

树形挠性多体系统的 Kane 动力学方程 ——一种面向计算机的建模方法

金 梁 Helmut F. Bauer**

(国防科技大学)

(西德国防大学)

摘 要 本文针对具有树形结构的空问挠性多体系统,建立了 Kane 动力学模型。挠性多体系统由任意数目的挠性体或刚体组成,假定铰链点之间具有三自由度相对转动和平动,选取相对平动速度和转动角速度,以及模态坐标的导数为系统的广义速度,建立了系统的最小维数运动方程,所得结果便于计算机自动生成和进行数值仿真。

关键词 挠性多体, 广义速度, Kane 方法, 运动方程

分类号 O313.3

近年来,挠性多体系统的动力学与控制问题已受到广泛重视,各国学者在这一领域开展了大量的研究工作,并已取得了许多具有实际价值的成果。对于诸如带有转动或可伸展的附件的大型卫星、多体结构的空间站、多关节机械臂等挠性多体结构系统,发展一般形式的动力学模型,建立通用性较强的计算机软件系统,为系统的动力学仿真和控制系统设计,提供有效的建模技术。

本文针对具有树形结构的空问挠性多体系统,建立了 Kane 动力学方程。首先,文中引入关联因子和直接内连体标号的概念,描述了树形系统的拓扑结构,建立了挠性多体系统的运动学关系,然后,选择各铰链点的相对平动速度和转动角速度,以及模态坐标的导数为系统的广义速度,导出了偏速度向量的表达形式,并利用 Kane 方法,建立了系统的最小维数动力学方程。

1 系统的拓扑结构描述

考虑 NB 个挠性体通过铰链互相连接成空问挠性多体系统,并假定其具有树形拓扑结构。首先,按照文献[8]的直接路思想对系统分层标号。如图1所示, $o_E x_E y_E z_E$ 为地心惯性坐标系,而 $o_0 x_0 y_0 z_0$ 为参考坐标系;对于轨道上的空问飞行器,通常 o_0 为整个系统的质心,并且 o_0 点在轨道上运动,系 $o_1 x_1 y_1 z_1$ 固连在主体1上,而各分体坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ ($2 \leq i \leq$

* 1990年5月5日收稿

** 西德国防大学 (Universität der Bundeswehr München) 教授。

NB)的原点取在体 i 与其直接内连体的铰链点处,并固连在体 i 上,允许铰链点 o_i 相对其直接内连体具有 NT_i ($0 \leq NT_i \leq 3$) 个自由度的平动和 NR_i ($0 \leq NR_i \leq 3$) 个自由度的转动。为了方便起见,有时也将 o_0 和 o_1 点看作两个虚设的铰链点。

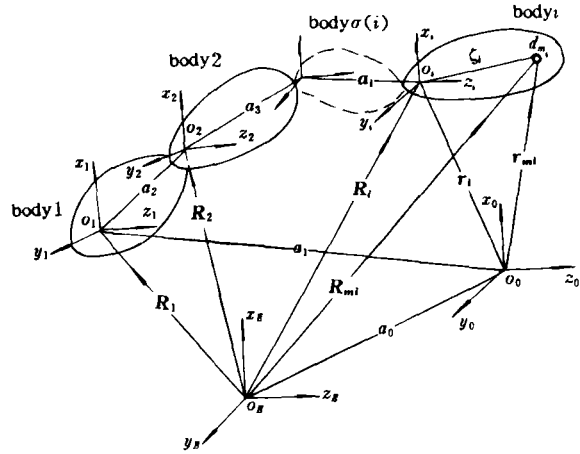


图 1 多体系统的坐标系选取

设符号 S_j 表示给定树形拓扑结构的关联因子,即当体 j 在体 i 的直接路上时 $S_j=1$, 否则 $S_j=0$, 而符号 $\sigma(j)$ 表示体 j 的直接内连体标号,也可将 $\sigma(j)$ 看作标号 j 的一种特定的函数,并且约定 $S_i^{(\sigma(i))}=0$, $S_i^{(i)}=1$ 。显然,对于一个给定的多体系统,常常可容易地将关联因子 S_j 和直接内连体标号 $\sigma(j)$ 用表格形式列出,这给计算机处理带来了许多方便。

设符号 S_j 表示给定树形拓扑结构的关联因子,即当体 j 在体 i 的直接路上时 $S_j=1$, 否则 $S_j=0$, 而符号 $\sigma(j)$ 表示体 j 的直接内连体标号,也可将 $\sigma(j)$ 看作标号 j 的一种特定的函数,并且约定 $S_i^{(\sigma(i))}=0$, $S_i^{(i)}=1$ 。显然,对于一个给定的多体系统,常常可容易地将关联因子 S_j 和直接内连体标号 $\sigma(j)$ 用表格形式列出,这给计算机处理带来了许多方便。

2 挠性多体系统的运动学

如图1所示 a_j 为铰链点 o_j 相对于 $o_{\sigma(j)}$ 点的位置向量,通常 a_j 是在体 j 的直接内连体坐标系角标为 $\sigma(j)$ 上测量的,而 a_0 是在惯性坐标系 $o_E x_E y_E z_E$ 中测量的,不妨用 $l(\cdot)$ 表示矢量 (\cdot) 在坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ 上的投影表达式,则不难给出第 i 个铰链点 o_i 和第 i 体上质量单元 dm_i 相对 o_E 和 o_0 点的位置向量为:

$${}^i R_i = \sum_{j=0}^{NB} S_j A_{\sigma(j)}^i a_j, \quad {}^i R_{m_i} = {}^i R_i + A_i^i \zeta_i, \quad {}^i r_i = \sum_{j=1}^{NB} S_j A_{\sigma(j)}^i a_j \quad (1a)$$

$${}^i r_{m_i} = {}^i r_i + A_i^i \zeta_i, \quad {}^i r_i^h = {}^i r_i - {}^i r_h = \sum_{k=1}^{NB} S_k S_k^{\sigma(k)} A_{\sigma(k)}^i a_k \quad (1b)$$

$${}^i r_{m_i}^h = {}^i r_i^h + A_i^i \zeta_i, \quad \zeta_i(\rho_i, t) = \rho_i + \mathbf{u}_i(\rho_i, t) \quad (1c)$$

式中, ${}^i R_i$ 和 ${}^i R_{m_i}$ 分别为 o_i 和 dm_i 相对于 O_E 点的位置向量, ${}^i r_i$ 和 ${}^i r_{m_i}$ 分别为 o_i 和 dm_i 相对 o_0 的位置向量, ${}^i r_i^h$ 和 ${}^i r_{m_i}^h$ 分别为 o_i 和 dm_i 相对 O_h 点的位置向量, ζ_i 为 dm_i 相对 o_i 点的位置向量, ρ_i 为体 i 未变形时, dm_i 相对 o_i 点的位置向量, \mathbf{u}_i 为 dm_i 处的弹性位移,而 A^i 表示坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ 到坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ 的变换矩阵。

设质量元 dm_i 处的弹性位移 $\mathbf{u}_i(\rho_i, t)$ 可用截断的模式坐标和振型矩阵表示为

$$\mathbf{u}_i(\rho_i, t) = \Phi_i(\rho_i) \eta_i(t) = \sum_{\mu=1}^{NM_i} \Phi_{i\mu}(\rho_i) \eta_{i\mu}(t) \quad (2)$$

式中, NM_i 为对应于体 i 的截断模式坐标的维数。

利用相对运动关系,可以给出铰链点 o_i 的角速度和角加速度分别为

$${}^i \omega_i^A = \sum_{j=0}^{NB} S_j A_j^i \omega_j \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
{}^i\dot{\omega}_i^A &= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_j^i (\dot{\omega}_j + j\omega_j^A \times \omega_j) \\
&= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_j^i \dot{\omega}_j + \sum_{j=0}^{NB} \sum_{h=0}^{NB} S_j^i S_h^i A_h^i (\omega_h \times A_j^i \omega_j)
\end{aligned} \quad (4)$$

式中, ω_j 为在 $o, x, y, z,$ 系上测量的体 j 相对其直接内连体的角速度, 而 ω_0 为 O_0 点相对惯性坐标系的角速度, $(\dot{\cdot})$ 表示矢量相对测量坐标系的变化率。

另一方面, 铰链点 i 处的速度与加速度分别可表示为

$$\begin{aligned}
{}^i\dot{\mathbf{R}}_i &= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_{\sigma(j)}^i (\dot{\mathbf{a}}_j + {}^{\sigma(j)}\omega_{\sigma(j)}^A \times \mathbf{a}_j) \\
&= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_{\sigma(j)}^i \dot{\mathbf{a}}_j + \sum_{h=0}^{NB} S_h^i (A_h^i \omega_h) \times {}^i\mathbf{r}_i^h
\end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
{}^i\ddot{\mathbf{R}}_i &= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_{\sigma(j)}^i [\ddot{\mathbf{a}}_j + {}^{\sigma(j)}\dot{\omega}_{\sigma(j)}^A \times \mathbf{a}_j + 2{}^{\sigma(j)}\omega_{\sigma(j)}^A \times \dot{\mathbf{a}}_j \\
&\quad + {}^{\sigma(j)}\omega_{\sigma(j)}^A \times ({}^{\sigma(j)}\omega_{\sigma(j)}^A \times \mathbf{a}_j)] \\
&= \sum_{j=0}^{NB} S_j^i A_{\sigma(j)}^i \ddot{\mathbf{a}}_j + \sum_{h=0}^{NB} S_h^i (A_h^i \dot{\omega}_h) \times {}^i\mathbf{r}_i^h \\
&\quad + \sum_{h=0}^{NB} \sum_{p=0}^{NB} S_h^i S_p^i [A_p^i (\omega_p \times A_h^i \omega_h)] \times {}^i\mathbf{r}_i^h \\
&\quad + \sum_{p=0}^{NB} \sum_{h=0}^{NB} S_h^i (A_p^i \omega_p) \times [A_h^i \omega_h \times S_p^{(\sigma)} {}^i\mathbf{r}_i^h] \\
&\quad + 2 \sum_{h=0}^{NB} S_h^i (A_h^i \omega_h) \times {}^i\dot{\mathbf{r}}_i^h
\end{aligned} \quad (6)$$

式中

$${}^i\dot{\mathbf{r}}_i^h = \dot{{}^i\mathbf{r}}_i^h - {}^i\dot{\mathbf{r}}_i^h = \sum_{k=1}^{NB} S_k^i S_h^{\sigma(k)} A_{\sigma(k)}^i \dot{\mathbf{a}}_k \quad (7)$$

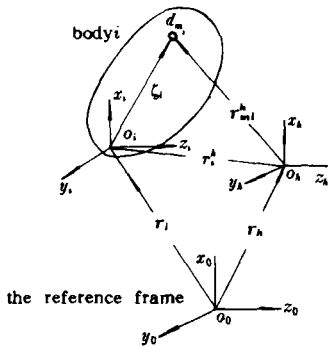


图 2 r_i^h 和 r_h^i 的示意图

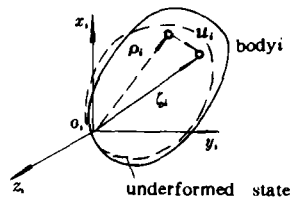


图 3 弹性位移 u_i

则容易将质量元 dm_i 的速度与加速度表示为

$${}^i\dot{\mathbf{R}}_m = {}^i\dot{\mathbf{R}}_i + A_i\dot{\zeta}_i = {}^i\dot{\mathbf{R}}_i + A_i(\dot{\zeta}_i + {}^i\omega^A \times \zeta_i) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} {}^i\ddot{\mathbf{R}}_m &= {}^i\ddot{\mathbf{R}}_i + A_i\ddot{\zeta}_i \\ &= {}^i\ddot{\mathbf{R}}_i + A_i[\ddot{\zeta}_i + {}^i\omega^A \times \zeta_i + 2{}^i\dot{\omega}^A \times \zeta_i + {}^i\omega^A \times ({}^i\omega^A \times \zeta_i)] \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$\dot{\zeta}_i = \dot{\mathbf{u}}_i = \sum_{\mu=1}^{NM_i} \phi_{i\mu} \dot{\eta}_{i\mu}, \quad \ddot{\zeta}_i = \ddot{\mathbf{u}}_i = \sum_{\mu=1}^{NM_i} \phi_{i\mu} \ddot{\eta}_{i\mu} \quad (10)$$

3 偏速度向量的确定

设广义速度集合 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{NS}$ 表示了整个挠性多体系统的自由度, 则我们可将 ${}^i\dot{\mathbf{R}}_i, {}^i\omega^A$ 和 $\dot{\mathbf{u}}_i$ 表示为:

$${}^i\dot{\mathbf{R}}_m = \sum_{r=1}^{NS} {}^i\mathbf{V}_r^m \dot{q}_r + {}^i\mathbf{V}_i^m, \quad {}^i\dot{\mathbf{R}}_i = \sum_{r=1}^{NS} {}^i\mathbf{V}_r^i \dot{q}_r + {}^i\mathbf{V}_i^i \quad (11)$$

$${}^i\omega^A = \sum_{r=1}^{NS} {}^i\omega_r^A \dot{q}_r + {}^i\omega_i^A, \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \sum_{r=1}^{NS} \mathbf{V}_r^i \dot{q}_r \quad (12)$$

式中, 向量 ${}^i\mathbf{V}_r^m, {}^i\mathbf{V}_i^m, {}^i\omega_r^A$ 和 \mathbf{V}_r^i 均为广义坐标的函数。

不妨将(11)式代入(8)式中, 比较两端的结果, 得

$${}^i\mathbf{V}_r^m = {}^i\mathbf{V}_r^i + {}^i\omega_i^A \times (A_i\zeta_i) + A_i\mathbf{V}_r^i \quad (13)$$

$${}^i\mathbf{V}_i^m = {}^i\mathbf{V}_i^i + {}^i\omega_i^A \times (A_i\zeta_i) \quad (14)$$

若进一步将铰链点 j 的相对角速度 ω_j 和相对平动速度 $\dot{\mathbf{a}}_j$ 表示为

$$\omega_j = \sum_{m=1}^{NR_j} \theta_j^m \times \mathbf{l}_j^m, \quad \dot{\mathbf{a}}_j = \sum_{n=1}^{NT_j} \dot{\mathbf{a}}_j^n \times \mathbf{g}_{\sigma(j)}^n \quad (15)$$

式中, θ_j^m 为铰链 j 绕坐标系 $o_j x_j y_j z_j$ 的第 m 个转轴的角速度, \mathbf{l}_j^m 为坐标系 $o_j x_j y_j z_j$ 的第 m 个转轴的单位向量, $\dot{\mathbf{a}}_j^n$ 为铰链 j 相对坐标系 $o_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} y_{\sigma(j)} z_{\sigma(j)}$ 的第 n 轴的平动速度, $\mathbf{g}_{\sigma(j)}^n$ 为坐标系 $o_{\sigma(j)} x_{\sigma(j)} y_{\sigma(j)} z_{\sigma(j)}$ 的第 n 轴的单位向量。

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= [\theta_0^1, \dots, \theta_0^{NR_0}, \theta_1^1, \dots, \theta_1^{NR_1}, \dots, \theta_{NB}^1, \dots, \theta_{NB}^{NR_{NB}}]^T \\ \bar{\mathbf{a}} &= [\dot{\mathbf{a}}_0^1, \dots, \dot{\mathbf{a}}_0^{NT_0}, \dot{\mathbf{a}}_1^1, \dots, \dot{\mathbf{a}}_1^{NT_1}, \dots, \dot{\mathbf{a}}_{NB}^1, \dots, \dot{\mathbf{a}}_{NB}^{NT_{NB}}]^T \\ \bar{\eta} &= [\eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,NM_1}, \dots, \eta_{NB,1}, \dots, \eta_{NB,NM_{NB}}]^T \end{aligned}$$

并选取系统的广义速度为

$$\bar{\dot{\mathbf{q}}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{NS}]^T = [\bar{\omega}^T, \bar{\mathbf{a}}^T, \bar{\eta}^T]^T$$

式中, $NS = \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i) + \sum_{j=1}^{NB} NM_j$.

依上述定义, 可求出(11)–(12)式中的偏速度向量如下,

(1) 如果 $p \leq \sum_{i=0}^{NB} NR_i$, 则可取标号

$$q = \begin{cases} 0, & p \leq NR_0 \\ 1 + \max_j \{j: (p - \sum_{i=0}^j NR_i) > 0\}, & p > NR_0 \end{cases} \quad (16)$$

$$m = \begin{cases} p, & p \leq NR_0 \\ p - \sum_{i=0}^{q-1} NR_i, & p > NR_0 \end{cases} \quad (17)$$

这时，偏速度向量可求得为：

$${}^iV_p = S_q^i(A_q^i I_q^m) \times {}^i r_i^q, \quad {}^i\omega_p = S_q^i A_q^i I_q^m, \quad V_p^q = 0 \quad (18)$$

(2) 如果 $\sum_{i=0}^{NB} NR_i < p \leq \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i)$ ，则可取标号

$$q = \begin{cases} 0, & \sum_{i=0}^{NB} NR_i < p \leq NT_0 + \sum_{i=0}^{NB} NR_i \\ 1 + \max_j \{j: (p - \sum_{i=0}^j NT_i - \sum_{i=0}^{NB} NR_i) > 0\}, & p > NT_0 + \sum_{i=0}^{NB} NR_i \end{cases} \quad (19)$$

$$m = \begin{cases} p - \sum_{i=0}^{NB} NR_i, & \sum_{i=0}^{NB} NR_i < p \leq NT_0 + \sum_{i=0}^{NB} NR_i \\ p - (\sum_{i=0}^{q-1} NT_i + \sum_{i=0}^{NB} NR_i), & p > \sum_{i=0}^{NB} NR_i + NT_0 \end{cases} \quad (20)$$

这时，偏速度向量对应于铰链点的相对平动速度，可求得为

$${}^iV_p = S_q^i A_{\sigma(q)}^i \mathcal{E}_q^m, \quad {}^i\omega_p = 0, \quad V_p^q = 0 \quad (21)$$

(3) 如果 $\sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i) < p \leq NS$ ，则可取

$$q = \max_j \{j: [p - (\sum_{i=1}^j NM_i + \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i))] > 0\} \quad (22)$$

$$m = p - [\sum_{i=1}^{q-1} NM_i + \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i)] \quad (23)$$

而偏速度向量为

$${}^iV_p = 0, \quad {}^i\omega_p = 0, \quad V_p^q = \begin{cases} \phi_{qm}, & i = q \\ 0, & i \neq q \end{cases} \quad (24)$$

4 挠性多体系统的运动方程

对于系统中体 i 上的质量单元 dm_i ，不难利用牛顿定律写出它的运动方程为

$$df - {}^iR_m dm_i = 0 \quad (25)$$

式中， df 为作用在质量元 dm_i 上的力，而对树形结构，有

$$\sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} {}^iV_p^m (df - {}^iR_m dm_i) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, NS \quad (26a)$$

或

$$\sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} {}^iV_p^m df - \sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} {}^iV_p^m \cdot {}^iR_m dm_i = 0, \quad p = 1, 2, \dots, NS \quad (26b)$$

上述方程可进一步表示为 NS 个方程

$${}^i f_p + {}^i f_p^* = 0, p = 1, 2, \dots, NS \quad (27)$$

式中, ${}^i f_p$ 和 ${}^i f_p^*$ 分别为广义主动力和广义惯性力在 $o_i x_i y_i z_i$ 系上的投影。若将(13)式代入(26b)式的第一项中, 有

$${}^i f_p = \sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} {}^i V_p^m \cdot df = \sum_{i=1}^{NB} ({}^i M_i \cdot {}^i \omega_i^* + {}^i F_i \cdot {}^i V_i^* + A_i^t \int_{B_i} V_i^* \cdot df) \quad (28)$$

式中, ${}^i M_i$ 和 ${}^i F_i$ 分别为作用在体 i 上, 而相对于铰链点 i 的力矩和作用在体 i 上的有功力, 最后一项包括了内部弹性力的贡献, 其可求得为

$$\begin{cases} 0, & p \leq \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i) \\ -\delta_{i,p} (k_{qm} \eta_q + N_{qm} \dot{\eta}_q), & p > \sum_{i=0}^{NB} (NR_i + NT_i) \end{cases} \quad (29)$$

式中, 下标 q, m 由(22)和(23)式确定, 而 $\delta_{i,p}$ 为 Kronecker 函数, 并且

$$K_q = [K_{q1} \quad K_{q2} \quad \dots \quad K_{q, NM_q}]^T, \quad N_q = [N_{q1} \quad N_{q2} \quad \dots \quad N_{q, NM_q}]^T \quad (30)$$

分别为体 q 的弹性刚度矩阵和弹性阻尼矩阵。

同理, 第 p 个广义惯性力可求得为

$$\begin{aligned} -{}^i f_p^* &= \sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} {}^i V_p^m \cdot {}^i R_{m_i} dm \\ &= \sum_{i=1}^{NB} \int_{B_i} [{}^i V_i^* + {}^i \omega_i^* \times (A_i^t \zeta_i) + A_i^t V_i^*] \cdot [{}^i R_i + A_i^t \zeta_i] dm, \\ &= \sum_{i=1}^{NB} [m_i ({}^i R_i + \dot{l}_i) \cdot {}^i V_i^* + ({}^i H_i + m_i (A_i^t l_i) \times {}^i R_i) \cdot {}^i \omega_i^* \\ &\quad \cdot {}^i R_i + A_i^t \int_{B_i} V_i^* dm + A_i^t ({}^i \omega_i^* \zeta_i \times \int_{B_i} V_i^* dm) \\ &\quad + 2A_i^t ({}^i \omega_i^* \cdot \int_{B_i} \dot{\mathbf{u}}_i \times V_i^* dm) + A_i^t \int_{B_i} \ddot{\mathbf{u}}_i \cdot V_i^* dm \\ &\quad - A_i^t ({}^i \omega_i^* \cdot \underline{D}_i \cdot {}^i \omega_i^*)] \end{aligned} \quad (31)$$

式中, m_i 为体 i 的质量, l_i 为体 i 在变形状态下的质心相对坐标系 $o_i x_i y_i z_i$ 的位置向量, ${}^i H_i$ 为体 i 相对于铰链点 i 的角动量在 $o_i x_i y_i z_i$ 系中的投影, 而(31)式中的各未知量将分别计算如下。首先, 体 i 的瞬时质心位置向量 l_i 及其相对惯性空间的加速度 \ddot{l}_i 为

$$\begin{cases} l_i = \frac{1}{m_i} \int_{m_i} \rho_i dm_i + \frac{1}{m_i} \int_{m_i} \phi_i dm_i \eta_i \\ \dot{l}_i = \dot{l}_i + {}^i \omega_i^* \times l_i + 2{}^i \omega_i^* \times \dot{l}_i + {}^i \omega_i^* \times ({}^i \omega_i^* \times l_i) \\ \ddot{l}_i = \frac{1}{m_i} \int_{m_i} \phi_i dm_i \ddot{\eta}_i, \quad \ddot{l}_i = \frac{1}{m_i} \int_{m_i} \phi_i dm_i \ddot{\eta}_i \end{cases} \quad (32)$$

而角动量 iH_i 的微分为

$$\left\{ \begin{aligned} {}^iH_i &= A_i^3 \int_{B_i} \zeta_i \times \dot{\zeta}_i dm, \\ &= A_i^3 \int_{B_i} \zeta_i \times [\ddot{\zeta}_i + {}^i\dot{\omega}_i^A \times \zeta_i + 2{}^i\omega_i^A \times \dot{\zeta}_i + {}^i\omega_i^A \times ({}^i\omega_i^A \times \zeta_i)] dm, \\ &= A_i^3 \{ I_i \cdot {}^i\omega_i^A + {}^i\omega_i^A \times I_i \cdot \omega_i^A + \sum_{\mu=1}^{NM_i} [h_{i\mu}^1 \eta_{i\mu} + (h_{i\mu}^2 \cdot {}^i\omega_i^A) \eta_{i\mu} + 2h_{i\mu}^3 \cdot {}^i\omega_i^A \eta_{i\mu} \\ &\quad + ({}^i\omega_i^A \times h_{i\mu}^2) \cdot {}^i\omega_i^A \eta_{i\mu}] + \sum_{\mu, k=1}^{NM_i} [h_{i\mu k}^4 \eta_{i\mu} \eta_{ik} \\ &\quad + h_{i\mu k}^5 \eta_{i\mu} ({}^i\omega_i^A \eta_{ik} + 2{}^i\omega_i^A \dot{\eta}_{ik}) - \widetilde{\omega}_i^A h_{i\mu k}^6 \eta_{i\mu} \eta_{ik} {}^i\omega_i^A] \} \end{aligned} \right. \quad (33)$$

式中符号 $\widetilde{(\cdot)}$ 表示向量 (\cdot) 的反对称矩阵表示, 并且, 有

$$\left\{ \begin{aligned} I_i &= \int_{B_i} [(\rho_i \cdot \rho_i) E - \rho_i \rho_i^T] dm, \\ h_{i\mu}^1 &= \int_{B_i} \bar{\rho}_i \phi_{i\mu} dm, \quad h_{i\mu}^2 = h_{i\mu}^3 + h_{i\mu}^{3T} \\ h_{i\mu}^3 &= \int_{B_i} [(\rho_i \cdot \phi_{i\mu}) E - \rho_i \phi_{i\mu}^T] dm, \quad h_{i\mu k}^4 = \int_{B_i} \widetilde{\phi_{i\mu} \phi_{ik}} dm, \\ h_{i\mu k}^5 &= \int_{B_i} [(\phi_{i\mu} \cdot \phi_{ik}) E - \phi_{i\mu} \phi_{ik}^T] dm, \quad h_{i\mu k}^6 = \int_{B_i} \phi_{i\mu} \phi_{ik}^T dm, \end{aligned} \right. \quad (34)$$

而广义力表达式(31)中的矩阵 \underline{D}_p^i 的表达式为

$$\underline{D}_p^i = \int_{B_i} [(\rho_i \cdot V_p^i) E - \rho_i V_p^{iT}] dm + \sum_{\mu=1}^{NM_i} \int_{B_i} [(\phi_{i\mu} \cdot V_p^i) E - \phi_{i\mu} \cdot V_p^{iT}] dm, \eta_{i\mu} \quad (35)$$

5 结束语

若将上述挠性多体系统的动力学建模方法与文献[9]、[10]、[13]中所采用的 Lagrange 和 Newton-Euler 方法相比较, 可以知道: 本文所发展的方法具有物理意义清楚, 推导过程简单, 结果方程紧凑的特点。NS 个运动方程(27), 为一组最小维数的运动方程, 便于利用计算机自动生成和进行数值仿真, 可作为建立挠性多体动力学计算机软件系统的一种十分有效的模型。利用文中的方法, 可进一步研究当考虑挠性体具有旋转弹性变形时的树形多体系统的动力学方程。

本文是作者在西德国防大学作博士后研究期间完成, 得到西德洪堡基金会(Alexander von Humboldt Stiftung)的资助, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Hooker W W and Margulies G. The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite. J. Astro. Sci., 1965, 12 (4): 123~138
- [2] Roberson R E and Wittenberg J. A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies,

with Reference to the problem of Satellite Attitude Control. Proceedings of the Third International Congress on Automatic Control, Butterworth and co., Ltd., London, 1967

- [3] Hooker W W. A Set of r Dynamical Attitude Equations for an Arbitrary n -Body Satellite Having r Rotational Degrees of Freedom, AIAA Journal, 1970, 8(7): 1205~1207
- [4] Wittenburg J. Dynamics of Systems of Rigid Bodies. B. G. Teubner (stuttgart), 1977
- [5] Likins P W. Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles (Rev. 1). JPL Technical Report, 1970: 32~1329
- [6] Hughes P C. Dynamics of a Chain of Flexible Bodies. J. Astro. Sci., 1979, 27 (4): 359~380
- [7] Singh R P, Vander Voort R J and Likins P. W. Dynamics of Flexible Bodies in Tree Topology—A Computer Oriented Approach. AIAA Paper, 1984: 84~1024
- [8] Ho J Y L. Direct Path Method for Flexible Multibody spacecraft Dynamics. J. of Spacecraft and Rockets, 1977, 14(4-6): 102~110
- [9] Ho J Y L, Herber D R. Development of Dynamics and Control Simulation of Large Flexible Space Systems. J. of Guidance, Control, and Dynamics. 1985, 8 (4-7): 374~384
- [10] Ibrahim A M and Modi V J. A Formulation for Studying Dynamics of N Connected Flexible Deployable Members. Acta Astronautica, 1967, 16: 151~164
- [11] Ider S K and Amirouche M L F Influence of Geometric Nonlinearities in the Dynamics of Flexible Treelike Structures. J. of Guidance, Control, and Dynamics, 1989, 12(6): 830~837
- [12] Kane T R and Levinson D A. Dynamics Theory and Applications. McGraw—Hill, New York, 1985
- [13] 金梁. 挠性多体系统的一般动力学模型. 航空学报, 1989, 10 (9): 501~506

Kane's Equations of Flexible Multibody Systems with Tree Structure —— A Computer—Oriented Modeling Approach

Jin Liang

(National University of Defense Technology)

Helmut F. Bauer

(Universität de Bundeswehr München)

Abstract

The Kane's dynamical model of flexible multibody space systems with tree structure is developed in this paper. The system topology is restricted to a tree configuration, which is defined as an arbitrary set of flexible and rigid bodies connected by hinges characterizing relative translations and rotations of two adjoining bodies. The relative translational velocities, angular velocities, and the differential of model coordinates are selected as the generalized velocities. The motion equations of minimum dimension are derived via Kane's method. The resulting equations are suitable for automatic generation, and simulated by computer.

Key words flexible multibody systems, generalized velocities, Kane's method, motion equations