * * 2 * u + 21. * u * * 2 * z * * 2) / r * * 7 \\
G2(6.) &= (2. * (378. * q * p * z * * 2 - 84. * q * v z * z - 1386. * p * * 3 * z * * 2 + 756. * p * * 2 * v z * z - 84. * p * v z * * 2 + 127. * p * u * z * * 2 - 20. * v z * u * z)) / r * * 7 \\
F2(7.) &= (-10395. * q * * 2 * p * z * * 2 + 1890. * q * * 2 * v z * z + 90090. * q * p * * 3 * z * * 2 - 41580. * q * p * * 2 * v z * z + 3780. * q * p * v z * * 2 - 7758. * q * p * u * z * * 2 + 1128. * q * v z * u * z - 135135. * p * * 5 * z * * 2 + 90090. * p * * 4 * v z * z - 13860. * p * * 3 * v z * * 2 + 36330. * p * * 3 * u * z * * 2 - 14040. * p * * 2 * v z * u * z + 960. * p * v z * * 2 * u - 1177. * p * u * * 2 * z * * 2 + 122. * v z * u * * 2 * z) / r * * 7 \\
G2(7.) &= (9454. * q * * 2 * z * * 2 - 20790. * q * p * * 2 * z * * 2 + 7560. * q * p * v z * z - 420. * q * v z * * 2 + 564. * q * u * z * * 2 + 45045. * p * * 4 * z * * 2 - 27720. * p * * 3 * v z * z + 3780. * p * * 2 * v z * * 2 - 7020. * p * * 2 * u * z * * 2 + 1920. * p * v z * u * z - 60. * v z * * 2 * u + 61. * u * * 2 * z * * 2) / r * * 7 \\
F2(8.) &= (-10395. * q * * 3 * z * * 2 + 405405. * q * * 2 * p * * 2 * z * * 2 - 124740. * q * * 2 * p * v z * z + 5670. * q * * 2 * v z * * 2 - 10593. * q * * 2 * u * z * * 2 - 2027025. * q * p * * 4 * z * * 2 + 1081080. * q * p * * 3 * v z * z - 12470. * q * p * * 2 * v z * * 2 + 300762. * q * p * * 2 * u * z * * 2 - 76032. * q * p * v z * u * z + 2508. * q * v z * * 2 * u - 2869. * q * u * * 2 * z * * 2 + 2297295. * p * * 6 * z * * 2 - 1621620. * p * * 5 * v z * z + 270270. * p * * 4 * v z * * 2 - 806505. * p * * 4 * u * z * * 2 + 366240. * p * * 3 * v z * u * z - 33120. * p * * 2 * v z * * 2 * u + 46473. * p * * 2 * u * * 2 * z * * 2 - 8908. * p * v z * u * * 2 * z + 182. * v z * * 2 * u * * 2 - 183. * u * * 3 * z * * 2) / r * * 7 \\
G2(8.) &= (2. * (-31185. * q * * 2 * p * z * * 2 + 5670. * q * * 2 * v z * z + 270270. * q * p * * 3 * z * * 2 -
\end{aligned}$$



124740. \*q \* p \* \* 2 \* v z \* z + 11340. \*q \* p \* v z \* \* 2 - 19008. \*q \* p \* u \* z \* \* 2 + 2508. \*q \* v z \* u \* z - 405405. \*p \* \* 5 \* z \* \* 2 + 270270. \*p \* \* 4 \* v z \* z - 41580. \*p \* \* 3 \* v z \* \* 2 + 91560. \*p \* \* 3 \* u \* z \* \* 2 - 33120. \*p \* \* 2 \* v z \* u \* z + 1950. \*p \* v z \* \* 2 \* u - 2227. \*p \* u \* \* 2 \* z \* \* 2 + 182. \*v z \* u \* \* 2 \* z)) / r \* \* 7

## A Correcting Method for Classical f and g Series

Li Xiaoming

(Department of Automatic Control)

### Abstract

This paper presents a correcting method for classical f and g series which is to be used in cases considering the primary perturbations of the zonal harmonics. It overcomes the limitation of f and g series only suitable to short arc. The results derived with CA system REDUCE are also given. Comparing the results using this corrected f and g series with those from direct numerical integration method, we can see that the former is faster and with the same accuracy. Besides, it can provide continuous states instead of discrete ones. Its clarity and effectiveness make it vary useful in space engineering.

**Key words** astrodynamics, orbit, perturbation, orbit prediction, CA

---

### 我国“七五”期间自动化技术领域取得可观成果

七五期间,在 863 计划自动化技术领域共安排课题 161 个,其中计算机集成制造系统主题(CIMS)106 个,智能机器人主题 55 个。

经过 4 年的努力,自动化技术领域已完成本领域的战略目标的论证,制订出一整套完成这一目标的具体步骤,取得一批相当可观的成果。1990 年年底,两个主题分别组织了同行专家的验收。智能机器人主题已完成基础技术课题 44 个,机器人自动任务规划、路径规划等 12 个课题达到世界先进水平。共有 5 个机器人型号目标产品,现已开始工程实施。计算机集成制造系统已完成 75 个课题。自动化技术领域在我国从无到有,已在全国范围内组织起一支 2000 人的老中青相结合的优秀的科技攻坚队伍,并且在国际上占一席之地,其成果是显著的。

清华大学等 11 个单位承担计算机集成制造系统实验工程。该课题解决了一些重要的关键性技术,为完成 1992 年的总体集成打下了基础。

(选自《科技日报》 1991 年 1 月 30 日)