国防科技大学学报

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY

第13卷第3期、 1991年9月 Vol. 13 No. 3

图的色数与亏格的相对独立性

董晓光

（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文先证明如下定理："对于每一个非负整数 p，亏格为 p 的图的色数可以是任意整数 m，$2\leqslant m\leqslant\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]$."然后，据此定理得结论：当 $m\geqslant 3$，要找到 m—色图的充分必要条件基本上是不可能的，即使不说根本不可能。

关键词 图，色数，亏格，唯一可着色图，临界图

分类号 O157.9

关于2—色图判定的充要条件早在50多年前即已找到，但当 $m\geqslant 3$ 时，相应的充要条件却直至今日也无法找到。这究竟是暂时的，偶然的，还是永久的，必然的呢？

鉴于"图的亏格"其实也就是关于图的复杂程度的一种本质上的（非外形上的）量度，因此，只要证明了图的色数与它的亏格之间的相对独立性，也就是证明了图的色数关于图的复杂程度的独立性。再注意到：当 $m\geqslant 3$ 时的 m 色图不再具有双色图"均唯一可着色图"这类特殊共性，综之，即得结论：找不到一个纯结构上的、关于 $m(m\geqslant 3)$ 色图的充要条件，这是必然的。

为叙述方便，本文证明仅以同胚于完全图 Kn 的图为例给出。但是很显然，所用构造方法对于任意图都同样适用。

本文只讨论图的顶点着色。文中除特别声明处外，所有术语及有关记号均按文献[1]中的定义。

定理 对于任意的非负整数 p，记 $N=\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]$，对于每一个正整数 m，$2\leqslant m\leqslant N$，总存在图 G，它的亏格 $\nu(G)=P$，色数 $\chi(G)=m$.

证明 当 $p=0$，此即 G 为可平面图情况，$N=4$，命题显然成立。

当 $p>0$，设完全图 K_n 的亏格为 p，则由完全图亏格公式([1],定理11.18)：

$$p=\gamma(k_n)=\left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\} \tag{1}$$

因 n 为正整数，由(1)解出 n 即得：

$$n_{\max}=\left\{\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right\}=N$$

* 1988年12月29日收稿

事实上，由希伍德地图着色定理([1],定理 12.15)，任何亏格为 $p(p>0)$的图 G 色数 $\chi(G)\leqslant N$.

注意到：图 G 的亏格，也就是 G 可以嵌入的所有曲面的亏格的最小值，故同胚图的亏格都相同。因此，下面只需证明：对于每一个正整数 m，$2\leqslant m\leqslant N$，总存在与完全图 K_N 同胚的图 G，色数 $\chi(G)=m$.

为此，在 K_N 的基础上，按下列步骤增加一些新点即可（完全图 K_N 中着第 i 色的顶点记作 A_i，$i=1$，$2\cdots$，N）：

步骤 1：令 $t=N$.

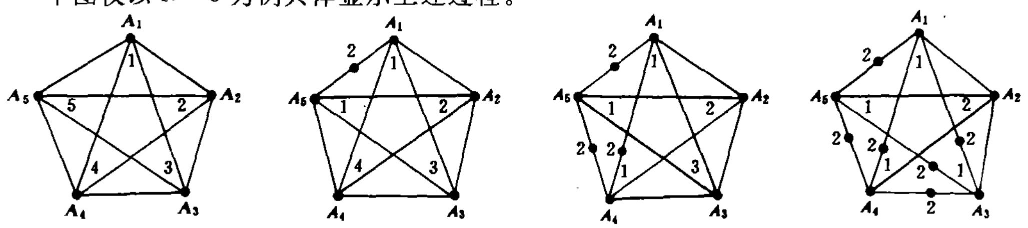
步骤 2：将邻接 A_t 与着色 1 的顶点的每条边上增加一个新顶点，所有新顶点均着用第 2 色，此时 A_t 不再与着第 1 色之顶点相邻，则将 A_t 改着第 1 色。

步骤 3：令 $t-1$ 之值作为新的 t 值。

步骤 4：重复步骤 2 和步骤 3，直到新的 t 值为 2 时结束。

显然，在上述步骤中得到的图总是与 K_N 同胚的，同亏格的，且每经过一次步骤 2，图着色所需的颜色种数就递减 1，即图的色数递减 1，直至得到一个双色图为止。　证毕

下图仅以 $N=5$ 为例具体显示上述过程。



图中，纯数字指示该点所用色序号。

还必须强调指出：对任意 m，$2\leqslant m<N$，获取与 K_N 同胚而色数为 m 的图的方法绝不是唯一的。以上证明所用方法不过是其中之一。

例如，将上述的步骤 2 改为："将邻接 A_t 与着第 i 色$(i\neq 1)$顶点的各条边上增加一个新顶点，所有新顶点均着第 1 色，此后因 A_t 只与着第 1 色的点相邻，可改着第 2 色"。显然其效果完全相同——每经过一次步骤 2，图的色数即由 t 减为 $t-1$.

然而，当得到色数为 $m(3\leqslant m<N)$的图时，所需增加的点的总数 Δ 却大不相同：按证明中所用方法，$\Delta_1=\sum_{i=1}^{N-m} i$；但按后面这种构造方法，$\Delta_2=\sum_{i=1}^{N-m}(N-i-1)$. 显然：$\Delta_2>\Delta_1$. 至于点的分布规律，当然亦不可能一致了。

综合以上所述，可得如下结论：

(1) 图的色数 m 与图的亏格 p，二者事实上是互相独立的。即具有同一 m 值的图，可以有任意的 p 值，只要 $p\geqslant\left\{\frac{(m-3)(m-4)}{12}\right\}$,$(m\geqslant 2)$；倒过来，具有同一亏格 p 的图，色数 m 可以任意，只要：$2\leqslant m\leqslant\left[\frac{7+\sqrt{1+48P}}{2}\right]$.

(2) 对于任意的 $m(m\geqslant 3)$，m—色图不可能存在统一的构造规律性。这是因为：即使限制在"具有同一亏格 p 且与 $K_N(N\geqslant 4)$同胚"这样苛刻的条件下，图中点的数目、分布及构造仍无一定规则。

事实上，因为 m—色图必含有一个 m—临界导出子图，由此可知：m—色图的存在特征完全是由 m—临界图所决定。在色数 m 与亏格 p 互相独立的关系下，之所以还能存在判定 2—色图的充要定理，根源全在于 2—临界图独一无二的特殊性——它是唯一的，也正因此才决定了一切 2—色图均是唯一可着色图。

当 $m\geqslant3$，m—临界图不再唯一。特别是当 $m\geqslant4$，甚至连 m—临界图也根本不可能存在任何统一的构造规律性了。这是因为已有定理：对于所有的 m 和 $n(m\geqslant3)$，存在 m—临界图，它的围长超过 n. 此外，J. Mycielski 的构造法则具体给出怎样由一个任意的 m—临界图$(m\geqslant3)$获得相应的$(m+1)$—临界图的方法，显然这种方法不是唯一的。当 $m\geqslant4$，同为 m—临界图，已可有不同的亏格。

在此基础上，若再注意到：本文中的完全图 k_N，实质仅仅是作为亏格为 p 的 N—临界图的一个代表而已，以求叙述方便。换言之，将本文中的"K_N"换为"亏格为 P 的 N—临界图"后，一切叙述均可照旧不变，唯一差别仅在于任意 N—临界图中着同一色 i 的点 A_i 可能不唯一。

总而言之，当 $m\geqslant3$ 时，找不到判定 m—色图的充分必要条件，这是必然的。

参　考　文　献

[1] F. 哈拉里著；李慰萱译. 图论. 上海科学技术出版社，1980

[2] M. 卡波边柯，J. 莫鲁卓著；聂祖安译. 图论的例和反例. 湖南科学技术出版社，1988

[3] 李慰萱著. 图论. 湖南科学技术出版社，1980

Relative Independence of Chromatic Number and Genus of Graph

Dong Xiaoguang

(Department of Applied Mathematics and System Engineering)

Abstract

The following theorem has been proved in this paper: "For each non—negative integer p, the chromatic number of the graph of genus p can be any integer m, $2\leqslant m\leqslant\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]$

It then leads to the conclusion that it is impossible to find out the sufficient and necessary condition for m—chromation graph if m$\geqslant$3 .

Key words graph, chromatic number, genus, uniquely colorable graph, critical graph