国 防 科 技 大 学 学 报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第1期　1992年3月　Vol. 14 No. 1

非线性系统 Hammerstein 模型辨识

胡德文　王正志

（自动控制系）

摘　要　本文利用差集理论设计的输入信号，辨识了 Hammerstein 模型的脉冲响应函数，并进一步得到了非线性部分多项式的系数。本文得到的公式简单，辨识结果依概率收敛于真值。文中给出了仿真结果。

关键词　非线性系统，系统辨识，伪随机序列，Hammerstein 模型

分类号　TP13

辨识非线性系统的困难之一，就是缺乏描述各种非线性系统特性的统一的数学理论。但是，有较广泛的一类非线性系统可用互连的无记忆非线性增益环节和线性子系统来建造模型。Hammerstein 模型就是其中重要的一种，见图1.

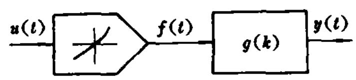

图1　Hammerstein 模型结构

Hammerstein 模型（以下简称H模型）的非线性增益环节可以采用下列 P 阶升幂多项式来近似：

$$f(t) = r_1 u(t) + r_2 u^2(t) + \cdots + r_p u^p(t) \tag{1}$$

线性子系统采用脉冲响应函数模型描述：

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N_s} g(k) f(t-k) + \varepsilon(t) \tag{2}$$

其中 N_s 为线性子系统的调整时间，$k > N_s$ 时，$g(k)=0$.

早在1973年，Krempl[1]就采用三位式伪随机序列辨识非线性系统。1976年，Tuis[2]采用多位式伪随机序列来辨识水轮机的非线性模型参数。1979年，Billings 和 Fakhovri[3]采用伪随机序列辨识H模型。1982年，钟延炯、李白男[4]利用复合码与和码辨识H模型及前馈非线性系统，通过构造线性方程组解出(1)式中偶次非线性系数 r_2，r_4，…，r_{2n}，以及(2)式中的脉冲响应函数 $g(1)$，$g(2)$，…，$g(N_s)$，至于奇次非线性系数，则是通过另加逆重复 m 序列求得的。1990年，刘若峰、曹大铸[5]研究了连续 Hammerstein 模型的参数估计方法。

在实际系统中，通常所见到的非线性执行机构对线性系统的控制过程就构成了一典型的 Hammerstein 模型，非线性特性未知的情况下的过程辨识即为本文所研究的内容。

* 1990年12月25日收稿　1991年7月4日收修改稿

1 H 模型线性部分脉冲响应函数辨识

考虑(2)式所示的线性子系统，并且假设观测噪声是零均值的，即 $\mathrm{E}\{\varepsilon(t)\}=0$，我们规定

$$R_{uy}(m) \triangleq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u(k-m)y(k) \tag{3}$$

符号 $R_{uu}(m)$，$R_{u\varepsilon}(m)$和 $R_{uf}(m)$含义同上，则有

$$R_{uy}(m) = \sum_{k=1}^{N_s} g(k)R_{uf}(m-k) + R_{u\varepsilon}(m) \tag{4}$$

记 $\hat{g}(k)$为 $g(k)$的估计值，则由于

$$\mathrm{E}\{R_{u\varepsilon}(m)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathrm{E}\{u(k-m)\}\cdot\mathrm{E}\{\varepsilon(k)\} = 0$$

故有

$$R_{uy}(m) = \sum_{k=1}^{N_s}\hat{g}(k)R_{uf}(m-k) \tag{5}$$

我们采用脉冲型自相关函数序列作为激励信号，其设计方法见文[6]。取样本 N 为周期 N_p 的倍数，那么

$$R_{uf}(m) = \frac{1}{N_p}\sum_{k=1}^{N_p} u(k-m)f(k) \tag{6}$$

记

$$u(k) = \begin{cases} u_+，当\ u(k) > 0\ 时 \\ u_-，当\ u(k) < 0\ 时 \end{cases}；f(k) = \begin{cases} f_+，当\ u(k) > 0 \\ f_-，当\ u(k) < 0 \end{cases}$$

那么(6)式中，当 $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ N_p)$，差集为 $\mathrm{D}(N_p, k^+, \lambda)$时，根据差集性质，有：$u_+f_+$出现 λ 次；u_+f_-出现 $k^+-\lambda$ 次；u_-f_+出现 $k^+-\lambda$ 次；u_-f_-出现 $N_p-2k^++\lambda$ 次。这时，(6)式变为

$$\begin{aligned} R_{uf}(m) = [&\lambda\cdot u_+f_+ + (k^+-\lambda)\cdot u_+f_- + (k^+-\lambda)\cdot u_-f_+ \\ &+ (N_p-2k^++\lambda)\cdot u_-f_-]/N_p \end{aligned} \tag{7}$$

如果采用的差集为 $\mathrm{D}(N_p, k^+, \lambda) = \mathrm{D}\left(N_p, \frac{N_p-1}{2}, \frac{N_p-3}{4}\right)$，则有

$$u_-/u_+ = -1 \pm 2/\sqrt{N_p+1} \tag{8}$$

在这种情况下，(7)式变为

$$\begin{aligned} R_{uf}(m) = &[(N_p-3)u_+ + (N_p+1)u_-]f_+/(4N_p) \\ &+ (u_+ + u_-)(N_p+1)f_-/(4N_p) \end{aligned} \tag{9}$$

显然，当 $m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ N_p)$时，$R_{uf}(m)$与 m 无关，故可记

$$R_1 \triangleq R_{uf}(m), m \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ N_p) \tag{10}$$

而

$$R_0 \triangleq R_{uf}(0) = (N_p-1)u_+f_+/(2N_p) + (N_p+1)u_-f_-/(2N_p) \tag{11}$$

当取 $N_p \geqslant N_s$ 时，由(5)式可得到如下方程组

$$\begin{cases} R_{uy}(0) = \hat{g}(1)R_1 + \hat{g}(2)R_1 + \cdots + \hat{g}(N_s)R_1 \\ R_{uy}(1) = \hat{g}(1)R_0 + \hat{g}(2)R_1 + \cdots + \hat{g}(N_s)R_1 \\ \vdots \\ R_{uy}(N_s) = \hat{g}(1)R_1 + \hat{g}(2)R_1 + \cdots + \hat{g}(N_s)R_0 \end{cases} \tag{12}$$

由上面方程组的后 N_s 个方程可得：

$$R_{uy} = R \cdot \hat{g} \tag{13}$$

其中 R_{uy}表示 $R_{uy}(m)$，$m=1\sim N_s$ 的向量；$\hat{g}$ 表示 $\hat{g}(m)$，$m=1\sim N_s$ 的向量；R 表示对角元素为 R_0，其它元素为 R_1 的矩阵。可以证明，R^{-1}具有如下简单的形式

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ y & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & x & y \\ y & y & \cdots & y & x \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中

$$x = \frac{R_0 + (N_s - 2)R_1}{(R_0 - R_1)[R_0 + (N_s - 1)R_1]} \tag{15}$$

$$y = \frac{-R_1}{(R_0 - R_1)[R_0 + (N_s - 1)R_1]} \tag{16}$$

我们看到，方程组(12)只有 N_s+1 个方程，而现在有 $\hat{g}$ 向量和 R_0，R_1 共 N_s+2 个未知数，方程的解是不确定的。为了唯一地估计出各个参数，我们不妨对脉冲响应函数后值施加以归一化条件

$$\sum_{m=1}^{N_s} \hat{g}(m) = 1 \tag{17}$$

这时，由方程组(12)的第一个方程知

$$R_1 = R_{uy}(0) \tag{18}$$

由方程组(12)的后 N_s 个方程相加，有

$$R_0 = \sum_{k=1}^{N_s} R_{uy}(k) - (N_s - 1)R_{uy}(0) \tag{19}$$

由(13)～(19)式，得到

$$\hat{g}(i) = \frac{R_{uy}(i) - R_1}{R_0 - R_1} \tag{20}$$

其中 R_1 和 R_0 的值由(18)、(19)式获得。

这是目前我们所见的关于H模型脉冲响应函数辨识的最简单公式。在相关函数 $R_{uy}(i)-R_{uy}(0)$计算好后，总共只需 N_s 次加法和 N_s 次除法，即可算得全部 $\hat{g}(i)(i=1\sim N_s)$的值。特别地，当 H 模型退化为线性模型时，注意到 $R_{uy}(0)=0$，我们有 $\hat{g}(i)=R_{uy}(i)/R_{uu}(0)$(非归一化情形)，辨识的精度达到了最高的程度。

2 H 模型的辨识及收敛性

设 $a(t)$为由差集 $D\left(N_p, \frac{N_p-1}{2}, \frac{N_p-3}{4}\right)$ 设计得到的具有 $u_+=1$ 的序列，那么(20)式可等价为

$$\hat{g}(i) = \frac{R_{ay}(i) - R_{ay}(0)}{\sum_{k=1}^{N_s} [R_{ay}(k) - R_{ay}(0)]} \tag{21}$$

记
$$T=\frac{N_p-3}{4N_p}u_++\frac{N_p+1}{4N_p}u_-,U=\frac{N_p+1}{4N_p}(u_++u_-) \tag{22}$$

$$V=\frac{N_p-1}{2N_p}u_+,W=\frac{N_p+1}{2N_p}u_- \tag{23}$$

则从(9)和(11)式得到

$$\begin{cases} Tf_+-Uf_-=R_1 \\ Vf_++Wf_-=R_0 \end{cases} \tag{24}$$

从而

$$\begin{cases} f_+=(WR_1-UR_0)/(TW-UV) \\ f_-=(TR_0-VR_1)/(TW-UV) \end{cases} \tag{25}$$

不断地改变输入信号 $u(t)$ 的幅值 u_+ 和 u_-，得到一系列 f_+ 和 f_- 值。为了统一处理，记第 i 次 u_+ 的值为 h_{2i-1}，而 u_- 记为 h_{2i}，相应地，f_+ 记为 f_{2i-1}，f_- 记为 f_{2i}，那么，由(1)式有

$$f_i=r_ih_i+r_2h_i^2+\cdots+r_ph_i^p \tag{26}$$

取 $i=1\sim p$，联立方程组，解得：

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1 & h_1^2 & \cdots & h_1^p \\ h_2 & h_2^2 & \cdots & h_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_p & h_p^2 & \cdots & h_p^p \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} \tag{27}$$

这就得到了非线性部分的各系数值。

每次改变幅值大小，都可以得到一组脉冲响应函数的值，可采用求平均值的办法得到最终的更为精确的值。

因为 $\mathrm{E}\{R_{u\varepsilon}(i)R_{u\varepsilon}(i)\}=\frac{1}{N}R_{uu}(0)\cdot\mathrm{E}\{\varepsilon^2(i)\},\mathrm{E}\{R_{u\varepsilon}(i)\}=0$，因此，当 $N\to\infty$ 时，各 $R_{uy}(i)$ 的值均依概率收敛于真值（根据契比雪夫定理）。从而各 $\hat{g}(i)$ 值亦依概率收敛于真值 $g(i)$，而非线性部分的系数亦依概率收敛于真值。

3 仿真结果

设非线性子系统由如下二阶各项式描述

$$f(k)=u(k)+0.5u^2(k) \tag{28}$$

而线性子系统的描述为

$$y(k)=1.5y(k-1)-0.7y(k-2)+f(k-1)-0.8f(k-2)+e(k) \tag{29}$$

输入信号取为改良型 m 序列[6]，周期为 $N_p=63$，幅度为 $u_+=4$，$u_-=3$. 由于系统非线性部分只有二次方，不需改变幅度。采用两个周期的信号，即 $N=126$. 仿真在微机 AST-386 上进行。

在无噪声干扰，即 $e(k)\equiv0$ 的情况下，非线性多项式的系数为

$$r_1=1.000913\ ,\ r_2=0.4998725 \tag{30}$$

误差由单精度运算所引起的，属字长效应。

当系统存在有色噪声干扰时，
$$e(k)=\eta(k)-0.5\eta(k-1) \tag{31}$$

其中 $\eta(k) \sim N(0, 0.01)$。这时的非线性多项式系数变为

$$r_1 = 0.9526906 \;, \; r_2 = 0.5010362. \tag{32}$$

4 结束语

本文利用特定的输入信号，辨识了 Hammerstein 模型的非线性多项式系数和线性部分脉冲响应函数。算法极其简单，无需中间变换，在有色噪声下估计也是一致收敛于真值的。限于篇幅，我们未对 H 模型前馈系统情形、非线性部分为非光滑的情形及辨识的统计特性（如渐近正态性等）予以考虑。这些问题在理论上和实际上都是值得进一步研究的课题。关于如何从现有的脉冲响应函数得到线性系统的全结构参数的问题，我们在文[7]中进行了研究。

参 考 文 献

1 Krempt R. Application of Three-Level-Pseudorandom-Signals for Parameter Estimation of Nonlinear System. Proc. of the 3rd IFAC symp. on Identification and syst. Param. Estim. 1973

2 Tuis L. Identification of Nonlinear System by Means of Multilevel Pseudorandom Signals Applied to a Water-turbine Unit. Proc of the 4th IFAC Symp on Identification and System Parameter Estimation, 1976

3 Billings S A and Fakhovri S Y. Nonlinear System Identification Using the Hammerstein Model. Int. J. System Science, 1979, 10(5)

4 钟延炯，李白男. 采用复合码与和码辨识 Hammerstein 模型及前馈非线性系统. 自动化学报，1982，8(4)

5 李若峰，曹大铸. 连续 Hammerstein 模型参数估计方法. 控制理论与应用，1990，7(1)

6 Hu D W, etal. A－Optimal Input Signal Design for Identifying Impulse Response Function of Linear Discrete System and the Asymptotic Properties. Proc. 8th IFAC symp. on Identification and System Parameter Estimation, Beijing, 1988. 587－592

7 Hu D W. Identification of ARMAX (d, p q) Models with Coloured Noises, Preprints of the 9th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Budapest, 1991

Identification of the Nonlinear System's Hammerstein Models

Hu Dewen Wang Zhengzhi

(Department of Automatic Control)

Abstract

The paper uses the input signals designed by the difference sets theory to identify the impulse response functions of the nonlinear system's Hammerstein model.

The polynomial coefficients of the nonlinear subsystem have been further obtained. The obtained formulas are very simple, and the probability of identification results are consistently convergent to their original ones. Some simulation results are also given in it.

Key words nonlinear system, system identification, pseudo-random sequence, Hammerstein model