国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第3期 1991年9月 Vol. 13 No. 3

由新比旧好元件组成的指数寿命系统的特性研究

屈田兴
（应用数学与系统工程系）

摘 要 文中研究了由独立的新比旧好元件组成的指数寿命系统，证明了：(i)对单调系统，它本质上是由指数寿命的元件串联而成；(ii)对系统的寿命是元件寿命的情形，除了一个元件是指数的外，其余元件的寿命分布均在零处退化。

关键词 单调系统，寿命分布，新比旧好元件，可靠度函数，指数寿命
分类号 O213.2

在可靠性统计理论中，指数寿命分布不仅在各种寿命分布类中占有特殊地位，而且在工程上应用广泛。文中把 Block 和 Savits 在文[2]中关于由独立的平均失效率不减的元件组成的指数寿命系统的有关结论推广到了由独立的新比旧好元件组成的指数寿命系统。主要结果是定理1和定理7，并给出了它们的应用。文中采用的概念与记号均沿用文献[1].

1 主要结果及其证明

定理1 设 F 是由 n 个独立的新比旧好元件组成的单调系统的寿命分布，而这 n 个元件的寿命分布分别为 $F_1(t),F_2(t),\cdots,Fn(t)$. 若 F 是指数的，则存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，使

$$\overline{F}(t)=\prod_{j=1}^{k}\overline{F}_{i_j}(t),\quad t\geqslant 0$$

且诸 F_{i_j} 均是指数的。

为证明定理1，先介绍几个引理。

引理1 设 $h(p)$是由 n 个独立元件组成的单调系统的可靠度函数，而 P_i 是第 i 个元件工作的概率，则

(*i*) 对每个 i 有

$$h(p)=P_ih(1_i,P)+(1-P_i)h(O_i,P)\tag{1}$$

(*ii*) 对 $0\leqslant P'\leqslant 1$，$0\leqslant P'\leqslant 1$，有

$$h(P\cdot P')\leqslant h(P)h(P')\tag{2}$$

---

* 1988年11月10日收稿

(iii)对 $\alpha\in(0,1]$，有

$$h^{\alpha}(\boldsymbol{P})\leqslant h(\boldsymbol{P}^{\alpha}) \tag{3}$$

引理 1　$(i)(ii)$的证明见文[1]第二章，(iii)的证明见文[1]第四章。

引理 2　设 $h(\boldsymbol{P})$是由 n 个独立元件组成的单调系统的可靠度函数，则

(i)　对 $\alpha\in(0,1]$，有

$$h^{\alpha}(\boldsymbol{P})\leqslant P_i^{\alpha}h^{\alpha}(1_i,\boldsymbol{P})+(1-P_i^{\alpha})h^{\alpha}(O_i,\boldsymbol{P}) \tag{4}$$

(ii)　若存在 $\alpha\in(0,1]$，使(4)式等号成立，则下述三个条件中必至少有一个成立

(a)　　$P_i=0$ 或 $P_i=1$；

(b)　　$h(1_i,\boldsymbol{P})=h(O_i,\boldsymbol{P})$

(c)　　$h(O_i,\boldsymbol{P})=0$

证明见[2]引理(2.2).

此外，由新比旧好寿命分布的定义易知。

引理 3　设寿命分布 F 是新比旧好的，则对任意自然数 n 有

$$\overline{F}^{\frac{1}{n}}(t)\leqslant\overline{F}(\frac{t}{n}),t\geqslant 0$$

定理 1 的证明：设该系统的可靠度函数为 h，又设 $\overline{F}(t)=e^{-\lambda t},t\geqslant 0$，$\lambda$ 为某正常数，则

$$e^{-\lambda t}=h(\overline{F}_1(t),\overline{F}_2(t),\cdots,\overline{F}_n(t))=h(\overline{\boldsymbol{F}}(t)),t\geqslant 0$$

式中，$\overline{\boldsymbol{F}}(t)$表示向量$(\overline{F}_1(t),\overline{F}_2(t),\cdots,\overline{F}_n(t)$. 类似于文[2]中定理(2.1)的证明可知，存在 i，使得对一切 $t>0$ 成立

$$0<\overline{F}_i(t)<1$$

下面对系统的元件数 n 用归纳法来证明定理的结论。当 $n=1$ 时，结论显然成立假设结论对任何元件数小于 n 的单调系统成立，则对元件数为 n 的单调系统，由(1)式知

$$e^{-\lambda t}=\overline{F}_i(t)h(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))+(1-\overline{F}_i(t))h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))$$

这里取 i 便对一切 $t>0$ 有 $0<\overline{F}_i(t)<1$. 由于诸元件独立且是新比旧好的，所以对一切自然数 m 有

$$\begin{aligned}
h(\overline{\boldsymbol{F}}(\frac{t}{m}))&\geqslant h(\overline{\boldsymbol{F}}^{\frac{1}{m}}(t)) && \text{(引理 3)}\\
&=\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t)h(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}^{\frac{1}{m}}(t))+(1-\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t))h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}^{\frac{1}{m}}(t))\\
&\geqslant\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t)h^{\frac{1}{m}}(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))+(1-\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t))h^{\frac{1}{m}}(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t)) && \text{(由(3))}\\
&\geqslant h^{\frac{1}{m}}(\overline{\boldsymbol{F}}(t)) && \text{(由(4))}
\end{aligned}$$

然而，$h(\overline{\boldsymbol{F}}(\frac{t}{m}))=e^{-\lambda\cdot\frac{t}{m}}=(e^{-\lambda t})^{\frac{1}{m}}=h^{\frac{1}{m}}(\overline{\boldsymbol{F}}(t))$

所以，$e^{-\lambda\cdot\frac{t}{m}}=\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t)h^{\frac{1}{m}}(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))+(1-\overline{F}_i^{\frac{1}{m}}(t))h^{\frac{1}{m}}(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))$

由上式及引理 2(ii)，并注意 i 的取法可知，或 $h(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))=h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))$，或 $h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))=0$. 令

$$\gamma=\inf\{t:h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))=0\}$$

则要么 $\gamma=0$，要么 $\gamma=\infty$. 否则由 $0<\gamma<\infty$，得

$$e^{-\lambda t}=\begin{cases}h(O_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t))=h(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t)), & 0<t<\gamma\\ \overline{F}_i(t)h(1_i,\overline{\boldsymbol{F}}(t)), & t\geqslant\gamma\end{cases}$$

取自然数 m 及 $t_0>\gamma$ 使 $\frac{t_0}{m}<\gamma$，则

$$e^{-\lambda\cdot\frac{t_0}{m}}=h(1_i,\bar{F}(\frac{t_0}{m}))\geqslant h(1_i,\bar{F}^{\frac{1}{m}}(t_0))$$

$$\geqslant h^{\frac{1}{m}}(1_i,\bar{F}(t_0))\geqslant\bar{F}_i^{\frac{1}{m}}(t_0)h^{\frac{1}{m}}(1_i,\bar{F}(t_0))=e^{-\lambda\cdot\frac{t_0}{m}}$$

从而 $\bar{F}_i(t_0)=1$，与 i 取法矛盾。

若 $\gamma=0$，则 $e^{-\lambda t}=\bar{F}_i(t)h(1_i,\bar{F}(t))$，$t\geqslant0$. 但对于 s，$t\geqslant0$，由

$$e^{-\lambda(s+t)}=\bar{F}_i(s+t)h(1_i,\bar{F}(s+t)\leqslant\bar{F}_i(s)\bar{F}_i(t)h(1_i,\bar{F}(s)\bar{F}(t))$$

$$\leqslant\bar{F}_i(s)\bar{F}_i(t)h(1_i,\bar{F}(s))h(1_i,\bar{F}(t))=e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda t}$$

得：$\bar{F}_i(s+t)=\bar{F}_i(s)\bar{F}_i(t),s,t\geqslant0.$

所以非退化分布 F_i 必为指数的。设 $\bar{F}_i(t)=e^{-\lambda_i t}$，其中 λ_i 为某正数，于是

$$\bar{F}(t)=e^{-\lambda t}=e^{-\lambda_i t}h(1_i,\bar{F}(t))\tag{5}$$

若 $\gamma=\infty$，则 $h(1_i,\bar{F}(t))=h(O_i,\bar{F}(t))$，从而

$$e^{-\lambda t}=h(1_i,\bar{F}(t))\tag{6}$$

由式(5)(6)知，总有 $h(1_i,\bar{F}(t))$是指数的，而它又是由 $n-1$ 个独立的新比旧好元件组成的单调系统的可靠度函数。因而由归纳法假设得证。

定理 1 表明，由独立的新比旧好元件组成的具有指数寿命的单调系统，无论其结构多么复杂，但实质上等同于一个结构简单的由指数元件组成的串联系统，而这些指数元件就是组成原系统的部分元件。若能用适当的方法选择出这些元件，就可简化原系统。

引理 4 设寿命分布 F 是新比旧好的，则对任意自然数 n 及非负不减函数 g 有

$$\int g(x)dF(x)\leqslant\{\int g^{\frac{1}{n}}(nx)dF(x)\}^n$$

证明 注意到对 $t\geqslant0$ 和特征函数 $\chi_{[t,\infty)}$，由引理 3 得

$$\int\chi_{[t,\infty)}(x)dF(x)\leqslant\{\int\chi^{\frac{1}{n}}_{[t,\infty)}(nx)dF(x)\}^n$$

从而类似于文献[3]引理 2.1 得引理结论。

引理 5 若新比旧好分布 F 既非指数的，又不在零处退化，则必存在自然数 $n>1$ 和 $[0,\infty)$的子区间$[a,b)$，使

$$\bar{F}^{\frac{1}{n}}(t)<\bar{F}\left(\frac{t}{n}\right),t\in[a,b)$$

证明 由条件知，存在 $s_0\geqslant0$，$t_0>0$ 使

$$\bar{F}(s_0+t_0)<\bar{F}(s_0)\bar{F}(t_0)$$

由分布的右连续性知，必存在 $\varepsilon>0$，使得对一切 $s\in[s_0,s_0+\varepsilon),t\in[t_0,t_0+\varepsilon)$有

$$\bar{F}(s+t)<\bar{F}(s)\bar{F}(t)\tag{7}$$

取自然数 m，m' 满足

$$s_0\leqslant\frac{m}{m'}t_0<s_0+\varepsilon$$

则$\left[\frac{s_0}{m},\frac{s_0+\varepsilon}{m}\right)\cap\left[\frac{t_0}{m'},\frac{t_0+\varepsilon}{m'}\right)$为非空左闭右开区间，记之为$[a',b')$，于是

$$[ma',mb')\subset[s_0,s_0+\varepsilon)$$

$$[m'a', m'b') \subset t_0, t_0+\varepsilon)$$

令，$n=m+m'$，则对 $t\in[a',b')$，由(7)式

$$\overline{F}(nt)=\overline{F}(mt+m't)<\overline{F}(mt)\overline{F}(m't)\leqslant\overline{F}^{m}(t)\overline{F}^{m'}(t)=\overline{F}^{n}(t)$$

以 t 代 nt，并令 $a=na'$，$b=nb'$，由上式知

$$\overline{F}^{\frac{1}{n}}(t)<\overline{F}\left(\frac{t}{n}\right), t\in[a,b)$$

定理 2　设 n 个新比旧好元件寿命分布的卷积是指数的，则其中除了一个元件的寿命分布为指数的外，其余元件的寿命分布均在零处退化。

证明　只要考虑 $n=2$ 的情形。设两元件的寿命 X 与 Y 分别服从新比旧好 分布 F 与 G，且 $P(X+Y>t)=e^{-\lambda t}$，$t>0$，λ 为某正数.

由于 $0<e^{-\lambda t}<1$，所以 $0<\overline{F}(t)<1$，对一切 $t>0$ 或 $0<\overline{G}(t)<1$，对一切 $t>0$. 不妨 $0<\overline{G}(t)<1$，$t>0$. 今若 X 既非指数的，又不在零处退化，由引理 5 知，存在自然数 n_0 及 $[0,\infty)$的子区间$[a,b)$使

$$\overline{F}^{\frac{1}{n_0}}(t)<\overline{F}\left(\frac{t}{n_0}\right), t\in[a,b) \tag{8}$$

又易知 G 在$[0,\infty)$的任一子区间上不为常数。因而当 t 充分大时有

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda\frac{t}{n_0}} &= \int_0^\infty \overline{F}\left(\frac{t}{n_0}-x\right)dG(x) \\
&> \int_0^\infty \overline{F}^{\frac{1}{n_0}}(t-n_0x)dG(x) && (\text{由}(8)) \\
&\geqslant \left\{\int_0^\infty \overline{F}(t-x)dG(x)\right\}^{\frac{1}{n_0}} && (\text{引理 }4) \\
&= e^{-\lambda\cdot\frac{t}{n_0}}
\end{aligned}$$

出现矛盾，故 X 或为指数的或在零处退化。若 X 是指数的，则 $0<\overline{F}(t)<1$，$t>0$. 重复上述论证知，Y 或为指数的或在零处退化。但 $0<\overline{G}(t)<1$，$t>0$. 因而 Y 必为指数的，但此与 $X+Y$ 是指数相矛盾，故 X 在零处退化。

2 应用

例 1　由于新比旧好寿命分布类包含平均失效率不减的寿命分布类。所以 Block 和 Sarits 在文献[2]中的主要结果是定理 1 与定理 7 的特款。

例 2　应用定理 1，不难将 Esary 和 Marshall 在文[5]中指出的关于多元指数分布（记为 MVE 分布）的一个特征推广为。

定理 3　若 X_1，X_2，…，X_k 是独立的新比旧好的随机变量，τ_1，τ_2，…，τ_n 是由 k 个元件组成的单调系统的寿命函数，若

$$T_i=\tau_i(X_1,X_2,\cdots,X_k), i=1,2,\cdots,n$$

服从指数分布，则$(T_1,T_2,\cdots,T_n)$服从 MVE 分布。

证明　由假设和定理 1 知，对每个 i，必存在 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k_i}\leqslant k$，使

$$T_i=\min_{1\leqslant j\leqslant k_i} X_{i_j}$$

且诸 X_{i_j}是独立指数的。若某 X_s 在 X_{1_1}，X_{1_2}，…，$X_{1_{k1}}$；X_{2_1}，X_{2_2}，…，$X_{2_{k2}}$；…；X_{n_1}，X_{n_2}，…，$X_{n_{kn}}$中下标的所有不同形式为 i_l，i_h，…，m_r.

将 X_s 的下标改记为 $J=\{i,j,\cdots,m\}$，即记 X_s 为 X_J，令

$$Y_J = \min\{X_J\}$$

并记上述 J 的全体为 $\mathbf{J}$. 则易知

$$T_i = \min\{Y_J; i \in J, J \in \mathbf{J}\}, i = 1,2,\cdots,n$$

且$(T_1,T_2,\cdots,T_n)$服从 MVE 分布。

例 3　由定理 1 或定理 3 及指数最小的多元分布（Multivariate distribution with exponential minimums，见文献[4]）的定义可得：

推论 1　在定理 3 条件下，$(T_1,T_2,\cdots,T_n)$服从指数最小的多元分布。

参 考 文 献

[1] Barlow R E and Prosch F. Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Holt. Rinehart and Winston, New York, 1975

[2] Block H W and Savits T H. System with Exponential Life and IFRA Component Lives. Ann. Statist, 1979, 7(4): 911—916

[3] Block H W and Savits T H. The IERA Closure Problem. Ann. Prob, 1976, 4(6): 1030—1032

[4] Esary J D and Marshall A W. Multivariate Distributions with Exponential Minimums. Ann. Statist, 1974, 2(1): 84—98

[5] Esary J D and Marshall A W. Multivarlate Distributions with IncreasingHazard Rate Average. Ann. Prob, 1979, 7(2): 359—370

Systems with Exponential Life Formed from NBU Components

Qu Tianxing

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

Systems with exponential life formed from independent NBU components are studied. It is shown that (i) for monotonic systems are essencially constituted by a series of exponential components and (ii) for those systems whose lives are the sum of components lives, all but one of the components are degenerate at zero while the remaining one is exponential.

Key words　monotonic system, life distribution, new better than used component, reliability function, exponential life