

## 三维空间中高斯束法有关应用公式的推导

肖高标 张 钧

(电子技术系)

**摘 要** 本文从理论上推导了三维空间中高斯束法有关应用公式,研究了高斯束的性质,阐述了高斯束在自由空间中的传播规律及其在界面上的反射规律。文中还探讨了高斯束初值的选择及其反射后的相位补偿问题,为高斯束法在三维空间中的应用创造了条件。

**关键词** 高斯束,复射线,复曲率矩阵,复主曲率半径

**分类号** TN011

在研究开口腔体雷达散射特性时,高斯束法可以节省大量的计算机时间<sup>[1]</sup>,所以它比其它方法具有更大的实用价值和发展潜力。然而从目前国内已发表的文献来看,高斯束法的应用仅局限在二维空间中,三维空间中高斯束法的计算公式及其应用尚未见报道。克勒和费尔逊等人在70年代发展起来的复射线理论<sup>[2]</sup>是研究高斯束的有力工具。在这种理论中,波源以及波的传播路径都由实空间解析地延拓到了复空间,复射线轨迹的追踪和复波源场的计算均在复空间内进行。复射线在复空间中传播、反射或折射时完全遵循实空间中几何光学的一般规律。本文据此研究了高斯束在三维空间中传播和反射规律,并讨论了高斯束初值的选择问题以及反射后高斯束的相位补偿问题。

### 1 高斯束的性质

#### 1.1 用复源点场表示高斯束

在三维空间中选取波束矢量  $\mathbf{b}$  的形式为

$$\mathbf{b} = (b \sin \theta_0 \cos \varphi_0, b \sin \theta_0 \sin \varphi_0, b \cos \theta_0)$$

波源坐标用复数  $r_s$  表示

$$r_s = r_0 - j\mathbf{b}$$

从三维空间中基本辐射元的辐射场出发,我们可以推导出实空间中高斯束的一般形式:

$$\widetilde{E}_g(\theta_0, \varphi_0) = \widetilde{E}_{g_0}(\theta_0, \varphi_0) \cdot \frac{e^{-jkr}}{r + jbc \cos \theta'} \cdot e^{-\frac{kb}{2}(\theta')^2} \quad (1)$$

式中,  $\theta' = \langle \mathbf{r}, \mathbf{b} \rangle$ 。考虑到  $r \gg b$ , 上式还可以进一步简化为

$$\widetilde{E}_g(\theta_0, \varphi_0) \simeq \widetilde{E}_{g_0}(\theta_0, \varphi_0) \frac{e^{-jkr}}{r} e^{-\frac{kb}{2}(\theta')^2} \quad (2)$$

## 1.2 高斯束近轴表达式

高斯束的能量主要集中在轴线附近。在近轴区，和二维情形一样定义相对偏焦距离大：

$$t = \frac{r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_0)^2}{2[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_0)^2 + b^2]} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{b}_0$  是  $\mathbf{b}$  单位矢量。高斯束近轴场的表达式也具有二维情形一样的形式：

$$\widetilde{E}_G(\theta_0, \varphi_0) = \frac{\widetilde{E}_{G0}(\theta_0, \varphi_0)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_0 + jb} \cdot e^{-jk[\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}_0(1+t^2) + jb(1-t^2)]} \quad (4)$$

## 2 高斯束的传播与反射

高斯束能量主要集中在轴线附近，它在复空间中传播时遵循实空间中波束的传播规律。下面用近轴场法讨论高斯束在自由空间中传播或经界面反射后场强的变化情况，即先求出轴线场强，然后再根据相应公式求出特定位置的近轴场。

### 2.1 高斯束在自由空间传播

如图 1 所示，高斯束在自由空间中传播时会不断扩散。设  $\Sigma_1$  面上高斯束轴线上场强为  $E_1$ ， $\Sigma_2$  面上轴线场强为  $E_2$ 。我们仍然以二阶曲率矩阵来表征轴线上某点邻域内波前曲面的几何特性，但它们的元素都已扩展到复空间。设  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$  处复曲率矩阵分别为  $\overline{Q}_1$ 、 $\overline{Q}_2$ ，它们同样满足方程<sup>[3]</sup>

$$\overline{Q}_2 = \{[\overline{Q}_1]^{-1} + d \cdot \overline{I}\}^{-1} \quad (5)$$

式中， $d$  为  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_2$  之间轴线距离， $\overline{I}$  为实二阶单位矩阵。轴线场强的变化取决于扩散因子  $\mathcal{D}\overline{F}$ ，一般地

$$E_2 = (\mathcal{D}\overline{F}) \cdot E_1 \cdot e^{-kd} \quad (6a)$$

$(\mathcal{D}\overline{F})$  可以通过  $\Sigma_1$  的两个复主曲率半径求得。

$$\frac{1}{\overline{R}_{1,2}} = \frac{1}{2} \left\{ (Q_{11} + Q_{22}) \pm \sqrt{(Q_{11} + Q_{22})^2 - 4(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21})} \right\} \quad (6b)$$

这里， $Q_{11}$ 、 $Q_{12}$ 、 $Q_{21}$ 、 $Q_{22}$  是  $\overline{Q}_1$  的四个复数元素，

$$\overline{Q}_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

复主曲率半径  $\overline{R}_{1,2}$  可以表示成

$$\overline{R}_{1,2} = R_{1,2} - jb_{1,2} \quad (7)$$

式中， $R_{1,2}$  是实主曲率半径， $b_{1,2}$  是传输后两个主方向上的波束参量。最后得到扩散因子：

$$\mathcal{D}\overline{F} = \frac{1}{\sqrt{1 + d/\overline{R}_1} \cdot \sqrt{1 + d/\overline{R}_2}} \quad (8)$$

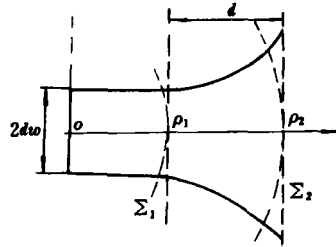


图 1

对于标准轴对称高斯束,  $\Sigma_1$  面上曲率矩阵是对称矩阵:

$$\bar{Q}_1(\rho = \rho_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1 - jb} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_1 - jb} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\rho_1$  是高斯束源点到  $\Sigma_1$  面的轴线距离。上式的极限情况是  $\rho = 0$ , 它代表高斯束起始点处的曲率矩阵

$$\bar{Q}_1(\rho = 0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{jb} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{jb} \end{bmatrix} \quad (10)$$

## 2.2 高斯束在界面上的反射

反射曲面记为  $\Sigma$ , 高斯束在  $\Sigma$  上反射时强场变化取决于反射点处的反射系数  $\bar{\Gamma}$ 。TE 模与 TM 模的反射系数不相同, 我们在反射点处需要将入射波进行模式分解。如图 2, 选取入射波阵面、反射波阵面、反射面的坐标系:

(1) 入射波阵面	(2) 反射波阵面	(3) 反射面	
$\begin{cases} \mathbf{Z}'_0 & (\text{入射方向}) \\ \mathbf{x}'_{10} = \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{x}'_{20} = \mathbf{Z}'_0 \times \mathbf{x}'_{10} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{Z}'_r & (\text{反射方向}) \\ \mathbf{x}'_{10} = \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{x}'_{20} = \mathbf{Z}'_r \times \mathbf{x}'_{10} \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{x}_{10} = \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{x}_{20} = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{x}_{10} \end{cases}$	(11)

上式中,  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{Z}'_0 \times \mathbf{n}_0 / |\mathbf{Z}'_0 \times \mathbf{n}_0| = \mathbf{Z}'_0 \times \mathbf{n}_0 / \sin\theta$

入射波、反射波可以在各自坐标系中进行分解

$$\begin{aligned} E^i &= E_{\perp} \cdot \mathbf{m}_0 + E_{11} \cdot \mathbf{x}'_{10} \\ E^r &= E'_{\perp} \cdot \mathbf{m}_0 + E'_{11} \cdot \mathbf{x}'_{10} \\ &= \Gamma_{\perp} \cdot E_{\perp} \cdot \mathbf{m}_0 + \Gamma_{11} \cdot E_{11} \cdot \mathbf{x}'_{10} \end{aligned} \quad (12)$$

$\Gamma_{\perp}$ 、 $\Gamma_{11}$  分别是 TE 模和 TM 模的反射系数。

设反射曲面由参数方程  $\mathbf{r}(u, v)$  描述

$$\mathbf{r}(u, v) = [x(u, v), y(u, v), Z(u, v)]$$

习惯上, 反射曲面 (记为  $\Sigma$ ) 的法向取为:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

$\mathbf{r}_u$ 、 $\mathbf{r}_v$  分别代表  $\mathbf{r}$  对参量  $u$ 、 $v$  的一阶偏导。在  $(\mathbf{N}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$  基下,  $\Sigma$  的曲率矩阵可用下列公式计算<sup>[3]</sup>:

$$\bar{Q}^{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{Q}_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2} \quad \bar{Q}_{12} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}$$

$$\bar{Q}_{21} = \frac{fG - gF}{EG - F^2} \quad \bar{Q}_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2}$$

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

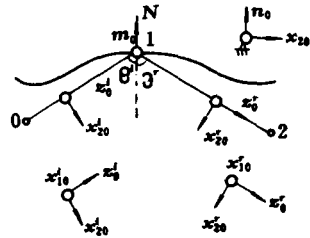


图 2

$$e = \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{N}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad f = \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{N}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad g = \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{N}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

转换到坐标系  $(n_0, x_{10}, x_{20})$  中:

$$\bar{Q}^z = \bar{V}^{-1} \cdot Q^z \cdot \bar{V} \quad (13)$$

$\bar{V}$  是坐标变换矩阵:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{x}_{10} & \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{x}_{20} \\ \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{x}_{10} & \mathbf{r}_r \cdot \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix}$$

高斯束经曲面反射后, 其波阵面曲率矩阵满足方程:

$$(\bar{p}')^T \bar{Q} \bar{P}^i + 2p_{33}^i \bar{Q}^z = (\bar{p}^r)^T \bar{Q} \bar{P}^r \quad (14)$$

$$p_{33}^i = \mathbf{Z}_0^i \cdot \mathbf{n}_0$$

在前面选取的坐标系中:

$$\bar{P}^{i,r} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{10}^{i,r} \cdot \mathbf{x}_{10} & \mathbf{x}_{10}^{i,r} \cdot \mathbf{x}_{20} \\ \mathbf{x}_{20}^{i,r} \cdot \mathbf{x}_{10} & \mathbf{x}_{20}^{i,r} \cdot \mathbf{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_0^{i,r} \cdot \mathbf{n}_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

根据(6(b))式, 可以得到反射后高斯束的所有特征参量。

高斯束在开口腔体中的传播完全可以分解成这两个过程。如图 3, 设第  $i$  个反射点处入射波轴线场强为  $E_i^i$ , 第  $i+1$  反射点处为  $E_{i+1}^i$ , 则它们之间满足递推关系:

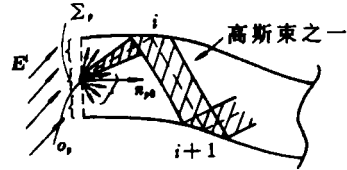


图 3

$$E_{i+1}^i = (\bar{\mathcal{D}}\mathcal{F})_i \cdot (\bar{\Gamma})_i \cdot (\bar{T})_i \cdot E_i^i \cdot e^{-\varphi_i} \quad (16)$$

$(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{F})_i$  和  $(\bar{\Gamma})_i$  分别是第  $i$  反射点处扩散因子和反射系数矩阵;  $(\bar{T})_i$  是坐标转换矩阵;  $\varphi_i = kd_{i,i+1}$ ,  $d_{i,i+1}$  是两反射点间距离。

### 3 高斯束初值的选择

在 GB 法中, 我们将腔体口径上入射场的远区场分割成一系列高斯束, 并分别追踪每条高斯束的后向散射场, 然后将它们迭加起来。(见图 3)。高斯束腰径 (beamwaist) 越大, 辐射方向性越强。我们在选择高斯束初值时应兼顾两方面情况: (1) 保证高斯束能量主要分布在腔体内, 则要求  $b$  选小一点; (2) 尽量使高斯束能量集中在轴线附近, 这希望  $b$  取得越大越好。实际应用中常将入射口径分割成一系列子口径  $\Sigma_p (P=1, \dots, N)$ , 总的辐射场  $E'$  就是各子口径辐射场  $E_p$  的迭加:

$$E' = \sum_{p=1}^N E_p \quad (17)$$

子口径通常选成一些规则形状, 它们的辐射场可以方便地求出。我们可以把它近似为一群高斯束的和:

$$E_p = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn}(\theta_m, \varphi_n) \cdot e(\theta_m, \varphi_n, \varphi) \quad (18)$$

式中  $e(\theta_m, \varphi_n, \varphi)$  是高斯束基准函数,  $(\theta_m, \varphi_n)$  代表高斯束主辐射方向,  $\phi$  是高斯束近轴偏角。  $C_{mn}(\theta_m, \varphi_n)$  可用点匹配法求得。如果匹配点足够多, 可以用一组固定的高斯束群来很好地模拟不同的辐射场, 只是系数互不相同。这给实际应用带来极大方便, 只要跟踪某一角度下入射场相应的高斯束轨迹, 任意入射角度下腔体后向散射场都可以很快地求出。

#### 4 后向散射场的计算

高斯束能量集中在轴线附近, 我们只用轴线附近一小块区域  $\Sigma_s$  作为出射高斯束在口径  $\Sigma_a$  上的扩展范围。只要知道了  $\Sigma_s$  上场强分布, 高斯后向散射场就可以用多种方法求出。

如图 4, 高斯束轴线场强已追踪出来。高斯束轴线与  $\Sigma_s$  交于  $O$  点;  $\Sigma_p$  是高斯束过  $O$  点的波前曲面(等相位面),  $\Sigma_t$  是  $\Sigma_p$  在  $O$  点的切平面。设  $O$  点场强为  $E_0$ , 在观察点  $P_i$  处场强  $E(P_i)$  可以表示成:

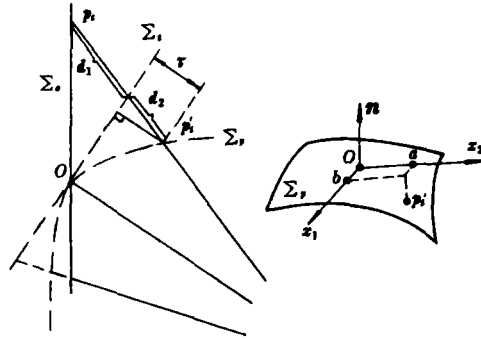


图 4

$$E(p_i) = AE_0 e^{-j\Delta\Phi}$$

根据高斯束横向衰减规律,  $A$  具有指数形式:

$$A = e^{-\frac{k_0 b_n}{2} \cdot i g^2 \theta} = e^{-\frac{k_0 b_n}{2} \left(\frac{r}{R_n}\right)^2} \quad (19)$$

$b_n$ 、 $R_n$  是高斯束在切向  $l_n$  方向上波数参数和曲率半径。  $e_1$ 、 $e_2$  代表两个主方向,  $l_n$  与  $e_1$  夹角为  $\alpha$ ,  $l_n$  向复曲率半径  $\tilde{R}_n$  可由欧拉公式求出:

$$\tilde{R}_n = R_n - j b_n = \tilde{R}_1 \cos^2 \alpha + \tilde{R}_2 \sin^2 \alpha \quad (20)$$

相位修正因子  $\Delta\Phi = k_0 \Delta d$ ,  $\Delta d$  是  $P_i$  到等相位点  $\Sigma_s$  上相应点  $p_i'$  间距离,

$$\Delta d = d_1 + d_2 \simeq d_1 + \tau$$

$\tau$  是  $p_i'$  到  $\Sigma_s$  面垂直距离。设  $\Sigma_p$  在  $O$  点实曲率矩阵为  $Q_p$ , 那么:

$$\tau = \frac{1}{2} [a, b] [Q_p] \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (21)$$

这样,  $\Sigma_s$  上场强均可以从轴线场强出发, 通过上述幅度和相位纠正得到近似解。

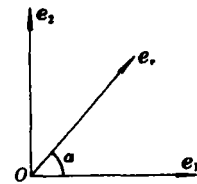


图 5

## 5 结束语

在三维空间，一个开口腔体可以和一组固定的高斯束群对应起来，开口腔体对单位幅度高斯束群的散射场求出之后，任意入射场的散射场都可以通过一些简单代数运算得到。从某种意义上说，开口腔体被等效成了一个多口网络。在计算同一腔体对多个入射场的散射场时，高斯束法比其它方法效率高得多。这时的关键是如何将入射场分解成高斯束群。目前国外开发出的大规模高斯波束自适应形成技术可以较好地解决这个问题。

### 参 考 文 献

- 1 Pathak and Burkholder. Analyzing EM Scattering by Open-ended Waveguide Cavity. IEEE T-AP, 1989, 37 (5)
- 2 阮颖铮. 电磁射线理论基础. 成都电讯工程学院出版社
- 3 Ling H, Chou R C, Lee S W. Shooting & Bouncing Rays-Calculating the RCS of an Arbitrary Shaped Cavity. - IEEE T-AP, 1989, AP-37(2)

## Derivation of Some Formulas on Gaussian Beams Method in Three-dimensional Structures

Xiao Gaobiao    Zhang Jun

(Department of Electronic Technology)

### Abstract

The practical formulas for Gaussian Beams method are theoretically derived. The properties of Gaussian beams are investigated. The transmissive laws in free space and the reflective laws of Gaussian Beams are mentioned. Also the choice of initial value of the Gaussian Beam and the offset phase for reflection in Gaussian Beams Method are investigated in this paper. These will be very useful in the application of Gaussian Beams Method in three-dimensional structures.

**Key words** Gaussian beam, complex ray, complex curvature matrixes, complex curvature radius