

# 样条函数康特诺维奇杂交元法 在复合材料板弯曲中的应用

徐后华 刘晓锋

(航天技术系)

**摘要** 本文通过修正余能原理,用三次 B 样条函数对应力和位移场进行插值,提出一种新的杂交元,应用离散的康特诺维奇法解决了金属和复合材料的弯曲问题。该法具有收敛快、计算精度高、处理边界条件方便的特点,能得到与位移同一精度的应力解,而且不存在多余零能模式和闭锁问题,是一种解决板弯曲问题的行之有效的计算方法。

**关键词** 修正余能原理,样条函数,康特诺维奇法,杂交元法

**分类号** O343.4

样条函数康特诺维奇法是最新提出的一种数值型的康特诺维奇法<sup>[1]</sup>。它是基于康特诺维奇、克雷洛夫1941年提出的一种近似变分理论<sup>[2]</sup>,用三次 B 样条函数的线性组合来逼近位移场,将双样条函数的二维问题变成一维问题进行迭代求解。文献[1]、[4]、[5]用这一计算方法解决了复合材料板和圆柱曲板的弯曲及线性稳定性问题。用此法求得的元素具有 B 样条函数的全部优点,在解决板和圆柱曲板的弯曲及线性稳定性问题时与有限元法相比具有收敛快、精度高、占用内存少等优点。本文在此基础上,通过修正的余能原理用三次 B 样条函数对整个板的位移场、应力场进行插值,无需象一般杂交元法那样考虑应力系数与位移系数匹配问题,在算例中也未出现多余零能模式。通过对各种边界条件板的弯曲问题的算例可以看出,本文提出的方法具有样条函数康特诺维奇位移法和普通杂交元、混合元法不具备的优点,是一种行之有效的计算方法。

## 1 基本公式

为了考虑横向剪切影响,将位移函数假设如下的双三次 B 样条函数的线性组合:

$$\begin{aligned} u &= Z\theta_y(x, y) = ZX_1(x)\Phi_1(y) \\ v &= -Z\theta_x(x, y) = -ZX_2(x)\Phi_2(y) \\ w &= w(x, y) = X_3(x)\Phi_3(y) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{式中} \quad X_1(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i \Phi_{i1x} = \Phi_{1x}^T \alpha, \quad X_2(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \beta_i \Phi_{i2x} = \Phi_{2x}^T \beta,$$

\* 1990年11月23日收稿

$$\begin{aligned} X_3(x) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \gamma_i \Phi_{i3x} = \tilde{\Phi}_{3x}^T \gamma, & \Phi_1(y) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \xi_i \Phi_{i1y} = \tilde{\Phi}_{1y}^T \xi \\ \Phi_2(y) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \eta_i \Phi_{i2y} = \tilde{\Phi}_{2y}^T \eta, & \Phi_3(y) &= \sum_{i=-1}^{N+1} \zeta_i \Phi_{i3y} = \tilde{\Phi}_{3y}^T \zeta \\ \Phi_{ix} &= I_{ix} \varphi(x), & \Phi_{iy} &= I_{iy} \varphi(y) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

$I_{ix}$ 、 $I_{iy}$ 为位移边界条件矩阵， $\varphi$ 为三次B样条基函数矩阵。

按照康特诺维奇法思想，预先给定任一方向（ $y$ 方向）的位移系数 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ 的值，根据修正的余能原理来确定另一方向（ $x$ 方向）的位移系数 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 的值。(1)式可以写为：

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \begin{bmatrix} Z\Phi_1(y)\tilde{\Phi}_{1x}^T & 0 & 0 \\ 0 & -Z\Phi_2(y)\tilde{\Phi}_{2x}^T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3(y)\tilde{\Phi}_{3x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \\ &= Nq \end{aligned} \quad (2)$$

利用几何方程可以写出

$$\varepsilon = Du = DNq = Bq$$

式中， $\varepsilon^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]$

将应力函数也假设成双三次B样条函数的线性组合：

$$\sigma_x = ZX_1(x)Y_1(y), \quad \sigma_y = ZX_2(x)Y_2(y), \quad \tau_{xy} = ZX_3(x)Y_3(y) \quad (3)$$

由平衡方程得到：

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{1}{2}(h^2 - z^2)(X_1'(x)Y_1(y) + X_3(x)Y_3'(y)) \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2}(h^2 - z^2)(X_2(x)Y_2'(y) + X_3(x)Y_3'(y)) \\ \sigma_z &= \frac{1}{6}(z^3 - 3h^2z - 2h^3)(X_1'(x)Y_1'(y) + 2X_3'(x)Y_3'(y) + X_2(x)Y_2''(y)) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} X_1(x) &= \sum_{i=-1}^{M+1} A_i \Psi_{i1x} = \tilde{\Psi}_{1x}^T A, & X_2(x) &= \sum_{i=-1}^{M+1} B_i \Psi_{i2x} = \tilde{\Psi}_{2x}^T B \\ X_3(x) &= \sum_{i=-1}^{M+1} C_i \Psi_{i3x} = \tilde{\Psi}_{3x}^T C, & Y_1(y) &= \sum_{i=-1}^{M+1} M_i \Psi_{i1y} = \tilde{\Psi}_{1y}^T M \\ Y_2(y) &= \sum_{i=-1}^{M+1} N_i \Psi_{i2y} = \tilde{\Psi}_{2y}^T N, & Y_3(y) &= \sum_{i=-1}^{M+1} L_i \Psi_{i3y} = \tilde{\Psi}_{3y}^T L \\ \Psi_{ix} &= J_{ix} \varphi(x), \Psi_{iy} &= J_{iy} \varphi(y) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4)$$

$J_{ix}$ 、 $J_{iy}$ 为应力边界条件矩阵， $\varphi$ 为三次B样条基函数矩阵。

预先给定任一方向（ $y$ 方向）应力系数 $M$ 、 $N$ 、 $L$ 的值，确定另一方向（ $x$ 方向）应力系数 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 的值。(3)、(4)两式可以写成矩阵形式为： $\tilde{\sigma} = P\tilde{\beta}$  (5)

$$\tilde{\sigma}^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}], \quad \tilde{\beta}^T = [A^T B^T C^T]$$

$$P = \begin{bmatrix} ZY_1(y) \Psi_{1z}^T(x) & 0 & 0 \\ 0 & ZY_2(y) \Psi_{2z}^T(x) & 0 \\ f_1 Y_1(y) \Psi_{1z}^T(x) & f_1 Y_2(y) \Psi_{2z}^T(x) & 2f_1 Y_3(y) \Psi_{3z}^T(x) \\ 0 & f_2 Y_2(y) \Psi_{2z}^T(x) & f_2 Y_3(y) \Psi_{3z}^T(x) \\ f_1 Y_1(y) \Psi_{1z}^T(x) & 0 & f_2 Y_3(y) \Psi_{3z}^T(x) \\ 0 & 0 & ZY_3(y) \Psi_{3z}^T(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$f_1 = \frac{1}{6}(Z^3 - 3h^2Z - 2h^3), \quad f_2 = \frac{1}{2}(h^2 - Z^2)$$

修正的余能原理泛函的表达式为

$$\Pi_{mc} = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T s \sigma dv - \int_v \sigma^T \varepsilon dv + \int_{s_0} u^T \bar{T} dA \quad (7)$$

将(2)、(5)式代入(7)式得

$$\Pi_{mc} = \frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T G q + Q^T q \quad (8)$$

式中  $H = \int_v P^T s P dv, \quad G = \int_v P^T B dv, \quad Q^T = \int_{s_0} \bar{T}^T N dA$

由  $\frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial \beta} = 0$  得到:  $\beta = H^{-1} G q$  (9)

将(9)式代入(8)式得:  $\Pi_{mc} = Q^T q - \frac{1}{2} q^T K q$

式中,  $K = G^T H^{-1} G$

再根据驻值条件  $\frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial q} = 0$  得到:  $q = K^{-1} Q$  (10)

将 $q$ 值代入(9)式即可得到 $\beta$ 。把前面求得的 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 和 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 作为已知值,用以上同样的推导可以得到(9)、(10)式。从(9)、(10)式可以求得 $\xi$ 、 $\eta$ 、 $\zeta$ 和 $M$ 、 $N$ 、 $L$ 。如此迭代下去,直到达到所要求的精度为止。

## 2 算例

### 2.1 金属平板的弯曲

本文计算的金属方形平板在均布载荷作用下四边简支、四边固支、对边简支另一对边固支、三边简支一边自由以及三边简支一边固支

表 1 金属方板最大挠度系数  $\alpha_{max}$  ( $\nu=0.3$ )

边界条件	四边简支	四边固支	$z$ 对边简支 $y$ 对边固支	三边简支 $y=a$ 边固支	三边简支 $y=a$ 边自由
本文解	0.004058	0.00128	0.00193	0.00287	0.0135
解析解 <sup>[8]</sup>	0.00406	0.00126	0.00192	0.0028	0.0128

$$W_{max} = \alpha_{max} q a^4 / D \quad (D \text{ 为弯曲刚度})$$

五种边界条件的弯曲问题。各组结果如表1。

表 2 四边简支方板的弯矩与剪力

内力	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_z)_{\max}$
本文解	$0.04761qa^2$	$0.04761qa^2$	$0.352qa$
解析解 <sup>[8]</sup>	$0.0479qa^2$	$0.0479qa^2$	$0.338qa$

表 3 四边固支方板的弯矩与剪力

内力	$(M_x)_{z=a, y=a/2}$	$(M_x)_{z=a/2, y=a/2}$	$(Q_z)_{z=0, y=a/2}$
本文解	$-0.0453qa^2$	$0.0231qa^2$	$0.2645qa$
解析解 <sup>[8]</sup>	$-0.0513qa^2$	$0.0221qa^2$	

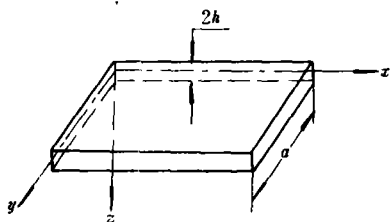


图 1

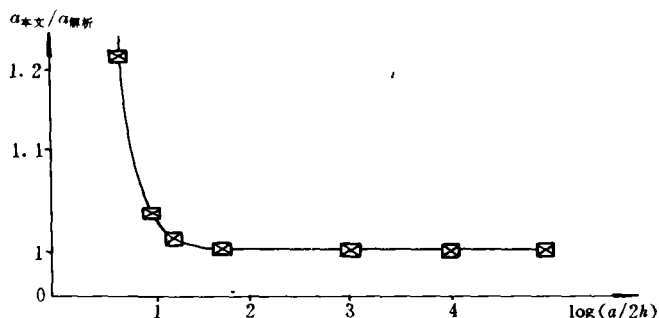


图2 最大挠度系数比随长厚比变化曲线 (四边简支板)

表 4  $x$  对边简支,  $y$  对边固支方板的弯矩与剪力

内力	$(M_x)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(M_y)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(M_y)_{z=\frac{a}{2}, y=a}$	$(Q_y)_{z=\frac{a}{2}, y=0}$
本文解	$0.02448qa^2$	$0.03285qa^2$	$-0.06516qa^2$	$0.3624qa$
解析解 <sup>[8]</sup>	$0.0244qa^2$	$0.0332qa^2$	$-0.02697qa^2$	

表 5 三边简支,  $y=a$  边固支方板的弯矩与剪力

内力	$(M_y)_{z=\frac{a}{2}, y=a}$	$(M_x)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(M_y)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(Q_y)_{z=\frac{a}{2}, y=a}$
本文解	$-0.0793qa^2$	$0.0349qa^2$	$0.040qa^2$	$0.3877qa$
解析解 <sup>[8]</sup>	$-0.084qa^2$	$0.034qa^2$	$0.039qa^2$	

表 6 三边简支,  $y=a$  边自由方板的弯矩与剪力

内力	$(M_x)_{z=\frac{a}{2}, y=a}$	$(M_x)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(M_y)_{z=\frac{a}{2}, y=\frac{a}{2}}$	$(Q_y)_{z=0, y=\frac{a}{2}}$
本文解	$0.1167qa^2$	$0.0826qa^2$	$0.0394qa^2$	$-0.6751qa$
解析解 <sup>[8]</sup>	$0.112qa^2$	$0.080qa^2$	$0.039qa^2$	

## 2.2 复合材料单层板弯曲

纤维沿  $x$  方向铺设, 材料弹性系数如下:

$$E_L = 40 \times 10^6,$$

$$E_T = 1 \times 10^6, \nu_{LT} = 0.25,$$

$$\nu_{TT} = 0,$$

$$G_{LT} = 0.5 \times 10^6,$$

$$G_{TT} = 0.2 \times 10^6$$

几何尺寸:  $a = 5, h = 0.03$   
 (图1), 载荷  $q = 1$ . 计算结果  
 如表7.

表7 四边简支方板在均布载荷作用下的中心挠度与弯矩

挠度、弯矩	$W_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$
本文解	0.0123	3.32	0.0513
解析解 <sup>[9]</sup>	0.0120	3.35	0.0569
(本文-解析)/(解析)	2.5%	0.9%	9.8%

表8 其它各种边界条件方板在均布载荷作用下的内力与最大挠度

边界条件 \ 挠度、内力	$W_{\max}$	$(M_x)_{\max}$	$(M_y)_{\max}$	$(Q_x)_{\max}$	$(Q_y)_{\max}$
四边固支	0.002614	1.022	0.149	2.139	0.239
三边简支 $y = a$ 边固支	0.01203	3.246	0.397	2.742	0.628
三边简支 $y = a$ 边自由	0.01198	3.228	0.167	2.629	0.618
$x$ 对边简支 $y$ 对边固支	0.01165	3.133	0.406	2.703	0.5837

各种边界条件下的内力曲线见图3-8, 图中①: 四边简支, ②: 三边简支,  $y = a$  边固支, ③:  $x$  对边简支,  $y$  对边固支, ④: 四边固支。

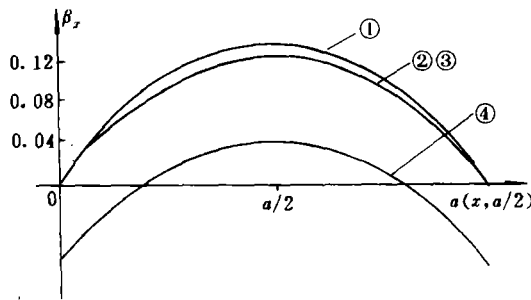


图3  $M_x = \beta_z q a^2$

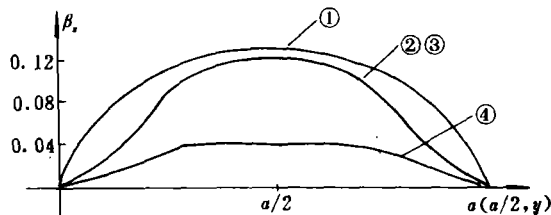


图4  $M_y = \beta_z q a^2$

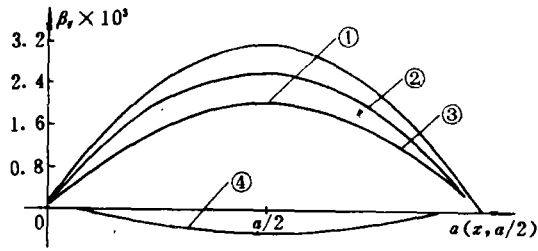


图 5  $M_y = \beta_y q a^2$

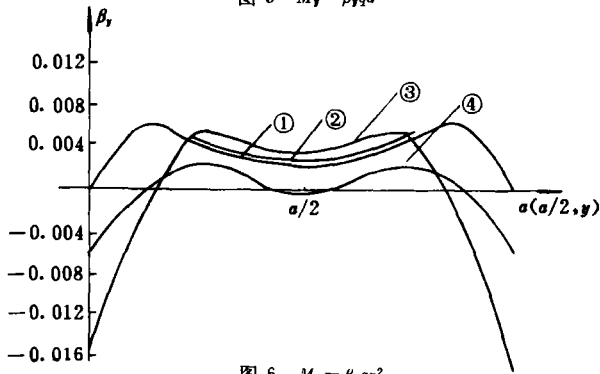


图 6  $M_x = \beta_y q a^2$

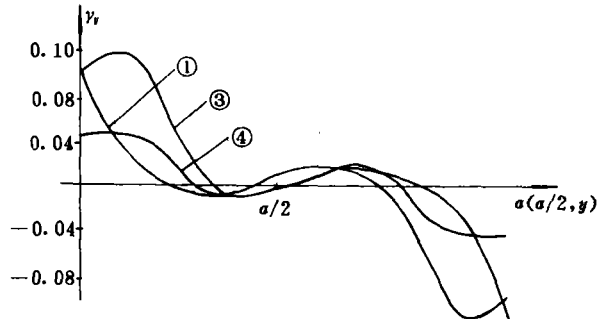


图 7  $Q_y = \gamma_y q a^2$

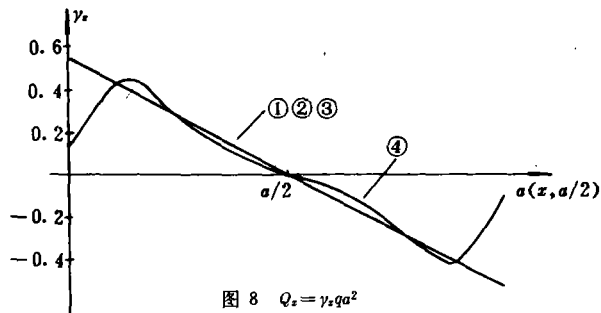


图 8  $Q_x = \gamma_x q a^2$

### 3 结 论

算例说明，三次 B 样条函数在整个板面积上可以很准确地逼近位移和应力场，能方便地处理各种应力、位移边界条件。离散的康特诺维奇法具有收敛速度快、占用机器内存

小、对初值不敏感等优点，在算例中一般迭代四次以内，就能使前后两次结果差值小于 $10^{-5}$ 。在计算过程中没有出现多余零能模式和闭锁现象。从本文计算结果与解析解的比较可以看出，应力与位移解具有同一量级的精度，对于未找到解析解的结果本文亦一并列出供作参考。本文提供的方法可用于解决复合材料迭层板的弯曲问题，并可进一步推广用来解决曲板、特征值及非线性问题。

### 参 考 文 献

- [1] 陈广南, 徐后华. 样条函数康托诺维奇法在复合材料板弯曲中的应用. 第四届全国复合材料学术会议论文集, 1986
- [2] 钱伟长. 变分法及有限元. 科学出版社, 1980
- [3] 李岳生, 齐东旭. 样条函数法. 科学出版社, 1979
- [4] 徐后华, 陈广南. 样条函数康托诺维奇法在复合材料板和圆柱曲板及线性稳定性分析中的应用. 国防科技大学学报, 1989, (3)
- [5] 徐后华, 陈广南. 样条函数康托诺维奇法在复合材料板和圆柱曲板弯曲中的应用. 宇航学报, 1989 (2)
- [6] Pian T H H. Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions. AIAA. J, 1964: 1333-1336
- [7] Uri. Jsach. Locking of Plate/Shell Element. Int. J. for Num, Meth, Egn, 1981, 17: 633~644
- [8] 铁摩辛柯. 板壳理论. 科学出版社, 1977
- [9] 琼斯 RM. 复合材料力学. 上海科技出版社, 1981

## The Application of Kantorovich Hybrid Method to the Plate Bending

Xu Haohua Lu Xiaofeng  
(Department of Space Technology)

### Abstract

Using the cubic B—Spline function as interpolation functions of stress and displacement, this paper has solved the bending problem of isotropic and anisotropic plate with modified complement energy principle and newly created kantorovich method. The method has advantages of high precision, rapid convergerice and the convenience to deal with various boundary conditions. It has obtained stress solution with the same precision of displacement and does not exhibit locking effect and kinematic deformation mode, and is proved to be an effective method in solving bending problems of plate.

**Key words** Modified complement energy principle, spline function, kantorovich method, hybrid method