

一种慢波自由电子激光 的动力学理论分析

何一平 陈德明

(应用物理系)

摘要 本文用动力学耦合模理论,研究在矩形波导中单侧填充介质而形成的慢波线极化自由电子激光的特性。结果表明,在这一系统中,可用低能电子束产生高频率高增益的自由电子激光,并具有极宽的调谐域。

关键词 动力学理论,线极化,自由电子激光,慢波,耦合模

分类号 TN248.6

从理论上讲,自由电子激光具有功率大、效率高和可调谐的特点。对于普通的快波系统要提高自由电子激光的频率,必须缩短 wiggler 场周期或提高电子束能量。受工艺限制和加速器技术限制,这两个途径都不很理想。因此,有必要寻求新方式。

根据自由电子激光的相位匹配条件

$$\omega = (k + k_w)v_{z0} \quad (1)$$

可得到下述公式

$$\omega = \frac{v_p k_w v_{z0}}{v_p - v_{z0}} \quad (2)$$

式中 ω 和 k 是辐射场的圆频率和波数, v_p 是辐射场的相速度, k_w 为 wiggler 场的波数, v_{z0} 为电子稳态轴向速度。从式(2)可以看到,对快波系统, $v_p > c$, 而 $v_{z0} < c$, ω 有一个上限。如果利用慢波系统, $v_p < c$, 使得 $v_p \approx v_{z0}$, 则 ω 可以很大。也就是选择适当的慢波结构,用低能电子束也能得到高频激光。

一种慢波结构是在波导中填充介质。文献[1]研究了在无穷大平板波导中,单边填充介质形成的慢波结构里的切仑柯夫自由电子激光;文献[2]用流体模型研究了在平板波导两边对称填充介质,并加上静磁 wiggler 场的自由电子激光的工作特性。本文将用动力学耦合模理论,研究在矩形波导中单侧填充介质而形成的慢波线极化自由电子激光的特性。

研究结果表明,在这一系统中,可用低能电子束产生高频率、高增益和效率的自由电子激光,并且有极宽的调谐域。

1 波导系统和波导模式

波导结构如图 1 所示,其截面是一长为 a , 宽为 b 的矩形。在长边上紧贴波导壁填充厚为 d_1 的线性介质,其介电常数为 ϵ_1 , 磁导率为 μ_1 。在波导外面加上线极化静磁 wiggler 场。当电子束在波导中没有填充介质的空间里传播时,如果满足一定的相位条件,就可产生我们所需要的激光。

在图 1 所示的系统中,我们仅考虑 LSE 模。它们在介质和真空中的位函数为^[3]

$$\varphi_1 = A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin k_1 y e^{-i\omega z} \quad (3)$$

$$\varphi_0 = B \cos \frac{m\pi x}{a} \sin k_0 (b - y) e^{-i\omega z} \quad (4)$$

式中 A 和 B 是由场的初始振幅确定的常数。下标“0”和“1”分别表征真空域和介质域, m 为整数, k_1 、 k_0 是波数 k 和频率 ω 的函数,由连接边界条件决定。

由式(3)和(4),可以得到真空区域中 LSE 模的场表达式^[3]:

$$\begin{cases} E_x = -ikB \cos \frac{m\pi x}{a} \sin k_0 (b - y) e^{-i\omega z}; E_y = 0 \\ E_z = -B \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin k_0 (b - y) e^{-i\omega z}; B_z = \frac{B}{i\omega} k_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos k_0 (b - y) e^{-i\omega z} \\ B_y = \frac{1}{i\omega} B (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - k_0^2) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin k_0 (b - y) e^{-i\omega z}; B_z = \frac{k_0 k}{\omega} B \cos \frac{m\pi x}{a} \cos k_0 (b - y) e^{-i\omega z} \end{cases} \quad (5)$$

利用介质区和真空区的边界连接条件,不难得到 LSE 模所满足的色散方程

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\mu_1} \text{ctg} k_1 d_1 + \frac{k_0}{\mu_0} \text{ctg} k_0 d_0 = 0; \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_1^2 + k^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \\ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 + k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 $d_0 = b - d_1$, 为真空区厚度。

我们关心的是高频低模情况。由于 $R, a \gg \lambda$, 当 m 较小时,式(6)中的 $(m\pi/a)^2$ 项可忽略。色散方程可简化为

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\mu_1} \text{ctg} k_1 d_1 + \frac{k_0}{\mu_0} \text{ctg} k_0 d_0 = 0 \\ k_1^2 + k^2 = \omega^2 n^2 / c^2; k_0^2 + k^2 = \omega^2 / c^2 \end{cases} \quad (7)$$

式中 $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ 是真空中光速, $n = (\mu_r \epsilon_r)^{1/2}$ 为介质的折射率, $\epsilon_r = \epsilon_1 / \epsilon_0$, $\mu_r = \mu_1 / \mu_0$ 分别为介质的相对介电常数和相对磁导率。

我们这里讨论 $v_r = \omega/k < c$ 的慢波。当 $v_r < c/n$ 时,由式(7)知, k_0 , k_1 均为纯虚数,

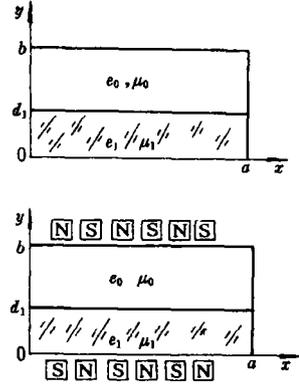


图 1

且(7)式第一式无解,这表明应取 $v_p > c/n$.当 $c/n < v_p < c$ 时, k_0 为纯虚数,从(7)式可得:

$$f(v_p) = \left(n_2 - \frac{c^2}{v_p^2} \right)^{1/2} \text{ctg} \alpha + \mu_r \left(\frac{c^2}{v_p^2} - 1 \right)^{1/2} = 0 \quad (8)$$

式中 $\alpha = \frac{\omega d_1}{c} \left(n^2 - \frac{c^2}{v_p^2} \right)$,其中已用到下面事实:当 u 为实数时, $\text{ctgi}u = -\text{ict}hu$; $u \gg 1$ 时, $\text{ct}hu \approx 1$.记 $\alpha_m = m\pi$,因 $f(v_p)$ 在 $\alpha = \alpha_m$ 与 $\alpha = \alpha_{m+1}$ 处异号,且在 α_m 与 α_{m+1} 间是连续的,因而,在 α_m 与 α_{m+1} ($m=0,1,2,\dots$)之间必有一个 $\alpha = \alpha_{mi}$,满足(8)式,相应的相速度为

$$v_p = \left[\frac{c^2}{n^2 - \left(\alpha_{mi} \frac{\lambda}{2\pi d_1} \right)^2} \right]^{1/2} \quad (9)$$

由上式可得到一个重要结论:在高频($\lambda \ll d_1$)低模(α_{mi} 不大)的情况下,该系统中电磁波的相速度近似等于电磁波在介质中的传播速度.

2 动力学耦合模理论

本节用动力学耦合模理论求解自由电子激光的色散方程.为此,先简化(5)式.令电子束工作在 $0 \leq \frac{m\pi x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ 的区域,在该域内 $\cos \frac{m\pi x}{a}$ 和 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 均取正值,它们的变化仅影响场的幅值,对波粒相互作用没有本质的影响,为简单起见,可用平均值取代它们,有

$$\cos \frac{m\pi x}{a}, \quad \sin \frac{m\pi x}{a} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \quad (10)$$

这就将三维问题简化成二维问题.此外由上节讨论知, k_0 为一纯虚数,记 $k_0 = ik_y$,对高频情况 $k_y \gg 1$,利用尤拉公式及高频近似,有

$$\begin{cases} \sin k_0(b-y) \approx -e^{k_y(b-y)}/2i \\ \cos k_0(b-y) \approx e^{k_y(b-y)}/2 \end{cases} \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入式(5),我们得到:

$$\begin{cases} E_z = \frac{k}{\pi} B e^{k_y(b-y)} e^{-ikz}; & E_z = -\frac{Bm}{ai} e^{k_y(b-y)} e^{-ikz} \\ B_z = \frac{mkB}{i\omega a} e^{k_y(b-y)} e^{-ikz}; & B_y = \frac{k^2 B}{\omega \pi} e^{k_y(b-y)} e^{-ikz} \\ B_z = \frac{k_0 kB}{\omega \pi} e^{k_y(b-y)} e^{-ikz} \end{cases} \quad (12)$$

图1所示的 wiggler 场,由

$$\vec{B}_w = B_w e^{ik_w z} \hat{e}_y \quad (13)$$

绘出,式中 $k_w = 2\pi/\lambda_w$ 是 wiggler 场的波数, λ_w 是 wiggler 场的周期, B_w 是 wiggler 场的振幅.在辐射场和 wiggler 场的共同作用下,电子束的分布函数 f 满足伏拿索夫方程,有

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - e[\vec{E} + \vec{v} \times (\vec{B}_w + \vec{B})] \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (14)$$

式中 \vec{E} 和 \vec{B} 由(12)式给出.

记 $\phi_0 = 0$, $\phi_w = k_w z$, $\phi_s = \omega t - kz - k_0(b-y)$, $\phi_{ws} = \omega t - (k+k_w)z - k_0(b-y)$,可令

$$f = f_0 + f_w + f_s + f_{ws} + \dots \quad (15)$$

式中, $f_0 \sim e^{i\phi_0}$, $f_w \sim e^{i\phi_w}$, $f_s \sim e^{i\phi_s}$, $f_{ws} \sim e^{i\phi_{ws}}$. 将式(15)代入式(14), 由于 $e^{i\phi_0}$, $e^{i\phi_w}$, $e^{i\phi_s}$, $e^{i\phi_{ws}}$ 线性无关, 在式(14)中它们的系数必须同时为零, 因此有

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_w - e(\vec{v} \times \vec{B}_w) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_0 = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_s - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_0 = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ws}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{ws} - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_w^* \\ - e(\vec{v} \times \vec{B}_w^*) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_s = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中 A^* 表示 A 的复共轭. 关于 f 还有许多项, 但它们不是共振项, 或是关于电场幅度的三阶以上小量, 在小信号近似下忽略不计.

(16)~(19)式有明确的物理意义. (16)式给出的 f_0 , 实际上是无 wiggler 场和辐射场时电子束的分布函数. 由于通常要求电子束有良好的单能性和较小的发射度, 满足这一条件的特解为

$$f_0 = \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z - p_{z0}) \quad (20)$$

这里 $\vec{p} = p_x \hat{e}_x + p_y \hat{e}_y + p_z \hat{e}_z$ 是动量空间的变量, $\vec{p}_0 = p_{z0} \hat{e}_z$ 是电子的初始动量.

(17)式给出的 f_w 是(20)式给出的束分布经 wiggler 场扰动后形成的新的束分布函数. 由于 $f_w \sim e^{i\phi_w}$, 从式(17)得到

$$f_w = \frac{e(\vec{v} \times \vec{B}_w) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_0}{(ik_w V_z)} \quad (21)$$

为将 f_w 的物理意义看得更清楚, 我们计算 f_w 关于 \vec{v} 的一阶矩:

$$\vec{v}_{w\perp} = \int \vec{v} f_w d\vec{p} \quad (22)$$

注意到:

$$\vec{v} = \vec{p}/m_0 \gamma \quad (23)$$

γ 为相对论因子, m_0 为电子静止质量, 且有

$$\gamma^2 = 1 + p^2/m^2 c^2 \quad (24)$$

由(22)式有

$$\vec{v}_{w\perp} = \frac{e \vec{B}_w \cdot \hat{e}_y}{i(m_0 \gamma_0 k_w)} \hat{e}_z \quad (25)$$

其中 $\gamma_0 = (1 + p_{z0}^2/m_0^2 c^2)^{1/2}$, 这正是文献[4]用轨道理论给出的线极化自由电子激光中电子的横向稳态速度.

同理, f_s 是辐射场对稳态分布的电子束扰动后形成的束分布函数, 由式(18)得

$$f_s = \frac{e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{i}} f_0}{[i(\omega - kV_z) - k_y V_y]} \quad (26)$$

由此得:

$$\vec{v}_{s\perp} = \int \vec{v}_{\perp} f_s d\vec{p} = \frac{ie}{m_0 \gamma_0 \omega} E_z \hat{e}_z \quad (27)$$

由于辐射场扰动电流密度

$$\vec{J}_{\perp s} = -en_0 \vec{v}_{s\perp} \quad (28)$$

将式 (27) 代入 (28), 并利用关于 E_z 的波动方程, 我们得到图 1 所示系统中有电子束但无 wiggler 场时电磁波的色散关系

$$k^2 + k_0^2 + \omega_{pe}^2/c^2 = \omega^2/c^2 \quad (29)$$

式中, $\omega_{pe}^2 = e^2 n_0 / (\epsilon_0 m_0 \gamma_0)$ 是束的等离子体密度, n_0 为电子束的平均密度, $-e$ 为电子电荷量。显然, 当系统中无电子束 ($\omega_{pe} = 0$) 时, (29) 式又化为 (7) 式的结果。由此可清楚地看出 f_s 物理意义。

f_{ws} 描述了有质动力波扰动电子束后的分布情况。由 (19) 式可得

$$f_{ws} = \frac{e(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \cdot \nabla_i f_w^* + e(\vec{V} \times \vec{B}_w^*) \cdot \nabla_i f_s}{i[\omega - (k + k_w)V_z] - k_y V_y} \quad (30)$$

经过一系列复杂的积分运算, 可得到 f_{ws} 关于 \vec{V} 的一阶矩阶矩, 从而得到扰动电流密度

$$\vec{J}_{ws\perp} = \frac{e\epsilon_0\omega_{pe}^2 B_w^* E_z}{\gamma_0 A \omega^2 m_0} \left(\frac{N}{k_x} - \frac{M}{A\omega_c^2} \right) \quad (31)$$

式中

$$\begin{cases} \Delta\omega = \omega - (k + k_w)V_{z0}; \Delta\omega_c = \omega - kV_{z0} \\ N = \Delta\omega \cdot (\Gamma_{z0}/c^2) - (k + k_w)/\gamma_0^2 \\ M = \Delta\omega\Delta\omega_c(2/\gamma_0^2 - 1) + V_{z0}/\gamma_0^2 [(k + k_w)A\omega_c + kA\omega] \end{cases} \quad (32)$$

将 (28) 和 (31) 式代入电磁波的波动方程, 我们得到带 wiggler 场慢波自由电子激光的色散方程

$$\begin{aligned} (k_0^2 + k^2 - \omega^2/c^2 + \omega_{pe}^2/c^2)(\omega - kV_{z0} - k_w V_{z0})^2 \\ = \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_w \pi \omega m}{k a c^2} \left(\frac{N}{k_x} - \frac{M}{A\omega_c^2} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $\Omega_w = eB_w/m_0\gamma_0$ 。上式左边第一个因子为零即得到 (29) 式, 第二个因子为零即得 (1) 式, 自由电子激光模式和有源波导模式在这里通过电子束耦合起来。

3 讨 论

3.1 切仑柯夫自由电子激光的增益公式

本系统是带 wiggler 场的慢波自由电子激光, 它必定带有切仑柯夫自由电子激光和 wiggler 场自由电子激光的一些基本特征。当我们考虑不同模式时, 其增益公式亦带来明显的差异。

切仑柯夫自由电子激光的基本特征是

$$\Delta\omega_c = \omega - kV_{z0} \approx 0 \quad (34)$$

此时 $|N/k_x| \ll |M/A\omega_c^2|$, 且 $\Delta\omega = -k_w V_{z0}$, $M = -V_{z0}^2 k k_w / \gamma_0^2$, 于是式 (33) 可近似成为

$$\left(k_0^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \right) (\omega - kV_{z0})^2 = \frac{\omega_{pe}^2 \Omega_w \pi m k V_{z0}}{a k_x c^2 \gamma_0^2} \quad (35)$$

令 $k \rightarrow k + \delta k$, 注意到 $|k\delta k| \gg |(\delta k)|^2$, 利用式 (29) 和 (34) 的结果, 可得

$$\delta k^3 = \omega_{pe}^2 \Omega_w \pi m / \gamma_0^2 a k_w V_{z0} c^2 \quad (36)$$

由此求得增长率为

$$\Gamma = I_m(\delta k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_{pe}^2 \Omega_w \pi m}{\gamma_0^2 a k_w V_{z0} c^2} \right]^{1/3} \quad (37)$$

波数漂移为

$$\Delta k_z = R_e(\delta k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{pe}^2 \Omega_w \pi m}{\gamma_0^2 a k_w V_{zo} c^2} \right)^{1/3} \quad (38)$$

3.2 wiggler 场型自由电子激光的增益公式

wiggler 场型自由电子激光的基本特征是

$$\Delta\omega = \omega - (k + k_w)V_{zo} \approx 0 \quad (39)$$

在此条件下, $N = -(k + k_w)/\gamma_0^2$, $\Delta\omega_c = k_w V_{zo}$, $M = k_w V_{zo}^2 (k + k_w) / \gamma_0^2$, (33)式变成

$$\left(k_0^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \right) (\omega - kV_{zo} - k_w V_{zo})^2 = -\frac{2\pi m \omega_{pe}^2 \Omega_w (k + k_w)^2 V_{zo}}{\gamma_0^4 k k_w a} \quad (40)$$

由此可得增益公式与波数漂移值, 它们分别为

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{2\pi m \omega_{pe}^2 \Omega_w (k + k_w)^2}{\gamma_0^2 k^2 k_w V_{zo} a c^2} \right]^{1/3} \quad (41)$$

$$\Delta k_z = \frac{1}{2} \left[\frac{2\pi m \omega_{pe}^2 \Omega_w (k + k_w)^2}{\gamma_0^2 k^2 k_w V_{zo} a c^2} \right] \quad (42)$$

将式(41)与(37)比较可以看到, wiggler 场型自由电子激光比切仑柯夫自由电子激光的增益要高。

3.3 本系统的优点

由共振条件(39)式可得到波长公式为:

$$\lambda_s = \frac{c - V_{zo} n}{V_{zo}} \lambda_w \quad (43)$$

从上式可以看到, 当 $n > 1$ 时, 对给定的 λ_w 和 λ_s 电子束的纵向速度 V_{zo} 比 $n=1$ 的情况要小, 这意味着束能量较低。据式(41)可知, 前者的增益比后者要大。特别值得一提的是, 当 $n=1$ 时, 要让 $\lambda_s \rightarrow 0$, 必须 $V_{zo} \rightarrow c$, 这是一件很困难的工作。但我们的系统, 只须 $V_{zo} \rightarrow c/n$, 就可使 $\lambda_s \rightarrow 0$, 降低了对电子束能量的要求。因此, 从理论上讲, 本系统只须一台小型加速器就可产生任意波长的自由电子激光。考虑一个数字例子, 设 $n=1.5$, $\lambda_w=2\text{cm}$, 为产生 $0.5\mu\text{m}$ 的短波长自由电子激光, 只要求电子的能量为 0.17MeV , 相对论因子值为 1.34。对于同样的参数, 但取 $n=1$, 要求电子束的能量为 71.5MeV , 相对论因子为 141.4。前者的增益比后者大三个数量级。从理论上讲, 对于 0.2MeV 能量的加速器, 就足以产生任意短波长的自由电子激光。

本系统与单纯的切仑柯夫自由电子激光相比, 具有更好的单色性。这是因为由它的共振条件(34)式不足以确定其工作频率, 它必须与波导中的模式色散方程联立才能确定工作频率。因此, 单纯的切仑柯夫自由电子激光的工作频率是模式的函数。对于本系统, 自由电子激光的工作波长已由共振条件(43)式完全确定, 它与波导模式无关。

作者感谢刘盛纲教授对本文的指导。

参 考 文 献

- [1] Toshiyuki shiozawa, et al. IEEE QE-23, 1987(9):1633
- [2] Yu Shibuya, et at. IEEE QE-24, 1988(7): 1235
- [3] 杨铨让. 毫米波传输线. 电子工业出版社, 1986
- [4] 刘盛纲. 相对论电子学. 科学出版社, 1987

Kinetic Theoretical Analysis of a Type of Slow Wave Free Electron Laser

He Yiping Chen Deming
(Department of Applied Physics)

Abstract

The characteristics of a slow wave free electron laser (FEL), which is formed by filling dielectric medium in a rectangular waveguide on one single side, is studied by kinetic coupling mode theory. Analyses show it is possible to produce high frequency free electron laser of high gain and good tunability by using a low energy electron beam.

Key words kinetic theory, linear polarization, free electron laser, slow wave, coupling mode