国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第3期 1991年9月 Vol. 13 No. 3

带模糊约束的非平衡运输问题*

李登峰
（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文首次提出了两类带模糊约束的非平衡运输问题，并建立了相应的数学模型。此外，研究了它们的表上求解法。最后，给出了一个具体实例。

关键词　非平衡运输，模糊约束，隶属函数
分类号　O159

1　问题的提出

在国防后勤保障工作中，常常涉及到军品运输，例如：武器、弹药和军用物资的运输等等。由于军品数目的繁多和数量的庞大，往往仅凭几个决策者的工作经验很难制订出最优运输方案。因此，必须做到决策的科学化和自动化。

运输问题的一般提法是：设有 m 个产地 A_i，其产量是 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$，n 个销地 B_j，其销量是 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，从产地 A_i 到销地 B_j 的单位运价是 C_{ij}，问怎样制定运输方案使总运费最小？虽然此类问题已详细研究过[1-4]，但本文从另一角度进行考察。

首先，考虑产量大于销量（即 $\sum_{i=1}^{m}a_i > \sum_{j=1}^{n}b_j$）的运输问题。虽然可用文献[1]中方法处理，但仔细分析其最优运输方案就可发现，其仅满足两点要求：

1）满足了所有销地 B_j 的需求量 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$；2）总运输费用最小。

而没有考虑到产地的产品运输状况。我们知道对于产地而言，都希望产品积压越少好，因此，要求决策者在制定运输方案时兼顾“产量多时多运输”这一要求。由此，我们提出下列问题。

问题Ⅰ：当产量大于销量时，怎样制定满足下列三个条件的最优运输方案？

(1) 满足所有销地 B_j 的需求量 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$；(2) 产量多的产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$适当多运输；(3) 总运输费用最小。

具体制定运输方案时，条件(2)和(3)的重要性如何，由决策者确定，如果把条件(1)和(3)看得特别重，而可不考虑条件(2)时，问题Ⅰ就是前面所述的不带模糊约束的普通运输问题[1]. 但是，在一般情况下，都必须统筹兼顾这三个条件。

---

* 国家自然科学基金资助项目
** 1989年12月4日收稿

再分析一下销量大于产量的普通非平衡运输问题，类似于前面分析，也可看出其最优运输方案仅满足下列两点要求：

3）运完所有产地 A_i 的产品 $a_i(i=1,2,\cdots m)$；4）总运输费用最小。

同样，对于销地而言，都有“需求多时多供给”的愿望。因此，我们提出问题Ⅱ：

（4）运完所有产地 A_i 的产品 $a_i(i=1,2,\cdots m)$；（5）销量多的销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$适当多供给；（6）总运输费用最小。

类似地，如果仅考虑条件(4)和(5)，则问题Ⅱ就是前面不带模糊约束的普通运输问题[1]。因此，本文同时研究综合考虑条件(4)、(5)和(6)时的问题Ⅱ.

下面，再看一下问题Ⅰ和Ⅱ的条件(2)和(5)。条件(2)和(5)是不明晰的，它们分别包含两层模糊概念，事实上，人们头脑中只有“多”和“适当多”的定性概念。因此，必须模糊量化它们。

2 带模糊约束的非平衡运输问题数学模型

2.1 问题Ⅰ的数学模型Ⅰ

首先，我们仅考虑条件(1)和(3)，则易于写出其数学模型Ⅰ′ 为：

$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

满足条件：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\leqslant a_i,(i=1,2,\cdots,m) & (1)\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=b_j,(j=1,2,\cdots,n); & (2)\\ X_{ij}\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n) & (3)\end{cases}$$

然后，考虑条件(2).

首先，我们建立“产量多”的隶属函数。

记 $A=\{a_i|i=1,2,\cdots,m\}$，$\underset{\sim}{Y}=\{a_i|a_i\text{多},a_i\in A\}$，则把 $\underset{\sim}{Y}$ 看作是 A 上的一个模糊子集。定义隶属度 μ：$\underset{\sim}{Y}\to[0,1]$为：$i=1,2,\cdots,m$.

$$\mu(a_i)=\begin{cases}1-e^{-d(a_i-\bar{a})/\bar{a}}, & a_i>\bar{a}\\ 0, & 0\leqslant a_i\leqslant\bar{a}\end{cases}\tag{4}$$

式中：

$$\bar{a}=\frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_i\Big)\tag{5}$$

$$d=\begin{cases}\log_{10}\sqrt{\frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big]}, & \frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big]>1\\ 0, & \frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big]\leqslant 1\end{cases}\tag{6}$$

易于看出，当 $a_i(i=1,2,\cdots m)$大于1时，$\mu(a_i)$就是“升半 Γ 型分布”[5].

下面我们说明 μ 的合理性。

(1) μ 的定义域是$[0,+\infty)$且值域是单位区域$[0,1]$，这显然与实际情况吻合，又不与隶属函数定义发生矛盾。

(2) μ 是连续增加函数，这与产量 a_i 愈多其相应于“产量多”的隶属度愈大且连续增加这一客观实际吻合。

(3) μ 的导函数

$$\mu'(a_i) = \begin{cases} (d/\bar{a})e^{-d(a_i-\bar{a})/\bar{a}}, & a_i > \bar{a} \\ 0, & 0 \leqslant a_i \leqslant \bar{a} \end{cases}$$

是连续递减的。

(4) μ 中指数的$(a_i-\bar{a})/\bar{a}$ 这一部分的选取，充分考虑到了 $a_i(i=1,2,\cdots m)$比 $\bar{a}$ 多出的余量与 $\bar{a}$ 的比值。

(5) μ 中指数 d 的选取，充分考虑了 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$的方差的数量级时“产量多”隶属函数的影响。

其次，我们量化“适当多运输”这一模糊动作。

考虑到条件(3)，我们作如下处理：对产量 a_i 多的产地 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$，人为地调整 A_i 到每个销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$的运价 C_{ij}形成“虚拟”运价 VC_{ij}，其中 VC_{ij}满足条件：a_i 越多，相应的 VC_{ij}越小用 VC_{ij}代替模型Ⅰ′ 中 C_{ij}后进行规划，可期望其结果满足条件(2)，现在，我们选取 VC_{ij}为

$$VC_{ij} = C_{ij}[(1-\mu^k(a_i)],(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

其中 k 是正参数，它反映了条件(2)和(3)在决策者心目中的地位。决策者越把(2)看得重，则 k 取值越小。当 k 取得足够大时，便可忽略条件(2)，一般情况下，合适的 k 值最好通过使用一定数量的实数数据进行模拟、检验和判断确定。

记 $g(a_i)=1-\mu^k(a_i)$，则 $VC_{ij}=C_{ij}g(a_i)$，对于 $0<k<1$，$k=1$ 和 $k>1$ 的三种情况，函数 $g(a_i)$类似于$[0,1]$上的“降半凹（凸）分布”[5]。

下面说明 VC_{ij}的合理性。

(1) 显然，VC_{ij}满足 $0<VC_{ij}\leq C_{ij}$；

(2) VC_{ij}是连续递减的，即对“产量多”的隶属度越大（即 a_i 越多），则相应的 VC_{ij}越小，并且减小到原来运价 C_{ij}的一定倍数；

(3) 参数的选取可使条件(2)和(3)的“重要程度”这一模糊概念得到量化；

(4) VC_{ij}的选取有利于计算。

在上面的分析中，我们是以 a_i 是否超过平均值 $\bar{a}$ 作为衡量 a_i 多少的标准之一；对于 $a_i<\bar{a}$，一律取 $\mu(a_i)=0$. 事实上，条件(2)蕴含着“产量少适当少运输”之意。因此，为使产量少于平均值的产地得以区别对待，我们也可建立类似的“产量少”的隶属函数，具体如下：

记 $\underset{\sim}{Y}^0=\{a_i|a_i 少,a_i\in A\}$，则可把 $\underset{\sim}{Y}^0$ 看作 A 的一个模糊子集，定义其隶属函数 $\underset{\sim}{\mu}:\underset{\sim}{Y}^0\to[0,1]$为：

$$\mu(a_i) = \begin{cases} 0, & a_i \geqslant \bar{a} \\ 1-e^{d^*(a_i-\bar{a})/\bar{a}}, & a_i < \bar{a} \end{cases} \tag{8}$$

式中，d^* 为正参数，一般可取 $d^*=d$，d 和 $\bar{a}$ 分别在式(6)和(5)中给出。

$\underset{\sim}{\mu}$的合理性说明类似于 μ，从略。

类似地，人为地调整“产量少”的产地 A_i 到销地 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$的运价 C_{ij}，使之成为 V^*C_{ij}，其中 V^*C_{ij}满足条件：产量愈小，则 V^*C_{ij}愈大。用 V^*C_{ij}代替模型Ⅰ′ 中的 C_{ij}后，可期望结果满足“产量少适当少运输”这一要求。我们特别选取：

$$V^*C_{ij} = C_{ij}[1 + h\underset{\sim}{\mu}^{K^*}(a_i)],(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

其中，h，K^*是正参数，K^*的作用类似于 K，一般可取 $K^*=K$，参数 h 反映了决策者对产量少的产地的“保护”愿望的强烈程度。h 越大，则产量少的产地运输出的产品越少。

于是，用式(7)中 VC_{ij}代替模型Ⅰ′ 中目标函数中的 C_{ij}即可建立问题Ⅰ的数学模型。

2.2 问题Ⅱ的数学模型Ⅱ

仅考虑条件(4)和(6)时，易于写出其模型Ⅱ′ 为

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}Y_{ij}$$

满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n}y_{ij} = a_i,(i = 1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ij}b_j,(j = 1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

$$y_{ij} \geqslant 0,(i = 1,2,\cdots,m,j = 1,2,\cdots,n) \tag{12}$$

再考虑条件(5)，类似于问题Ⅰ，可建立“销量多”隶属函数 ψ：$X\to[0,1]$为

$$\psi(b_j) = \begin{cases}1 - e^{-c(b_j-\bar{b})/\bar{b}}, & b_j > \bar{b} \\ 0, & b_j \leqslant \bar{b}\end{cases} \tag{13}$$

式中，$X=\{b_j|b_j 多,b_j\in B\}$是 $B=\{b_j|j=1,2,\cdots,n\}$的一个模糊子集，

$$\bar{b} = \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j\Big) \tag{14}$$

$$c = \begin{cases}\log_{10}\sqrt{\frac{1}{n}\Big[\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - \bar{b})^2\Big]}, & \frac{1}{n}\Big[\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - \bar{b})^2\Big] > 1 \\ 0, & \frac{1}{n}\Big[\sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - \bar{b})^2 \leqslant 1\end{cases} \tag{15}$$

显然，当 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$的方差大于 1 时，φ 的合理性说明类似于 μ.

类似于问题Ⅰ，我们可取 ψC_{ij}为

$$\psi C_{ij} = C_{ij}[1 - \varphi^{\bar{K}}(b_j)],(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n) \tag{16}$$

式中，ψC_{ij}满足条件：b_j 越多，则 ψC_{ij}越小，$\bar{K}$ 是正参数，其作用类似于 K，ψC_{ij}的合理性说明类似于 VC_{ij}，用 ψC_{ij}代替模型Ⅱ′中 C_{ij}，可期望结果满足条件(5).

对条件(5)中隐含“销量少适当少供给”之意，类似于式(8)、(9)进行量化。

同样，用式(16)中 ψC_{ij}代替模型Ⅱ′ 中 C_{ij}即可建立问题Ⅱ的数学模型Ⅱ.

3 带模糊约束的非平衡运输问题的求解

在本节里，我们讨论模型 I 和 II 的解法。首先，讨论模型 I：

$$\min\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} VC_{ij}X_{ij}$$

满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leqslant a_i, (i = 1,2,\cdots,m) \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, (j = 1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

$$X_{ij} \geqslant 0, (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

式中，$VC_{ij}=C_{ij}[1-\mu^K(a_i)],(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ (20)

$$\mu(a_i) = \begin{cases} 1 - e^{-d(a_i-\bar{a})/\bar{a}}, & a_i > \bar{a} \\ 0, & a_i \leqslant a \end{cases} \tag{21}$$

$$\bar{a} = \frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i\Big) \tag{22}$$

$$d = \begin{cases} \log_{10}\sqrt{\frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big]}, & \frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big] > 1 \\ 0, & \frac{1}{m}\Big[\sum_{i=1}^{m}(a_i-\bar{a})^2\Big] \leqslant 1 \end{cases} \tag{23}$$

且 K 是正参数。

利用[1]、[2]中方法得到模型 I 为

$$\min\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} VC_{ij}X_{ij}$$

满足条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} = a_i, (i = 1,2,\cdots,m) & (24) \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, (j = 1,2,\cdots,n+1) & (25) \\ X_{ij} \geqslant 0, (i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n+1) & (26) \end{cases}$$

式中，VC_{ij}如式(23)—(24)给定，此时，可用文献[1-4]方法求解。

由于条件(2)的模糊性，一般只能得到“满意解”，但对于给定的隶属度而言，所得的解仍为最优解，因此，我们不再区分这两个概念。

设已得模型 I 的最优解为$\{X_{ij}^*\}$，则其实际运费为：$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}^*$. 可类似地处理模型 II.

在结束本节之前，给出下面三点附注：

(1) 在求解模型 I 或 II 时，一般应先计算所有 a_i 或 b_j 的方差，若方差小于或等于 1，

则所有“产量多”或“销量多”隶属度为零，从而 $VC_{ij}=C_{ij}$ 或 $\psi C_{ij}=C_{ji}$；否则，先计算 d 或 C，再分别计算每个“产量多”或“销量多”隶属度。

(2) 在军品运输问题中，运输数量往往是非负整数，但是模型 I 和 II 均未作此限制，这也是合理的[2].

(3) 在实际问题中，模型 I 或 II 的运输变量 $\{X_{ij}\}$ 或 $\{y_{ij}\}$ 往往具有容量限制，即存在非负数 $\{l_{ij}\}$ 和 $\{u_{ij}\}$ 满足： $0\leqslant x_{ij}\leqslant l_{ij}$, $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$; $0\leqslant y_{ij}\leqslant u_{ij}$, $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$

此时的模型 I 或 II 可用文献[3]中方法求解。

4 应用实例

假设某军用物资的运输表为表 1 [单位假设为万元（费用）和吨（产量和销量）]，试求其带模糊约束的最优运输方案。

解：显然，$\sum_{i=1}^{3}a_i = 27 > 18 = \sum_{j=1}^{3}b_j$，故而属于问题 I，可用模型 I 求解，由式 (21)—(23)不难算出。

表 1

产地 \ 运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	6	5	4	5
A_2	3	5	4	18
A_3	2	4	3	4
销量	4	4	10	

下列数据：

$\bar{a}=9$，$d=0.8046$，$\mu(a_2)=0.5527$，$\mu(a_3)=0$.

取 $K=1$（此时，决策者把条件（2）看得很重）。于是，可算出 VC_{ij} 如表 2，其中 VC_{ij} 已作四舍五入取整（仅为计算方便），并虚设了“销地” B_4，其销量为 9，如表 2 所示。

表 2

产地 \ 运价 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产 量
A_1	6	5	4	0	5
A_2	1	3	2	0	18
A_3	2	4	3	0	4
销量	4	4	10	9	总量 27

对表 2 求解[1-4]，得其最优运输方案如表 3.

且 minZ=72（万元），其中表 3 格子中表圈数字表示运输量，不带数字表示检验数。

对此问题，若不考虑条件(2)，则其最优方案如表 4，最小运费为 68（万元）.

结果分析：由表 3 看出，“产量多”的产地 A_2 确实运输多些（事实上，全部运完），而“产量少”的产地 A_1 和 A_3 运输少些（事实上，没有运输）。但是，从表 4 则看出相反的情况，即“产量少”的 A_1 和 A_3 全部运完，而“产量多”的 A_2 只运输了一半，之所以有这样的差别，其本质原因在于是否考虑条件(2).

表 3

u_i \ c_{ij} \ v_j	1 B_1	3 B_2	2 B_3	0 B_4	产 量
0 A_1	6^{5}	5^{2}	4^{2}	0^{5}	5
0 A_2	1^{4}	3^{4}	2^{10}	2^{0}	18
0 A_3	2^{1}	4^{1}	3^{1}	0^{4}	4
销量	4	4	10	9	27

表 4

u_i \ c_{ij} \ v_j		3 B_1	5 B_2	4 B_3	0 B_4	产量
0	A_1	6^{3}	5^{4}	4^{1}	0^{0}	5
0	A_2	3^{0}	5^{0}	4^{9}	0^{9}	18
−1	A_3	2^{4}	4^{0}	3^{0}	0	4
销量		4	4	10	9	

参 考 文 献

[1] 李德，钱颂迪主编．运筹学．清华大学出版社，1985：96～100

[2] 俞玉森主编．数学规划的原理和方法．华中工学院出版社，1985：78～88

[3] 李登峰．变量带上界的运输问题的一种新的对偶算法．系统工程，1980：54～58

[4] 李登峰．运输问题的一种新的对偶算法．国防科技大学学报，1990：12(3)

[5] 贺仲雄．模糊数学及其应用．天津科学技术出版社，1985：68～70

Problems of Unbalanced Transportation with Fuzzy Constraints

Li Dengfeng

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

The Unbalanced Transportation Problems I and II with Fuzzy Constraint are proposed for the first time in the paper, and the corresponding mathematical models I and II are constructed. Furthermore, their solving methods in a tableau are studied. Finally, one specific example is presented.

Key words unbalanced transportation Fuzzy constraint, membership function