国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第13卷第3期 1991年9月 Vol. 13 No. 3

未知最优值线性规划的修正 Karmarkar 算法

张卫民 汪裕武
(计算机系)

摘 要 本文对未知最优值的 Karmarkar 型线性规划，得到了一种复杂性为 $O(n^{3.5}L)$ 的修正 Karmarkar 算法；通过讨论加边矩阵和秩1修正矩阵的 LDL^T 分解，得到了一种计算 Q—斜投影的有效方法。最后，从理论上分析了算法的收敛性和复杂性。

关键词 线性规划，修正 Karmarkar 算法，LDL^T 分解

分类号 O221.1

对于线性规划

$$(P)\quad \begin{aligned} &\min C^T x \\ &\text{s.t. } Ax=0 \\ &\qquad e^T x=1;\ x\geqslant 0 \end{aligned}$$

在其最优值为0，e 为可行内点的条件下，Karmarkar 于1984年给出了一种基于投影变换的多项式算法，其复杂性为 $O(n^4L)$（L 为问题的输入规模），同时，Karmarkar 还给出了另一种复杂性为 $O(n^{3.5}L)$的修正算法。之后，Tadd[2]、Gay[3]和 Ye[4]将 Karmarkar 算法直接应用到未知最优值的 Karmarkar 型线性规划（P）中，给出了复杂性为 $O(n^4L)$的算法，他们的方法优于 Karmarkar 的原始—对偶法和滑动目标函数法。本文将 Karmarkar[1]中引入的修正算法思想应用到未知最优值的 Karmarkar 型线性规划中，得到了复杂性同样为 $O(n^{3.5}L)$的修正算法。

1 修正 Karmarkar 算法

考虑线性规划

$$(LP)\quad \begin{aligned} &\min z(x)=C^T x \\ &\text{s.t. } Ax=0 \\ &\qquad e^T x=n;\ x\geqslant 0 \end{aligned}$$

式中，A 为秩 m 的 $m\times n$ 阵，$n=O(\mathrm{m})$，即 n，m 为同阶，e 为分量全为1组成的 n 维向量，且 $Ae=0$，Z^0 为(LP)最优值 Z^* 的下界。

在 $k+1$ 步迭代开始时，假设已有可行解 $x^k>0$，且 $x^k=(x_1^k,\cdots,x_n^k)^T$，又 z^k 为 z^* 的下界。

---

* 1990年4月10日收稿

令：$d=x^k$，$D=\mathrm{diag}(x_1^k,\cdots,x_n^k)$；做投影变换：$y=T(x,d)=\dfrac{nD^{-1}x}{e^TD^{-1}x}$；

其逆变换：$x=T^{-1}(y,d)=\dfrac{nDy}{d^Ty}$.

变换 $T(x,d)$ 将单纯形 $s=\{x\in R^n\,|\,e^Tx=n,x\geqslant 0\}$ 一一对应到自身，且 $T(d,d)=e$.

通过试用变换 $T(x,d)$，线性规划 (LP) 等价于分式线性规划

$$(FLP)\quad \begin{aligned}&\min \frac{nc^TDy}{d^Ty}\\ &\text{s.t. } ADy=0,\ y\in s\end{aligned}$$

由于 $ADe=Ax^k=0$，因此单纯形 s 的中心 e 为 (FLP) 的可行点。

引入参数线性规划

$$LP\ (z)\quad \begin{aligned}&\min v(z)=\hat{c}(z)^Ty\\ &\text{s.t. } \overline{A}y=0,\ y\in s\end{aligned}$$

式中，$\hat{c}(z)^T=n\bar{c}^T-zd^T$，$\bar{c}=DC$，$\overline{A}=AD$，$z$ 为 z^* 的下界。

$LP(z)$ 与 FLP 有如下关系：

定理 1 y^* 是 $LP(z^*)$ 最优解的充要条件是 y^* 为 FLP 的最优解。

定理 2 $V^*(z)>V^*(\bar{z})$ 的充要条件是 $z<\bar{z}$，其中 $V^*(z)$，$V^*(\bar{z})$ 分别是 $LP(z)$ 和 $LP(\bar{z})$ 的最优值。

定理 1，2 首先由 D. Goldfarb[5] 引入，其证明可见文献［6］.

设 Q 为对角矩阵，$Q=\mathrm{diag}(Q_{11},\cdots,Q_{nn})$，$\dfrac{1}{2}\leqslant Q_{ii}\leqslant 2$.

考虑以 s 的中心 $a=e$ 为心的椭球

$L(a,Q)=\left\{x\in R^n\,|\,(x-a)^TQ(x-a)\leqslant\dfrac{1}{2}(\alpha r)^2\right\}$，$r=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ 为 s 内切球半径，$0<\alpha<1$.

若将以 a 为心、f 为半径的球表示为 $B(a,f)$，则有如下包含关系

$$B\left(a,\frac{\alpha r}{2}\right)\subseteq L(a,Q)\subseteq B(a,\alpha r)$$

代替 $LP(z)$，我们考虑规划

$$QLP(z)\quad \begin{aligned}&\min \hat{c}(z)^Ty\\ &\text{s.t. } \overline{A}y=0\\ &\qquad e^Ty=n,\ y\in L(a,Q)\end{aligned}$$

$QLP(z)$ 是 $LP(z)$ 的近似形式，其最优解很容易求出。

下面我们讨论 $QLP(z)$ 的求解。

令 $y'=y-a$，则 $QLP(z)$ 等价于规划

$$\overline{QLP}(z)\quad \begin{aligned}&\min \hat{c}(z)^Ty'\\ &\text{s.t. } By'=0\\ &\qquad y'^TQy'\leqslant\frac{1}{2}(\alpha r)^2\end{aligned}$$

式中，$B=\begin{bmatrix}\overline{A}\\ e^T\end{bmatrix}$，可知秩 $B=m+1$.

规划 $\overline{QLP}(z)$ 的最优值必定在边界上达到，因此 $\overline{QLP}(z)$ 等价于规划

$$QLP'(z)\quad \begin{aligned} &\min \hat{c}(z)^T y' \\ &\text{s. t. } By' = 0 \\ &\qquad y'^T Q y' = \frac{1}{2}(\alpha r)^2 \end{aligned}$$

利用 Lagrange 乘数法解 $QLP'(z)$，得到最优解

$$y'^* = -\frac{1}{2\mu}[I - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}B]Q^{-1}\hat{c}(z) \tag{1}$$

式中，μ 使 $y'^{*T}Qy'^* = \frac{1}{2}(\alpha r)^2$

令 $P_B^Q = [I - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}B]Q^{-1}$ (2)

定义 称 $C_B^Q = P_B^Q C$ 是 C 到 B 的零空间 $N(B)$ 的 Q—斜投影。

记 $\hat{C}_B^Q(z) = P_B^Q \hat{C}(z)$，定义范数 $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$，则

$$y'^* = -\frac{\alpha r}{\sqrt{2}\,\|\hat{C}_B^Q(z)\|_Q}\hat{C}_B^Q(z) \tag{3}$$

因此 $QLP(z)$的最优解

$$y^* = a - \frac{\alpha r}{\sqrt{2}\,\|\hat{C}_B^Q(z)\|_Q}\hat{C}_B^Q(z) \tag{4}$$

为了得到 z^* 的新下界 z^{k+1}，再引入规划

$$LP_R^Q(z):\quad \begin{aligned} &\min \hat{c}(z)^T y \\ &\text{s. t. } \bar{A}y = 0 \\ &\qquad e^T y = n \\ &\qquad (y-a)^T Q (y-a) \leqslant 2R^2, R = \sqrt{n(n-1)} \end{aligned}$$ 为 s 的外接球半径。

同求 $QLP(z)$的最优解一样，我们可以得到 $LP_R^Q(z)$的最优解

$$y_R = a - \frac{\sqrt{2}R}{\|\hat{C}_B^Q(z)\|_Q}\hat{C}_B^Q(z) \tag{5}$$

由于

$$\begin{aligned} \|\hat{C}_B^Q(z)\|_Q^2 &= \hat{C}_B^Q(z)^T Q \hat{C}_B^Q(z) \\ &= \{[I - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}B]Q^{-1}\hat{C}(z)\}^T Q [I - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}B]Q^{-1}\hat{C}(z) \\ &= [\hat{C}(z)^T - \hat{C}(z)^T Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}B] \cdot [Q^{-1} - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}BQ^{-1}]\hat{C}(z) \\ &= \hat{C}(z)^T(Q^{-1} - Q^{-1}B^T(BQ^{-1}B^T)^{-1}BQ^{-1})\hat{C}(z) \\ &= \hat{C}(z)^T \hat{C}_B^Q(z) \end{aligned}$$

因此，$LP_R^Q(z)$的最优值

$$V_R(z) = \hat{C}(z)^T a - \sqrt{2}R\,\|\hat{C}_B^Q(z)\|_Q \tag{6}$$

根据定理 2 和(6)式，建立求 z^* 新下界 $z^{K+1} \geqslant z^k$ 的方法，令 $z = z^k$.

i) 当 $V_R(z) \leqslant 0$ 时，则令 $\bar{z} = z$.

ii) 当 $V_R(z) > 0$ 时，由于$(y-a)^T Q (y-a) \leqslant 2R^2$ 包含 s，因此，$LP_R^Q(z)$是 $LP(z)$的松驰问题，有 $V_R(z) \leqslant V(z)$. 由对 $LP(z)$的定义知，$V(z^*) = 0$，从而有 $V_R(z^*) \leqslant 0$；再根据定理 2 和 $V(z)$对 z 的连续性知，必存在 $\bar{z}$，满足

$$z < \bar{z} \leqslant z^*, \quad V_R(\bar{z}) = 0$$

实际上，上面的 $\bar{z}$ 可通过解一个二次方程求得。由 $V_R(\bar{z})=0$，得

$$[\hat{C}(\bar{z})^T e]^2 = 2R^2 \| \hat{C}_P^Q(\bar{z}) \|_Q^2$$

即
$$[(n\bar{c} - \bar{z}d)^T e]^2 = 2R^2 \| n\bar{C}_P^Q - \bar{z}d_P^Q \|_Q^2 \tag{7}$$

式中的 $\bar{C}_P^Q$，d_P^Q 分别为

$$\bar{C}_P^Q = P_B^Q \bar{C}, d_P^Q = P_B^Q d$$

式(7)是关于 $\bar{z}$ 的二次方程，求出其大根，即是 z^* 的新下界 z^{k+1}.

由上面的讨论，新下界 z^{k+1}满足

$$z^k \leqslant z^{k+1} \leqslant z^*, \quad V_R(z^{k+1}) \leqslant 0 \tag{8}$$

再求 $QLP(z^{k+1})$的最优解 $\bar{y}^*$，令 $x^{k+1}=\dfrac{D\bar{y}^*}{d^T\bar{y}^*}$.

在第四节中，我们将证明 x^{k+1}收敛于(LP)的最优解。z^{k+1}收敛于最优值 z^*.

现在，我们可以给出修正 Karmarkar 算法：

此算法产生四个序列$\{x^k\}$，$\{\bar{x}^k\}$，$\{z^k\}$和$\{Q^k\}$,其中$\{\bar{x}^k\}$是用来计算$\{Q^k\}$.

已知初值有：可行内点 $x^{(0)}>0$，z^*的下界 $z^{(0)}$，$Q^{(0)}=I$，I 为单位矩阵，终止参数 q.

令 $k=0$，1，2，…做下面步骤，直到$\{x^k, z^k\}$满足终止判断条件

$$C^T x^k - z^k \leqslant e^{-q}(c^T x^{(0)} - z^{(0)})$$

1）形成 $D^k=\text{diag}(x_1^k,\cdots,x_n^k)$，$B^k=\begin{bmatrix} AD^k \\ e^T \end{bmatrix}$，　$\bar{C}=D^kC$，$Q_{ii}^k=\left(\dfrac{x_i^k}{\bar{x}_i^k}\right)^2$

2）计算 $\bar{C}_P^{Q^k}=P_{B^k}^{Q^k}\bar{C}$，$d_P^{Q^k}=P_{B^k}^{Q^k}d$，$\hat{C}_P^{Q^k}(z^k)=n\bar{C}_P^{Q^k}-z^k d_P^{Q^k}$

3）计算 $V_R(z^k)=\hat{C}_P^{Q^k}(z^k)^T e-\sqrt{2}R\|\hat{C}_P^{Q^k}\|Q^k$

4）若 $V_R(z^k)\leqslant 0$，令 $z^{k+1}=z^k$

若 V_R (z^k) >0，解二次方程

$[(n\bar{c}-zd)^T e]^2=2R^2\|n\bar{C}_P^{Q^k}-zd_P^{Q^k}\|_{Q^k}^2$的大根 $\bar{z}$,令 $z^{k+1}=\bar{z}$.

5）计算 $\bar{y}^*=e-\dfrac{\alpha r}{\sqrt{2}\|C_P^{Q^k}(z^k)\|_{Q^k}}C_P^{Q^k}(z^{k+1})$

6）做逆变换 $x^{k+1}=\dfrac{nD^k\bar{y}^*}{e^TD^k\bar{y}^*}$

7）根据 x^k，$\bar{x}^k$ 和 x^{k+1}构造 $\bar{x}^{k+1}$

$$\sigma^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j^{k+1}}{x_j^k}, \qquad \bar{x}_i^{k+1}=\begin{cases}\sigma^k\bar{x}_i^k & \text{当}\dfrac{\sigma^k\bar{x}_i^k}{x_i^{k+1}}\in\left[\dfrac{1}{2},\ 2\right] \\ x_i^{k+1} & \text{否则}\end{cases}$$

由 1)、7) 构造$\{Q^{k+1}\}$的理论根据将在下面二节中给出。

2　Q—斜投影的计算

本节中，有时将上角标也写成下角标形式。

上节修正 Karmarkar 算法的主要计算量是求 Q—斜投影 $\bar{C}_P^{Q^k}$ 和 $d_P^{Q^k}$. 由于 $P_B^{Q^k}=[I-Q_k^{-1}B_k^T(B_kQ_k^{-1}B_k^T)^{-1}B_k]Q_k^{-1}$,因此,若直接计算需要求 $B_kQ_k^{-1}B_k^T$ 的逆,或解系数矩阵为 $B_kQ_k^{-1}B_k^T$ 的一个线性方程组，若用 Gauss 消去法，其运算量为 $O(n^3)$. 但如果对 Q_k 做适当的选择，利用特殊的技巧，可以减少计算量级。由于

$$B_kQ_k^{-1}B_k^T = \begin{bmatrix} AD_kQ_k^{-1}D_kA^T & AD_kQ_k^{-1}e \\ (AD_kQ_k^{-1}e)^T & e^TQ_{k+1}^{-1}e \end{bmatrix} \tag{9}$$

若知道 $AD_kQ_k^{-1}D_kA^T$ 的 LDL^T 分解，则 $B_kQ_k^{-1}B_k^T$ 的 LDL^T 分解很容易从(9)式中求出，而 $AD_kQ_k^{-1}D_kA^T$ 的 LDL^T 分解可以从前一步的分解中得到，本节将以 LDL^T 分解为基础，通过解线性方程组来计算 Q—斜投影。

令：$\overline{D}_k^2=D_kQ_k^{-1}D_k=D_k^2+T$，其中 T 为对角阵，其对角线上的元素 $t_i=(\overline{D}_{ii}^k)^2-(D_{ii}^k)^2$. 从而

$$A\overline{D}_k^2A^T = AD_k^2A^T + ATA^T = AD_k^2A^T + \sum_{j=1}^{m} t_ja_ja_j^T \tag{10}$$

因此，$A\overline{D}_k^2A^T$ 可看成是 $AD_k^2A^T$ 经 m 个秩 1 修正而得到。当对 Q 做适当选择时，大量的 t_j 为 0，这样，做秩 1 修正的次数可以减少。

令
$$\sigma^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{x_j^{k-1}} \tag{11}$$

定义
$$\bar{x}_i^k = \begin{cases} \sigma^{k-1}\bar{x}_i^{k-1} & 当\left(\dfrac{\sigma^{k-1}\bar{x}_i^{k-1}}{x_i^k}\right) \in \left[\dfrac{1}{2},2\right] \\ x_i^k & 否则 \end{cases} \tag{12}$$

则
$$\overline{D}_k^2 = \sigma_{k-1}^2\overline{D}_k^2 + \hat{T} \tag{13}$$

式中，$\hat{T}$ 为对角阵，对角线上的元素

$$\hat{t}_j = \begin{cases} 0 & 当\left(\dfrac{\sigma^{k-1}\bar{x}^{k-1}}{x_i^k}\right)^2 \in \left[\dfrac{1}{2},2\right] \\ (x_j^k)^2 - \sigma_{k-1}^2(\bar{x}_j^k)^2 & 否则 \end{cases}$$

从而
$$A\overline{D}_k^2A^T = \sigma_{k-1}^2A\overline{D}_{k-1}^2A^T + \sum_{\hat{t}_j\neq 0}\hat{t}_ja_ja_j^T \tag{14}$$

式中，a_j 是 A 的第 j 列

再定义
$$Q_{ii}^k = \left(\frac{\bar{x}_i^k}{\bar{x}_i^{k-1}}\right)^{-2} \tag{15}$$

由(12)式知，$\frac{1}{2}\leqslant Q_{ii}^k\leqslant 2$.

根据(14)式，当 $\hat{t}_j\neq 0$ 时，就需要做一次修正。可以从理论上证明，修正 Karmarkar 算法迭代 d 步，需要做的秩 1 修正总次数不超过 $O(\sqrt{n}\,d)$，见[6].

假设 $A\overline{D}_k^2A^T$ 与 $A\overline{D}_{k-1}^2A^T$ 分别有分解式 $\hat{L}\hat{D}\hat{L}^T$ 和 LDL^T，式中的 L，$\hat{L}$ 都是单位下三角阵，D，$\hat{D}$ 为对角阵。由(14)式，有

$$\hat{L}\hat{D}\hat{L}^T = \sigma_{k-1}^2LDL^T + \sum_{\hat{t}\neq 0}\hat{t}_{a_j}a_j^T \tag{16}$$

由(9)和(16)式知，在已知 $A_{k-1}\overline{D}_{k-1}^2A_{k-1}^T$ 的 LDL^T 分解之下，求 $B_kQ_k^{-1}B_k^T$ 的 LDL^T 分解可以归结为问题：已知正定矩阵 M 的 LDL^T 分解，求正定矩阵 $M+\sigma\mu\mu^T$ 和正定矩阵 $\begin{bmatrix} M & a \\ a^T & c\end{bmatrix}$ 的 LDL^T 分解。

加边矩阵 $\begin{bmatrix} M & a \\ a^T & c\end{bmatrix}$ 的 LDL^T 分解容易解决。

实际上
$$\begin{bmatrix} M & a \\ a^T & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LDL^T & a \\ a^T & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ (L^{-1}a)^T & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & \\ & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L^T & L^{-1}a \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

式中，α 为 $\sqrt{c-(L^{-1}a)^T L^{-1}a}$，运算量为 $o(n^2)$.

下面仅讨论修正矩阵 $M+\sigma uu^T$ 的分解。

设 $M+\sigma uu^T$ 的分解为 $\hat{L}\hat{D}\hat{L}^T$，则

$$\hat{L}\hat{D}\hat{L}^T = LDL^T + \sigma uu^T = (Lu)\begin{bmatrix} D & \\ & \sigma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} L^T \\ u^T \end{pmatrix} \tag{17}$$

可以用一系列快速 Givens 变换，将 $B^T=\begin{bmatrix} D^{\frac{1}{2}} & \\ & \sigma^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} L^T \\ u^T \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix} \overline{D}^{\frac{1}{2}} & \\ & \overline{\sigma}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overline{L}^T \\ 0 \end{pmatrix}$. 见（[6].）

其中 $\overline{L}$ 为单位下三角阵。

由(17)式，有

$$\hat{L}\hat{D}\hat{L}^T = BB^T = (\overline{L},0)\begin{bmatrix} \overline{D} & \\ & \overline{\sigma} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overline{L}^T \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{L}\,\overline{D}\,\overline{L}^T$$

因此 $\hat{L}=\overline{L}$，$\hat{D}=\overline{D}$，从而求得修正矩阵的 LDL^T 分解，其运算量为 $O(n^2)$.

3 算法的收敛性和复杂性

本节讨论修正 Karmarkar 算法的收敛性和时间复杂性。我们首先引入位势函数

$$f(x,z) = n\mathrm{Ln}(c^T x - z) - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ln}x_i \tag{18}$$

则有

定理 3 设(x^{k+1},z^{k+1})是由(x^k,z^k)经一步修正 Karmarkar 迭代得到，则

$$f(x^{k+1},z^{k+1}) \leqslant f(x^k,z^k) - \delta$$

式中

$$\delta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\alpha + \ln(1-\alpha) > 0$$

证明

$$\begin{aligned} f(x^{k+1},z^{k+1}) &= n\ln\left(\frac{n\bar{c}^T\bar{y}^*}{d^T\bar{y}^*} - z^{k+1}\right) - \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{(nD\bar{y}^*)_i}{d^T\bar{y}^*} \\ &= n\ln\hat{c}(z^{k+1})^T\bar{y}^* - \sum_{i=1}^{n}\ln\bar{y}_i^* - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i^k - n\ln n \end{aligned}$$

而

$$f(x^k,z^{k+1}) = n\ln\hat{c}(z^{k+1})^T e - \sum_{i=1}^{n}\ln x_i^k - n\ln n$$

两式相减，得到

$$f(x^{k+1},z^{k+1}) - f(x^k,z^{k+1}) = n\ln\frac{\hat{c}(z^{k+1})^T\bar{y}^*}{\hat{c}(z^{k+1})^T e} - \sum_{i=1}^{n}\ln\bar{y}_i^* \tag{19}$$

由 z^{k+1}的计算过程知，$\hat{c}(z^{k+1})^T y_R \leqslant 0$

式中，$$y_R = e - \frac{\sqrt{2}R}{\|\hat{C}\mathfrak{g}(z^{k+1})\|_Q}\hat{C}\mathfrak{g}(z^{k+1})$$

因此 $$\frac{\hat{C}(z^{k+1})^T e - \hat{C}(z^{k+1})^T\bar{y}^*}{\hat{C}(z^{k+1})^T e} \geqslant \frac{\hat{C}(z^{k+1})^T e - \hat{C}(z^{k+1})^T\bar{y}^*}{\hat{C}(z^{k+1})^T e - \hat{C}(z^{k+1})^T y_R} = \frac{\alpha r}{\sqrt{2}R}$$

或 $$\frac{\hat{C}(z^{k+1})^T\bar{y}^*}{\hat{C}(z^{k+1})^Te} \leqslant 1 - \frac{\alpha r}{\sqrt{2}R} \tag{20}$$

因 $\bar{y}_i^* \in S \cap B(a, \alpha r)$，下面不等式成立

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \bar{y}_i^* \geqslant \ln(1-\alpha) + (n-1)\ln\left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) \quad (\text{证明见文 } 10) \tag{21}$$

将(21)，(20)式代入(19)式得

$$f(x^{k+1}, z^{k+1}) - f(x^k, z^{k+1}) \leqslant n\ln\left(1 - \frac{\alpha r}{\sqrt{2}R}\right) - \ln(1-\alpha)$$

$$- (n-1)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right) = \delta(n)$$

$\delta(n)$是 n 的递增函数，且

$$\lim_{n\to\infty}\delta(n) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\alpha - \ln(1-\alpha) = -\delta$$

故有 $$f(x^{k+1}, z^{k+1}) - f(x^k, z^{k+1}) \leqslant -\delta$$

由 $z^k \leqslant z^{k+1} \leqslant z^*$，得

$$f(x^k, z^{k+1}) \leqslant f(x^k, z^k)$$

从而得到

$$f(x^{k+1}, z^{k+1}) - f(x^k, z^k) \leqslant -\delta$$ （证毕）

定理 4 设$\{(x^k, z^k)\}$是由修正 Karmarkar 算法得到的序列，则有

$$\frac{cx^k - z^k}{cx^0 - z^0} \leqslant e^{-\frac{k}{n}\delta}, \qquad \delta \text{ 见定理 3 中定义}$$

证明 由定理 3

$$f(x^k, z^k) \leqslant f(x^0, z^0) - k\delta$$

或 $$n\ln\frac{cx^k - z^k}{cx^0 - z^0} \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\ln x_i^k - \ln x_i^0) - k\delta$$

当 $x^0 = e$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\ln x_i^k \leqslant \sum_{i=1}^{n}\ln x_i^0 = 0$

从而有

$$\ln\frac{cx^k - z^k}{cx^0 - z^0} \leqslant -\frac{k}{n}\delta, \text{或} \frac{cx^k - z^k}{cx^0 - z^0} \leqslant e^{-\frac{k}{n}\delta}$$ （证毕）

由定理 4，$(cx^k - z^k) \to 0$，而 $z^k \leqslant z^* \leqslant cx^k$，因此 $cx^k \to z^*$，$z^k \to z^*$.

由上一节的讨论，假设修正 Karmarkar 算法迭代 d 步，则求加边矩阵的 LDL^T 分解为 d 次，运算量为 $O(n^2d)$. 求修正矩阵的 LDL^T 分解需要 $O(\sqrt{n}\,d)$次，运算量为 $O(n^{2.5}d)$. 因此，做 d 步迭代需要的总运算量为 $O(n^{2.5}d)$，而由定理 4，$d = nL$ 就可足够满足精度。而且，经过 nL 次迭代后，可以精确求出最优解。因此，修正 Karmarkar 算法的运算量为 $O(n^{3.5}L)$.

参 考 文 献

[1] Karmarkar N. A new Polynomial—Time Algorithm for Linear Programming. Combinatoria 1984, (4): 373～395

[2] Todd M T, Burell B T. An Extension of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming using dual variables. Algorithms 1986, (1): 409～424

[3] Gay D M. A variant of Karmarkar's Linear Programming Algorithm for Problems in Standard form. Mathematical Programming, 1987, 37: 81～90

[4] Ye Y, Kojima M. Recovering Optimal dual Solution in Karmarkar's Polynomial Algorithm for Linear Programming. Mathematical Programming, 1987, 39: 305～317

[5] Goldfarb D. Relaxed Variants of Karmarkar's Algorithm for Linesr Programming with Unknown Optimal Abjective Value. Mathematical Programming, 1988, 40: 183～195

[6] 张卫民. 并行修正 Karmarkar 算法. 国防科技大学七系硕士论文, 1988 年

A Modified Karmarkar Algorithm for Linear Programming with Unknow Optimal Objective Value

Zhang Weimin Wang Yuwu

(Department of Computer Science)

Abstract

A variant of Karmarkar's modified algorithm is given for solving Karmarkar's standard linear programming with unknown optimal objective value. By using LDL^T factorization of bordering matrix and modified matrix, an efficient method is given. Finally, convergence and complexity of the algorithm are given theoretically.

Key words linear programming, Karmarkar algorithm, LDL^T factorization