

## 保凸插值样条曲线的一种构造方法

方 逵

(系统工程与应用数学系)

**摘 要** 本文提出了一种描述保凸三次参数插值曲线的新算法。算法构造局部、计算简单有效, 算法对开曲线和闭曲线都适合, 最后给出了几个曲线构造的例子。

**关键词** 计算几何, 微分几何, 参数插值样条曲线, Bèzier 曲线, 曲率

**分类号** O186.14

已知平面上的一有序点列  $\{P_i\}_{i=0}^n$ , 依次用直线段连接相邻两点组成一多边形, 当多边形是凸的时, 我们寻找插值每一点  $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$  的一条光滑曲线, 且曲线与多边形的凸性保持一致。这就称为保凸插值曲线。如果将点列的始点  $P_0$  和终点  $P_n$  也连接起来, 则多边形为闭的, 这时的插值曲线为闭曲线。

构造保凸插值曲线的一个简单而又直观的例子是, 当点列仅有二个或三个时, 可用一段圆弧将它们连接起来, 但是对一般的点列是不大可能找到一条“完整”的插值将所有这些点连接起来的。于是就用一些曲线段拼接, 使这些曲线段在连接点(一般属插值点)处保证一定的连续阶, 且曲线与点列有相同的凸性。这样的插值曲线称为保凸插值样条曲线。

在保凸插值样条曲线的构造上已有不少方法, 文献[1~2]中讨论了这类保形插值, 所用方法都需解方程组确定插值曲线的形状。文献[3]中用一般三次参数曲线研究了这类插值, 通过解方程组选择参数可以求得 ( $C^2$ -连续的) 保凸插值曲线。文献[4]中巧妙地构造了保凸分段三次 Bèzier 插值曲线。上面这些方法的共同特点是都以三次参数曲线段作基础, 但构造缺乏局部性, 不利于局部修改, 且讨论的插值曲线仅对开曲线有效。一般来说构造一条 ( $C^2$ -连续的) 闭曲线要困难得多。本文在每两型值点  $P_i, P_{i+1} (i=0, 1, \dots, n-1)$  之间用两段三次 Bèzier 曲线连接, 简单、直观地构造了一条 ( $C^2$ -连续的) 保凸插值样条曲线, 所用方法对开曲线和闭曲线都是适合的, 构造的曲线有足够的自由参数供调整、修改曲线的形状, 且曲线有局部性。所有这些优点对曲线的交互式设计是十分方便、有效的。

# 1 $C^2$ 保凸插值样条曲线的构造

已知平面上有一有序点列  $P_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ , 用直线段依次连接相邻两点构成一开 (或闭) 的控制多边形  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$ . 本文只讨论该多边形是凸的情形 (如图 1). 我们的目的是找到一条  $C^2$  连续的开 (闭) 插值样条曲线, 且使曲线与多边形凸性保持一致。

记,  $P_{n+1} = P_0$

$$\vec{a}_i = \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1$$

$$\vec{a}_0 = \vec{a}_{n+1}$$

记曲线在  $P_i$  处的切向量为

$$\begin{cases} \vec{T}_i = (\vec{a}_i + \vec{a}_{i+1})/2 \\ \vec{T}_{n+1} = \vec{T}_0 \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

关于切向量的选取还可用 [5] 中介绍的几种方法。

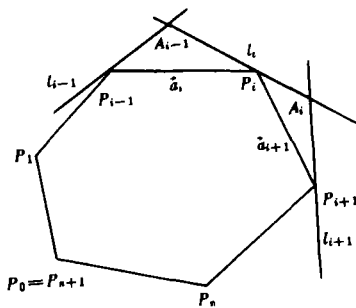


图 1

在图 1 中, 设过  $P_i$  且以  $\vec{T}_i$  为切向量的直线为  $l_i (i=0, 1, 2, \dots, n, n+1)$ , 则由  $\vec{T}_i$  的选取知  $l_i (i=0, 1, \dots, n+1)$  不会与多边形  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$  相交, 且相邻两直线  $l_i, l_{i+1} (i=0, 1, \dots, n)$  必相交, 交点在凸多边形  $\langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$  的外侧, 记为  $A_i$ , 解方程易得

$$A_i = P_i + \frac{|\vec{a}_{i+1} \times \vec{T}_{i+1}|}{|\vec{T}_i \times \vec{T}_{i+1}|} \vec{T}_i; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

下面我们用三次 Bèzier 曲线段来构造保凸插值样条曲线。我们希望在  $P_{i-1}, P_i$  两点之间构造两段三次 Bèzier 曲线, 这两段曲线分别为第  $2i-1$  和  $2i$  段, 且分别记为  $\vec{r}_{2i-1}(t)$  和  $\vec{r}_{2i}(t) (i=1, 2, \dots, n, n+1)$ , 而它们的 Bèzier 点分别设为  $b_{2i-1,j}, b_{2i,j}, i=1, 2, \dots, n+1, j=0, 1, 2, 3$ . 接下来我们定义 Bèzier 点, 如图 2 令

$$\begin{cases} C_i = \lambda_i P_{i-1} + (1-\lambda_i) A_{i-1} \\ D_i = \mu_i P_i + (1-\mu_i) A_i \\ Q_i = (C_i + D_i)/2 \end{cases} \quad (3)$$

则 Bèzier 点为

$$\begin{cases} b_{2i-1,0} = P_{i-1} \\ b_{2i-1,1} = (1-l_{2i-1})C_i + l_{2i-1}P_{i-1} \\ b_{2i-1,2} = (1-l_{2i-1})C_i + l_{2i-1}Q_i \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} b_{2i,1} = (1-l_{2i})D_i + l_{2i}Q_i \\ b_{2i,2} = (1-l_{2i})D_i + l_{2i}P_i \\ b_{2i,3} = P_i \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{且 } b_{2i-1,3} = b_{2i,0} = x_i b_{2i-1,2} + (1-x_i) b_{2i,1} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (6)$$

这里  $0 < \lambda_i, \mu_i, x_i, l_{2i-1}, l_{2i} < 1, \lambda_i, \mu_i$  可任意选取,  $x_i, l_{2i-1}, l_{2i}$  待定。

由上面的 Bèzier 点, 我们得到所有的  $2(n+1)$  段 Bèzier 曲线。

$$\begin{cases} \vec{r}_{2i-1}(t) = \sum_{j=0}^3 B_{3,j}(t) b_{2i-1,j} \\ \vec{r}_{2i}(t) = \sum_{j=0}^3 B_{3,j}(t) b_{2i,j} \end{cases}; \quad j = 1, 2, \dots, n+1 \quad (7)$$

式中  $B_{3,j}(t) = C_3^j t^j (1-t)^{3-j}, 0 \leq t \leq 1$

由 Bèzier 点的选取知, 每段 Bèzier 曲线对应的控制多三角形都是凸的, 而且所有这些  $2(n+1)$  个控制多三角形相连组成一个  $6(n+1)$  边形, 显然这个  $6(n+1)$  边形也是凸多边形。因此我们不难知道  $\vec{r}(t)$  是一条  $C^1$  连续的闭凸曲线。

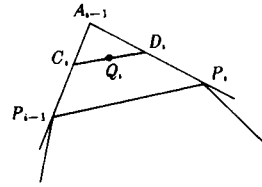


图 2

根据 Bèzier 曲线的端点切向量性质及(2)~(5)式易得:

$$\begin{cases} \vec{r}'_{2i}(1) = 3 \overrightarrow{b_{2i,2} b_{2i,3}} \\ \quad = 3(1-l_{2i})(P_i - D_i) = -3(1-l_{2i}) \overrightarrow{P_i D_i} \\ \vec{r}''_{2i}(1) = 6(\overrightarrow{b_{2i,2} b_{2i,3}} - \overrightarrow{b_{2i,1} b_{2i,2}}) \\ \quad = 6(\frac{1}{3} \vec{r}'_{2i}(1) - l_{2i} \overrightarrow{Q_i P_i}) = 6(\frac{1}{3} \vec{r}'_{2i}(1) + l_{2i} \overrightarrow{P_i Q_i}) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (8)$$

同理

$$\begin{cases} \vec{r}'_{2i-1}(0) = 3(1-l_{2i-1}) \overrightarrow{P_{i-1} C_i} \\ \vec{r}''_{2i-1}(0) = 6(l_{2i-1} \overrightarrow{P_{i-1} Q_i} - \frac{1}{3} \vec{r}'_{2i-1}(0)) \end{cases}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (9)$$

因曲线  $\vec{r}(t)$  在  $P_i (i=1, 2, \dots, n+1)$  处  $C^2$  连续的充要条件<sup>[3]</sup>是

$$\frac{\vec{r}'_{2i}(1) \times \vec{r}''_{2i}(1)}{|\vec{r}'_{2i}(1)|^3} = \frac{\vec{r}'_{2i+1}(0) \times \vec{r}''_{2i+1}(0)}{|\vec{r}'_{2i+1}(0)|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

这里  $\vec{r}'_{2n+3}(1) = \vec{r}'_0(1), \vec{r}''_{2n+3}(1) = \vec{r}''_0(1)$

将(8), (9)式代入上式得:

$$\frac{(-\overrightarrow{P_i D_i} \times \overrightarrow{P_i Q_i}) l_{2i}}{(1-l_{2i})^2 |\overrightarrow{D_i P_i}|^3} = \frac{(\overrightarrow{P_i C_{i+1}} \times \overrightarrow{P_i Q_{i+1}}) l_{2i+1}}{(1-l_{2i+1})^2 |\overrightarrow{P_i C_{i+1}}|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (10)$$

式中,  $l_{2n+3} = l_0, C_{n+2} = C_0, Q_{n+2} = Q_0$ .

因  $D_i, P_i, C_{i+1}$  三点共线, 由图 2 知  $\overrightarrow{P_i D_i} \times \overrightarrow{P_i Q_i}$  与  $\overrightarrow{P_i C_{i+1}} \times \overrightarrow{P_i Q_{i+1}}$  反向, 故式(10)等价于

$$\frac{l_{2i} |\overrightarrow{P_i D_i} \times \overrightarrow{P_i Q_i}|}{(1-l_{2i})^2 |\overrightarrow{D_i P_i}|^3} = \frac{l_{2i+1} |\overrightarrow{P_i C_{i+1}} \times \overrightarrow{P_i Q_{i+1}}|}{(1-l_{2i+1})^2 |\overrightarrow{P_i C_{i+1}}|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (11)$$

在式(11)中, 左右两边的待定系数是相互独立的, 因此只要任意选取一边即可, 这里我们选取  $0 < l_{2i} < 1 (i=1, 2, \dots, n+1)$ , 则由式(11)可求得  $l_{2i+1} (i=1, 2, \dots, n+1)$ , 且有  $0 < l_{2i+1} < 1$ . 现证明  $0 < l_{2i+1} < 1$ .

事实上, 令:

$$\overline{W}_i = \frac{l_{2i} |\overrightarrow{P_i D_i} \times \overrightarrow{P_i Q_i}|}{|\overrightarrow{D_i P_i}|^3 (1-l_{2i})^2}, \quad \overline{Z}_i = \frac{|\overrightarrow{P_i C_{i+1}} \times \overrightarrow{P_i Q_{i+1}}|}{|\overrightarrow{P_i C_{i+1}}|^3}$$

则式(11)简化为

$$\bar{W}_i = \frac{l_{2i+1}}{(1-l_{2i+1})^2} \bar{Z}_i; \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

从而得到

$$l_{2i+1} = 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\bar{W}_i}{\bar{Z}_i}}}; \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (12)$$

显然  $0 < l_{2i+1} < 1$ .

(证毕)

接着我们选择合适的  $0 < x_i < 1 (i=1, 2, \dots, n+1)$  使曲线  $\tilde{r}(t)$  在连接点  $b_{2i-1,3}(b_{2i,0}) i=1, 2, \dots, n+1$  处也是  $C^2$  连续的。

同理有 Bézier 曲线的端点切向量性质得

$$\begin{aligned} \tilde{r}'_{2i-1}(1) &= 3 \overrightarrow{b_{2i-1,2} b_{2i-1,3}} = 3(1-x_i)(b_{2i-1} - b_{2i-1,2}) \\ &= \frac{3}{2}(1-x_i)(2-l_{2i-1}l_{2i-1}) \overrightarrow{C_i D_i} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{r}'_{2i}(0) = \frac{3}{2}x_i(2-l_{2i}l_{2i-1}) \overrightarrow{C_i D_i} \quad (14)$$

$$\tilde{r}''_{2i-1}(1) = 12 \left( \frac{1}{3} \tilde{r}'_{2i-1}(1) - \overrightarrow{b_{2i-1,1} b_{2i-1,2}} \right) = 4\tilde{r}'_{2i-1}(1) - 12l_{2i-1} \overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \quad (15)$$

$$\tilde{r}''_{2i}(0) = 12l_{2i} \overrightarrow{Q_i P_i} - 4\tilde{r}'_{2i}(0) \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (16)$$

由  $\tilde{r}(t)$  在连接点  $b_{2i-1,3}(b_{2i,0})$  处  $C^2$  连续的充要条件

$$\frac{\tilde{r}'_{2i-1}(1) \times \tilde{r}''_{2i-1}(1)}{|\tilde{r}'_{2i-1}(1)|^3} = \frac{\tilde{r}'_{2i}(0) \times \tilde{r}''_{2i}(0)}{|\tilde{r}'_{2i}(0)|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

将式(13)~(16)代入上式得

$$\frac{l_{2i-1}(1-x_i)(2-l_{2i}-l_{2i-1}) \overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \times \overrightarrow{C_i D_i}}{(1-x_i)^3(2-l_{2i}-l_{2i-1})^3 |\overrightarrow{C_i D_i}|^3} = \frac{l_{2i}x_i(2-l_{2i}-l_{2i-1}) \overrightarrow{C_i D_i} \times \overrightarrow{Q_i P_i}}{x_i^3(2-l_{2i}-l_{2i-1})^3 |\overrightarrow{C_i D_i}|^3}$$

化简得

$$\frac{l_{2i-1} \overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \times \overrightarrow{C_i D_i}}{(1-x_i)^2 |\overrightarrow{C_i D_i}|^3} = \frac{l_{2i} \overrightarrow{C_i D_i} \times \overrightarrow{Q_i P_i}}{x_i^2 |\overrightarrow{C_i D_i}|^3} \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

由图 2 知  $\overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \times \overrightarrow{C_i D_i}$  与  $\overrightarrow{C_i D_i} \times \overrightarrow{Q_i P_i}$  同向, 故上式等价于

$$\frac{l_{2i-1} |\overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \times \overrightarrow{C_i D_i}|}{(1-x_i)^2} = \frac{l_{2i} |\overrightarrow{C_i D_i} \times \overrightarrow{Q_i P_i}|}{x_i^2} \quad (17)$$

令

$$W_i = \frac{|\overrightarrow{C_i D_i} \times \overrightarrow{Q_i P_i}|}{|\overrightarrow{P_{i-1} Q_i} \times \overrightarrow{C_i D_i}|}$$

则由式(17)解得  $x_i$  为

$$x_i = 1 \left/ \left[ 1 + \sqrt{W_i \frac{l_{2i-1}}{l_{2i}}} \right] \right.; \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (18)$$

从上式易知  $0 < x_i < 1$ .

到此我们得到了  $l_{2i-1}, l_{2i}, x_i (i=1, 2, \dots, n+1)$ , 将  $l_{2i-1}, l_{2i}, x_i$  代入式(3)~(6), 则求得所有的 Bézier 点  $b_{2i-1,j}, b_{2i,j}, i=1, 2, \dots, n+1, j=0, 1, 2, 3$ . 将这些 Bézier 点

代入(7)式就得到了所有的 Bézier 曲线段  $\vec{r}_{2i-1}(t), \vec{r}_{2i}(t) (i=1, 2, \dots, n+1)$ . 这些曲线段构成一条分段的闭的  $C^2$  连续保凸插值三次 Bézier 曲线.

对于开曲线的构造, 我们无需扩充型值点  $P_{n+1}=P_0$ , 只要直接应用上面的方法则可得  $2n$  段三次 Bézier 曲线.

下面简单归纳一下曲线  $\vec{r}(t)$  的计算步骤

- |  |   |
|--|---|
| <p>(1) <math>P_0 \Rightarrow P_{n+1}</math><br/>         For <math>i_1 = 1</math> to <math>n</math> do<br/> <math>P_i - P_{i-1} \Rightarrow \vec{a}_i</math><br/>         For <math>i_2 = 0</math> to <math>n</math> do<br/> <math>(P_{i+1} - P_{i-1})/2 \Rightarrow \vec{T}_i</math><br/> <math>\vec{T}_{n+1} \Rightarrow \vec{T}_0, \vec{a}_{n+1} \Rightarrow \vec{a}_0</math></p> | <p>(5) For <math>i_3 = 1</math> to <math>n+1</math> do<br/>         Calculate <math>l_{2i+1}</math> from (12)<br/> <math>l_0 = l_{2n+3}</math><br/>         For <math>i_4 = 1</math> to <math>n+1</math> do<br/>         Calculate <math>x_i</math> from (18)</p> |
| <p>(2) For <math>i_5 = 0</math> to <math>n</math> do<br/>         Calculate <math>A_i</math> from (2)</p>  | <p>(6) For <math>i_6 = 1</math> to <math>n+1</math> do<br/>         Calculate Bezier points from (4)、(5)、(6)</p>  |
| <p>(3) For <math>i_7 = 1</math>, to <math>n+1</math> do<br/>         Choose free parameters <math>0 &lt; \lambda_i, \mu_i, l_{2i} &lt; 1</math></p>  | <p>(7) For <math>i_8 = 1</math> to <math>n+1</math> do<br/>         Calculate Bézier curves from (7)</p>  |
| <p>(4) For <math>i_9 = 1</math> to <math>n+1</math> do<br/>         Calculate <math>C_i, D_i, Q_i</math> from (3)</p>  | <p>(8) 若曲线满意则绘制图形, 否则修改参数 <math>0 &lt; \lambda_i, \mu_i, l_{2i} &lt; 1, i=1, 2, \dots, n+1</math>, 再转(3), 直到设计出满意曲线为止.</p>  |

## 2. 几种保凸插值样条曲线的比较

本文用分段三次 Bézier 曲线作基础构造  $C^2$  连续的保凸插值样条曲线, 方法类似于双圆弧样条插值<sup>[6]</sup>. 但三次 Bézier 曲线段可以灵活的  $C^2$  对接, 而双圆弧段只能  $C^1$  拼接. 本文方法与[1~4]比较有如下优点.

(1) **广泛性** 方法对开曲线和闭曲线都同样适合, 且开曲线算法是闭曲线算法的特殊情况, 而[3~4]中算法仅适用于开曲线. 文献[1~2]中开曲线与闭曲线算法相差较大.

(2) **简明性** 方法可简明、直观地构造曲线, 几何意义明显, 曲线设有足够的自由参数以供调节曲线, 文献[1~3]中都要解二阶以上的非线性方程组.

(3) **局部性** 整条曲线是具有局部构造性, 可以局部修改而不影响整条曲线. 当改变型值点  $P_i$  时, 仅仅影响它邻近的四段曲线  $\vec{r}_{2i-1}(t), \vec{r}_{2i}(t), \vec{r}_{2i+1}(t), \vec{r}_{2i+2}(t)$ , 同样改变调节参数  $\lambda_i$  只影响  $\vec{r}_{2i-1}(t), \vec{r}_{2i}(t), \vec{r}_{2i+1}(t)$  三段曲线, 改变  $\mu_i$  影响  $\vec{r}_{2i}(t), \vec{r}_{2i+1}(t), \vec{r}_{2i+2}(t)$  三段曲线, 文献[3~4]中算法不具有局部修改性. 因为曲线设计中局部修改十分重要, 所以一种好的曲线设计算法必须具有曲线构造局部性.

## 3 数值例子

例 1 设有圆心在原点, 半径为 100 的圆, 在圆上取四点. 即

$$P_0(100, 0), P_1(0, 100), P_2(-100, 0), P_3(0, -100)$$

用本文方法构造的分段三次 Bézier 保凸插值曲线能很好地逼近圆周曲线, 如图 3、4. 图 3 是圆周曲线, 图 4 是逼近曲线. 图 4 中参数选择为

$$\lambda_i = \mu_i = 1/2 \quad (i=0, 1, 2, 3), \lambda_{2i-1} = 1/2 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

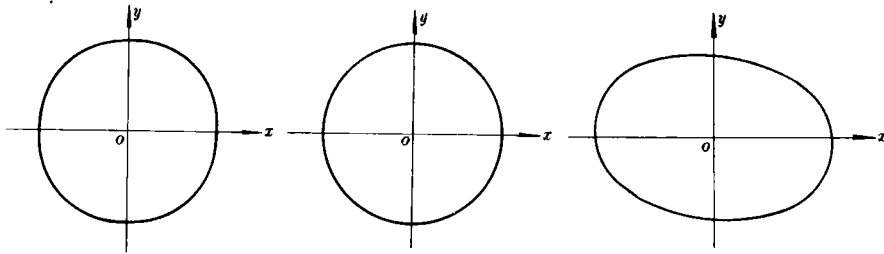


图 3 原曲线图      图 4 插值曲线图      图 5 插值样条曲线

例 2 已知平面上有序点列  $\{P_i = (x_i, y_i)\}_{i=0}^7$  如下表:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	200	100	0	-100	200	-100	0	100
$y_i$	0	135	150	140	0	-135	150	140

选取参数如下:  $\lambda_i = \mu_i = 1/2$  ( $i=0, 1, \dots, 7$ ),  $\lambda_{2i-1} = 1/2$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ), 在 Sun-386 上很快可得到一条闭的  $C^2$  连续的插值样条曲线如图 5.

### 参 考 文 献

- [1] Goodman T N T and Unsworth K. Shape Preserving Interpolation by Curvature Continuous Parametric Curve. CAGD, 1988, 5(4): 323~338
- [2] McLaughlin H. Shape Preserving Planar Interpolation: Algorithm. IEEE, Comp. Graphics and Appl, 1983, 3(3): 58~67
- [3] 苏步青等. 计算几何. 上海科技出版社, 1986
- [4] 程正兴. 保凸插值样条曲线. 数学研究与评论, 1983, 3(2): 51~56
- [5] Böhm W, Farin G, Kahman J. A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD. CAGD, 1984, 1: 1~20
- [6] 孙家昶, 郑会琳. 圆弧样条与双圆弧逼近. 计算数学, 1980

## A Construction Method of Convexity Preserving Interpolation Spline Curves

Fang Kuei

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

### Abstract

A new algorithm of ( $C^2$ -Continuous) convexity preserving cubic parametric interpolation curves is derived. the construction of the algorithm is local, The calculation involved is simple and efficient. The algorithm is also appropriate for both closed curves and open curves. Finally a few examples of curve construction are given.

**Key words** computational geometry, differential geometry, parametric interpolation spline curves, Bézier curves, curvature