国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第1期 1992年3月 Vol. 14 No. 1

可招回秘书问题

金治明 李晓杰
(系统工程与应用数学系)(航天部14所)

摘 要 可招回秘书问题已由 Yang, Petrucceol, Choe 及 Bal 研究过。本文将这个问题纳入 Snell 框架，用相对最好者的位置函数 Wn 代替通常的相对名次，我们得到了各种招回概率下的最优停止规则，这些结果推广了文[7]－[9]。

关键词 概率，最优，停止规则，招回，秘书问题
分类号 O211

1974年 Yang 研究了可招回的秘书问题[5]，他用 $q(r)$ 表示招回前第 r 个人成功的概率，并假定 $q(0)=1$，且 $q(r)$ 是不增函数，该文主要讨论了 $q(r)\equiv q$ 与 $q(r)=q^r(r>1)$ 的情形。

1975年，Smith (文[2]) 与本文作者(1986年，文[3]，[4])考虑了可拒绝的秘书问题。此后 Joseph，D. Petruccelli(1981年，文[6])与 K. L. Choe 及 D. S. Bal(1983年，文[7])推广了 Yang 的结果，其中假定 $q(0)<1$，甚至对较为一般的招回概率系列 $\{q(r)\}_{r=0}^{N-1}$ 都有较好的结果。

本文把可招回秘书问题纳入 Snell 框架，用相对最好者的位置函数 W_n 来代替一般的相对名次 y_n，本文的方法可望用到一般报酬函数的可招回秘书问题。

1 记号与引理

令 $\Omega=\{(b_1,b_2,\cdots,b_N)$：其中 $(b_1,\cdots,b_N)$ 是 $1,2,\cdots,N$ 的一个排列$\}$，且假定每个样本点的概率是 $\frac{1}{N!}$.

$\mathscr{F}$ 等于 Ω 的一切子集：W_n 等于 $n-b_1$，b_2，…，b_n 中相对名次者的序号。如果 $W_n=n-i$. 我们称 b_i 为 n 前相对最好者。

$Z_n=1$，表示 n 前相对最好者受聘；$Z_n=0$ 表示她拒聘。假定：

(1) $p(Z_n=1|W_n=n-i)=q(n-i)$，$q(r)$ 是单调不增函数。

(2) 对 $\forall\ j>n$，$p(Z_j=1|W_j=W_n+j-n, Zn=0)=0$，即此人拒聘，就再也不能受聘。

(3) 除非(2)之情形，z_1，z_2，…，z_n 是相互独立的，且 Z_n 只与 W_n 有关，与其它 W_i，$i\leq n-1$ 独立。

$\mathscr{F}_n=\sigma(w_1,w_2,\cdots,w_n)$，下面的引理是显然的。

---

* 1991年4月17日收稿

引理 1 w_1，w_2，…，w_N 是马氏链，且

$$P(w_{n+1}=0|w_n=n-i)=\frac{1}{n+1},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N-1 \tag{1}$$

$$P(w_{n+1}=n+1-i|w_n=n-i)=\frac{n}{n+1},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N-1 \tag{2}$$

$$P(w_n=n-i)=\frac{1}{n},\quad 0\leqslant i\leqslant n\leqslant N \tag{3}$$

下面称在第 n 步采用招回技术是指：在第 n 步录用 n 前（包括第 n 步）的相对最好者，如果招回不成功，则继续观察并采用某种最优规则 δ. 令

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}p(b_i=1,Z_n=1|\mathscr{F}_n)+P(Z_n=0,\text{继续观察}$$

并采用某种最优规则 δ 而得最好姑娘 $|\mathscr{F}n)$ (4)

下面简记"继续观察并采用某种最优规则 δ 而得最好姑娘"为"由 δ 而得最好"。由于

$$\begin{aligned}P(b_i=1,Z_n=1|w_1=1,w_2=i_2,\cdots,w_n=n-i)\\=P(w_N=N-i,Z_n=1|w_1=1,w_2=i_2,\cdots,w_n=n-i)\\=P(Z_n=1|W_n=n-i)p(W_N=N-i|W_n=n-i)\\=\frac{n}{N}q(n-i)\end{aligned}$$

式中 i_2 是满足 $1<i_2\leqslant n$，$i_2\neq n-i$ 的数，同样

$$\begin{aligned}P(Z_n=0,\text{由 }\delta\text{ 而得最好 }|W_1=1,W_2=i_2,\cdots,W_n=n-i)\\=(1-q(n-i))P(\text{由 }\delta\text{ 而得最好 }|W_n=n-i)\end{aligned}$$

记 $\widetilde{X}_k^n=P$(在第 n 步后继续观察第 k 步，而由某种最优规则而得最好者 $|\mathscr{F}_n)$

$$\widetilde{\gamma}_n=\operatorname{ess}\sup_{t\in C_{n+1}}\mathrm{E}(\widetilde{X}_t^n|\mathscr{F}_n)$$

这里 $C_{n+1}=\{t|t$ 为停止规则，$t\geqslant n+1\}$。因为 N 是有限的，由式(1)而知，必存在 n 后的最优的停止 δ，于是 $\quad E(\widetilde{X}_\delta^n|\mathscr{F}_n)=\widetilde{\gamma}_n$ (5)

从而
$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{N}q(n-i)+(1-q(n-i)\widetilde{\gamma}_{n,i}\right]I_{[W_n=n-i]} \tag{6}$$

式中 $\widetilde{\gamma}_{n,i}=\widetilde{\gamma}_n|_{W_n=n-i}$.

X_n 有一个 Markov 表示，因此

$$\gamma_n\triangleq\operatorname{ess}\sup_{t\in C_n}\mathrm{E}(X_t|\mathscr{F}_n)=\operatorname{ess}\sup_{t\in C_n}\mathrm{E}(X_t|W_n)$$

是 $\sigma(W_n)$ 可测的。显然 $\widetilde{\gamma}_{N,i}\equiv0$. 记

$$X_{n,i}=X_n|_{W_n=n-i},\quad X_n^0=X_{n,n}$$

$$\gamma_{n,i}=\gamma_n|_{W_n=n-i},\quad \gamma_n^0=\gamma_{n,n}$$

引理 2 对一切 $i\leqslant n\leqslant N-1$

$$\mathrm{E}(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)=\frac{1}{n+1}\gamma_{n+1}^0+\frac{n}{n+1}\gamma_{n+1,i} \tag{7}$$

$$\widetilde{\gamma}_{n,i}=\frac{1}{n+1}\gamma_{n+1}^0+\frac{n}{n+1}\widetilde{\gamma}_{n+1,i} \tag{8}$$

$$\tilde{\gamma}_n \equiv \tilde{\gamma}_{n,i} = \sum_{j=n+1}^{n} \frac{n}{j(j-1)} \gamma_j^0 \tag{9}$$

证明 $\mathrm{E}(\gamma_{n+1} | W_n = n - i) = \frac{1}{P(W_n = n-i)} \Big[\int_{W_n = n-i, Wn+1=0} \gamma_{n+1}$

$+ \int_{W_n = n-i, W_{n+1} = n+1-i} \gamma_{n+1} \Big] = \gamma_{n+1}^0 P(W_{n+1} = 0 | W_n = n - i) + \gamma_{n+1,i} P(W_{n+1}$

$= n + 1 - i | W_n = n - i) = \frac{1}{n+1} \gamma_{n+1}^0 + \frac{n}{n+1} \gamma_{n+1,i}$

(7)式得证，下证(8)式。由 Markov 性，$\forall\ A \in \mathscr{B}_1$，$t \in C_{n+1}$

$$P(\tilde{X}_t^n \in A | W_n = n-i) = \frac{1}{P(W_n = n-i)} [P(\tilde{X}_t^n \in A, W_{n+1} = 0, W_n = n-i)$$

$$+ P(\tilde{X}_t^n \in A, W_{n+1} = n+1-i, W_n = n-i)]$$

$$= \frac{1}{n+1} P(\tilde{X}_t^n \in A | W_{n+1} = 0) + \frac{n}{n+1} P(\tilde{X}_t^{n+1} \in A | W_{n+1} = n+1-i)$$

所以
$$\tilde{\gamma}_{n,i} = \frac{1}{n+1} \gamma_{n+1}^0 + \frac{n}{n+1} \tilde{\gamma}_{n+1,i}.$$

由上式递推则得(9)式，而从(9)式可见 $\tilde{\gamma}_{n,i}$ 与 i 无关，故可记为 $\tilde{\gamma}_n$.

下面，我们认定在 $\sum$ 中若下限大于上限则为 0，在 $\prod$ 中若下限大于上限则为 1.

引理 3 记 $\pi_N^i = q(N-i)$，

$$\pi_n^i = \left(\frac{n - q(0)}{N} - \sum_{K=n+1}^{N-1} \frac{\pi_K}{K} \right) q(n-i) \vee \frac{n}{n+1} \pi_{n+1}^i \tag{10}$$

其中 $\vee$ 表示取最大，$\pi_k = \pi_k^k$，$n \leqslant N-1$，则对任意的 $n \leqslant N-1$，有

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_{K=n+1}^{N} \frac{\pi_K}{K} \tag{11}$$

$$\mathrm{E}(\gamma_{n+1} | W_n = n - i) = \tilde{\gamma}_n \frac{n}{n+1} \pi_{n+1}^i \tag{12}$$

$$X_{n,i} = \tilde{\gamma}_n + \left(\frac{n}{N} - \tilde{\gamma}_n \right) q(n-i) \tag{13}$$

$$\gamma_{n,i} = \tilde{\gamma}_n + \pi_n^i, \tag{14}$$

$$\gamma_N^0 = X_N^0 = q(0) \tag{15}$$

证明 只须证(11)，(12)式，由后退归纳法，因为

$$\gamma_N = X_N = \sum_{j=1}^{N} q(N-j) I_{[W_N = N-j]}$$

$$\mathrm{E}(\gamma_N | W_{N-1} = N - 1 - i) = \frac{N-1}{N} q(N-i) + \frac{1}{N} q(0)$$

则
$$\gamma_{N-1,i} = X_{N-1,i} \vee \mathrm{E}(\gamma_N | W_{N-1} = N - 1 - i) = \frac{q(0)}{N} + \pi_{N-1}^i$$

$$\tilde{X}_N^{N-1} = q(0) I_{[W_N = 0]}$$

$$\tilde{\gamma}_{N-1,i} = \mathrm{E}(\tilde{X}_N^{N-1} | W_{N-1} = N-1-i) = \frac{q(0)}{N}$$

所以(11)，(12)式对 $n=N-1$ 成立。假定(11)，(12)式对 $N-1$，$N-2$，…，$n+1$ 成立。下证 n 之情形。由（14）式）

$$\tilde{\gamma}_n = \sum_{j=n+1}^{N} \frac{n}{j(j-1)} \gamma_j^0 = \sum_{j=n+1}^{N} \frac{n}{j(j-1)} (\tilde{\gamma}_j + \pi_j)$$

$$= \sum_{j=n+1}^{N} \frac{n}{j(j+1)} \pi_j + n \sum_{K=n+1}^{N} \frac{\pi_K}{K} \sum_{j=n+1}^{k-1} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{K=n+1}^{N} \frac{\pi_K}{K}$$

从 $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{n+1} + \frac{\pi_{n+1}}{n+1}$ 及(7)式知，

$$\mathrm{E}(\gamma_{n+1} | W_n = n-i) = \frac{1}{n+1} \gamma_{n+1}^0 + \frac{n}{n+1} \gamma_{n+1,i}$$

$$= \frac{1}{n+1} (\tilde{\gamma}_{n+1} + \pi_{n+1}) + \frac{n}{n+1} (\tilde{\gamma}_{n+1} + \pi_{n+1}^i) = \tilde{\gamma}_{n+1} + \frac{1}{n+1} \pi_{n+1} + \frac{n}{n+1} \pi_{n+1}^i$$

$$= \tilde{\gamma}_n + \frac{n}{n+1} \pi_{n+1}^i$$

所以　　$\gamma_{n,i} = X_{n,i} \vee \mathrm{E}(\gamma_{n+1} | W_n = n-i) = \tilde{\gamma}_n + \pi_n^i$

2　主要定理

本节对不同的招回概率系统 $\{q(r)\}$ 研究最优停止规则。

定理 1　设 $q(0)=q\leqslant 1$，当 $r\geqslant 1$ 时，$q(r)\equiv p<q$，则

（1）对一切 $i<n\leqslant N-1$，$\mathrm{E}(\gamma_{n+1} | W_n = n-i) > X_{n,i}$　　(16)

这表明最优的规则必须是停在相对最好者的位置。

（2）存在一个正整数 $S=S(N,P,q)$，最优规则一定是不在前 $S-1$ 步停止。

（3）当 $q<1$ 时，S 是满足下式的最小正整数 n：

$$\prod_{K=n}^{N-1} \left(1 + \frac{1-q}{k}\right) \leqslant \frac{q - p(1-q)}{q^2} \tag{17}$$

当 $q=1$ 时 $S = \inf\left\{n \geq r^* : 1 - \sum_{j=n+1}^{N} \frac{1}{j-1} \geq p\right\}$　　(18)

其中　$r^* = \inf\left\{n \geq 0 : 1 - \sum_{j=n+1}^{N} \frac{1}{j-1} \geq 0\right\}$　　(19)

（4）最优规则是：$\sigma = \inf\{k \geq S : W_k = 0\}$　　(20)

（5）如果 $q<1$，$S=1$，则选到最好姑娘的概率

$$V = \frac{q}{N} \prod_{K=1}^{N-1} \left(1 + \frac{1-q}{k}\right) \tag{21}$$

如果 $q<1$，$S\geqslant 2$，则

$$V = \frac{(S-1)p}{N} + \frac{S-1}{N} q(1-q)^{-1} \left[\prod_{k=s-1}^{N-1} \left(1 + \frac{1-q}{k}\right) - 1\right] \tag{22}$$

如果

$$\begin{cases} q=1,S\geq 2 \text{ 则 } V=\dfrac{S-1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{k-1}+\dfrac{(S-1)p}{N} \\ q=1,S=1,\text{则 } V=\dfrac{1}{N} \end{cases} \tag{23}$$

证明 （1）用后退归纳法证明(16)式。当 $n=N-1$，$i<N-1$ 时，

$$\pi_{N-1}^{i}=\frac{N-1-q}{N}p\vee\frac{N-1}{N}p=\frac{N-1}{N}p$$

所以 $\mathrm{E}(\gamma_N|W_{N-1}=N-1-i)>X_{N-1,i}$. 现在假定(16)式对 $N-1$，$N-2$，…，$n+1$ 成立，即对一切 $i<n+1$ 有：$\pi_{n+1}^{i}=\dfrac{n+1}{N}p$,则

$$\pi_n^i=\left(\frac{n-q}{N}-\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{\pi_K}{K}\right)p\vee\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{N}p=\frac{n}{N}p$$

故 $\mathrm{E}(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)>X_{n,i}$，对一切 $i<n$ 成立。

（2）由 $q(r)=p$，$(r>1)$，有 $\pi_j^1=\pi_j^2=\cdots=\pi_j^{j-1}=\dfrac{j}{N}P$. 另一方面

$$X_j^0\geq\gamma_j^0\Leftrightarrow\left(\frac{j}{N}-\tilde{\gamma}_j\right)q\geq\frac{j}{N}P\Leftrightarrow\frac{j}{N}(q-p)\geq\tilde{\gamma}_jq$$

上述不等式随 j 单调增加，右边随 j 单调减小，因此必有唯一的 S，使当 $j\geq S$ 时，$X_j^0\geq\gamma_j^0$. 由于对一切 $i<n$，$\mathrm{E}(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)>X_{n,i}$,故

$$\sigma=\inf\{K\geq 1:X_k\geq\gamma_k\}=\inf\{k\geq 1:x_k^0\geq\gamma_k^0\}=\inf\{k\geq s:W_k=0\} \tag{24}$$

（3）$q<1$ 时，由 S 的定义，可见对 $n\geqslant S$，

$$\pi_n=\left(\frac{n-q}{N}-\sum_{K=n+1}^{N-1}\frac{\pi_k}{k}\right)q \tag{25}$$

所以
$$\pi_n=\pi_{n+1}\cdot\frac{n+1-q}{n+1}-\frac{q}{N},\quad n\geq s. \tag{26}$$

解此差分方程，遂得

$$\pi_n=\frac{nq}{N(1-q)}\left[1-\prod_{K=n}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right)q\right] \tag{27}$$

于是
$$\begin{aligned} S&=\inf\left\{n\geq 1:\pi_n\geq\frac{n}{N}p\right\} \\ &=\inf\left\{n\geq 1:\prod_{K=n}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{K}\right)\leqslant\frac{q-p(1-q)}{q^2}\right\} \end{aligned}$$

$q=1$ 时，由(25)式可得

$$\pi_n=\frac{n}{N}\left(1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\right)$$

于是
$$S=\inf\{n\geq 1:\pi_n\geq\frac{n}{N}p\}=\inf\{n\geq r^*:1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\geq p\}$$

其中
$$r^*=\inf\{n\geq 0:1-\sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}=0\}.$$

（4）由(24)式获证。

（5）由(24)式，我们的最优规则是跳过最前面的 $S-1$ 个人，停在此后的第一个相对

最好者位置上，并招回录用相对最好者，也就是录用当前位置的人。如果录用受拒，则继续观察并采用 δ 来挑选秘书。拒聘后的最优规则 δ 是什么呢？

当 $\sigma=n$ 时，有 $\quad \widetilde{X}^n_{k,i}\triangleq\widetilde{X}^n_K|_{W_k=k-i}$， $\quad k=n+1, \cdots, N$

则显然，
$$\widetilde{X}^n_{k,i}=\begin{cases}X_{k,i}, & i\geq n+1\\ 0 & i\leqslant n\end{cases}$$
我们用 $\widetilde{\gamma}^n_k$ 表示相应于 $\widetilde{X}^n_k$ 的 γ 序列，则
$$\widetilde{\gamma}^n_{k,i}=\begin{cases}\gamma_{k,i}, & i\geq n+1\\ 0 & i\leqslant n\end{cases}$$
因为 $K\geqslant n+1>\sigma\geqslant S$，因此 δ 就是挑选每一个新的相对最好者。

如果 $q<1$，且对一切 $K\geqslant S$，$W_k\neq 0$，表明最好的姑娘在最前面的 $S-1$ 个人中。此时如 $S\geqslant 2$，则
$$V=\mathrm{E}X_\sigma=\sum_{K=S}^{N}\int_{\sigma=k}X_k+pP(W_k\neq 0,k\geq S)$$
$$=\sum_{k=s}^{N}\int_{W_s\neq 0,\cdots,W_{k-1}\neq 0,W_k=0}X_k^0+\frac{p(S-1)}{N}$$
$$=\sum_{K=s}^{N}X_k^0\cdot\frac{S-1}{k(k-1)}+\frac{p(S-1)}{N}$$
记 $H_k=\prod_{l=k}^{N-1}\left(1+\frac{p-q}{l}\right)$，由(27)，(21)及(13)式有
$$X_k^0=\frac{kq}{N}+\widetilde{\gamma}_k(1-q)=\frac{k}{N}-\frac{\pi_k(1-q)}{q}=\frac{K}{N}H_kq$$
又
$$H_k-1=\frac{K+1-q}{K}H_{k+1}-1$$
$$=\cdots=(1-q)\cdot\left(\sum_{j=K+1}^{N-1}\frac{H_j}{j-1}+\frac{1}{N-1}\right)$$
因此
$$\mathrm{E}X_\sigma=\sum_{K=s}^{N-1}\frac{s-1}{N}\cdot\frac{H_kq}{K-1}+\frac{(s-1)q}{N(N-1)}+\frac{p(s-1)}{N}$$
$$=\frac{(s-1)q}{N}\left(\frac{H_{s-1}-1}{1-q}-\frac{1}{N-1}\right)+\frac{(s-1)q}{N(N-1)}+\frac{(s-1)p}{N}$$
$$=\frac{(s-1)p}{N}+\frac{(s-1)q}{N}\frac{H_{s-1}-1}{1-q}\qquad\text{(22) 式得证}$$

而当 $S=1$ 时，$W_1=0$，$\sigma\equiv 1$，有
$$V=\mathrm{E}X_\sigma=X_1^0P(W_1=0)=\frac{1}{N}H_1q=\frac{q}{N}\prod_{K=1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right)$$
此即(21)式。

如果 $q=1$，$s=1$，则 $\quad V=\mathrm{E}X_\sigma=X_1^0P(W_1=0)=\frac{1}{N}$

如果 $q=1$，$s\geq 2$，则
$$V=\mathrm{E}X_\sigma=\sum_{k=s}^{N}X_k^0\frac{s-1}{k(k-1)}+\frac{(s-1)p}{N}$$

$$=\frac{s-1}{N}\sum_{k=s}^{N}\frac{1}{k-1}+\frac{(s-1)p}{N} \qquad \text{(定理证毕)}$$

定理 2 对于一般的招回概率系列$\{q(r)\}_{r=0}^{N-1}$,最优规则是直到全部候选人考察完再录用的充要条件是:对一切 $r\leqslant N-1$

$$\frac{q(r+1)}{q(r)}>\frac{N-1-q(0)}{N-1} \tag{28}$$

成立，此时录用到最好姑娘的概率是 $\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}q(r)$.

证明 必要性 由于此时 $\mathrm{E}(\gamma_N|W_{N-1}=N-1-i)>X_{N-1,i}$,从(12) ,(13)式可见

$$\frac{N-1}{N}q(N-i)>\frac{N-1-q(0)}{N}q(N-1-i),\quad i\leqslant N-1$$

此即(28)式。

充分性 用后退归纳法，如果(28)式成立，取 $r=N-1$，则(28)式表明 $\mathrm{E}(\gamma_N|W_{N-1}=N-1-i)>X_{N-1,i}$，$i\leqslant N-1$.

如果 $K=N-1$，$N-2$，…，$n+1$ 成立(28)式，即

$$\mathrm{E}(\gamma_{k+1}|W_k=k-i)>X_{k,i} \tag{29}$$

由(9) ,(12) ,(13)式 ,(29)式等价于

$$\sum_{j=k}^{N-1}\frac{1}{j(j+1)}\gamma_{j+1}^0>\frac{1}{N}\left(1-\frac{q(N-i)}{q(k-i)}\right) \tag{30}$$

对 $K=N-1$，…，$n+1$ 成立，为证它对 $k=n$ 时成立，只须证：

$$\frac{1}{n(n+1)}\gamma_{n+1}^0\geqslant\frac{1}{N}\left(\frac{q(N-i)}{q(n+1-i)}-\frac{q(N-i)}{q(n-i)}\right) \tag{31}$$

从(29)对 $n+1\leqslant k\leqslant N-1$ 成立，可知 $\pi_K=\frac{K}{N}q(N-k)$，可是

$$\gamma_{n+1}^0=\frac{q(0)}{N}+\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{\pi_k}{k}+\pi_{n+1}=\frac{q(0)}{N}+\sum_{k=n+1}^{N-1}\frac{q(N-k)}{N}+\frac{n+1}{N}q(N-n-1)$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)}\gamma_{n+1}^0&\geqslant\frac{1}{n(n+1)}q(N-n-1)\geqslant\frac{q(0)}{n(n+1)}\left(\frac{N-1-q(0)}{N-1}\right)^{N-n-1}\\&\geqslant\frac{q(0)}{n(n+1)}\cdot\frac{n}{N-1}\geqslant\frac{q(0)}{N(N+1)}\geqslant\frac{1}{N}\frac{q(N-i)}{q(n+1-i)}\cdot\frac{q(0)}{N-1}\\&\geqslant\frac{1}{N}\frac{q(N-i)}{q(n+1-i)}\left(1-\frac{q(n+1-i)}{q(n-i)}\right)\\&=\frac{q(N-i)}{N}\left(\frac{1}{q(n+1-i)}-\frac{1}{q(n-i)}\right)\end{aligned} \qquad \text{(证毕)}$$

定理 3 对于一般的招回概率系统$(q(r))_{r=0}^{N-1}$,$q=q(0)\leqslant1$,存在一个常数 $S=S(N,q,0)$(见定理 1)，最优规则是 S 前不停止。

如果 $\frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{N-1-q(0)}{N-1}$，$r\leqslant N-1$ (32)

令 $\tau=\inf\left\{n\geq s:\ \frac{q(r+1)}{q(r)}\leqslant\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}\right\}$ (33)

这里 $$b(n)=\begin{cases} q\prod_{K=n}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right), & q<1 \\ \sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}, & q=1 \end{cases} \tag{34}$$

那么若在 τ 前没有录取到，则最优规则应是从 τ 时开始依次录用每一个到来的相对最好者。

证明 由于

$$\mathrm{E}(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)-X_{n,i}=\frac{n}{n+1}\pi_{n+1}^{i}-\left(\frac{n}{N}-\tilde{\gamma}_n\right)q(n-i)$$

令 $S=\inf\left\{n\geq 1,\frac{n}{N}-\tilde{\gamma}_n\geq 0\right\}$，它是与基本事件 ω 无关的常数。在 S 前 $\mathrm{E}(\gamma_{n+1}|W_n=n-i)>X_{n,i}$，所以不应该停止。下面证明第二个结论：

(1) $0<q<1$. 将证明对一切 $\tau\leqslant k\leqslant N-1$，$i\leqslant k$，

$$X_{k,i}\geq\gamma_{k,i} \tag{35}$$

由后退归纳法，首先由(32)式，(35)式在 $k=N-1$ 时成立，如果对一切 $\tau<k=n+1$，$n+2$，…，$N-1$，$i\leqslant k$，有 $X_{k,i}\geq\gamma_{k,i}$，且 $\tilde{\gamma}_k=\frac{k(b(k)-q)}{N(1-q)}$，则

$$\pi_k^i=\left(\frac{k}{N}-\tilde{\gamma}_k\right)q(k-i) \qquad \gamma_k^0=X_k^0=\tilde{\gamma}_k+\left(\frac{k}{N}-\tilde{\gamma}_k\right)q=\frac{kb(k)}{N}$$

所以由式(8)

$$\tilde{\gamma}_{k-1}=\frac{1}{K}(\gamma_k^0+(k-1)\tilde{\gamma}_k)=\frac{(k-1)(b(k-1)-q)}{N(1-q)}$$

因而，$X_{k-1,i}-\gamma_{n-1,i}\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{k-1}{N}-\tilde{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geqslant\frac{k-1}{k}\pi_k^i=\left(\frac{k-1}{N}-\frac{k-1}{k}\tilde{\gamma}_k\right)q(k-i)$$

$$\Leftrightarrow\frac{q(k-i)}{q(k-1-i)}\leqslant\frac{1-b(k-1)}{1-b(k)} \tag{36}$$

易知 $\frac{1-b(k)}{1-b(k+1)}$ 对于 $K>\tau$ 是单调增的，所以对一切 $n\geq\tau$，

$$\frac{q(r+1)}{q(1)}\leqslant\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)} \tag{37}$$

于是，由(36)，(37)式可证得(35)式。

(2) $q=1$，若 $n\geq\tau$，则

$$\pi_n=\frac{n}{N}-\tilde{\gamma}_n,\gamma_n^0=\tilde{\gamma}_n+\pi_n=\frac{n}{N}$$

$$\tilde{\gamma}_n=\sum_{K=n+1}^{N}\frac{n}{k(k-1)}\cdot\frac{k}{N}=\frac{n}{N}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k-1} \tag{38}$$

注意到，如果 $X_{k,i}-\gamma_{k,i}\geq 0$，则

$$X_{k-1,i}-\gamma_{k-1,i}\geqslant 0\Leftrightarrow\left(\frac{k-1}{N}-\tilde{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geqslant\frac{k-1}{k}\pi_k^i$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{k-1}{N}-\tilde{\gamma}_{k-1}\right)q(k-1-i)\geq\left(\frac{k-1}{N}-\frac{k-1}{k}\tilde{\gamma}_k\right)q(k-i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{q(k-i)}{q(k-1-i)} \leqslant \frac{1-\sum_{j=k}^{N}\frac{1}{j-1}}{1-\sum_{j=k+1}^{N}\frac{1}{j-1}} = \frac{1-b(k-1)}{1-b(k)}$$

所以(35)式可类似证得。

易见 $S \leqslant \tau$. 所以

$$\tau = \inf\left\{n \geq s: \frac{q(r+1)}{q(r)} \leqslant \frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}\right\}$$

因为 $X_{n,i} \geq \gamma_{n,i}$，对一切 $n \geq \tau$. 因此 $\pi_n = \left(\frac{n}{N} - \tilde{\gamma}_n\right)q$，而且由 S 之定义，

$$S = \inf\left\{n \geq 1: \frac{n}{N} - \tilde{\gamma}_n \geq 0\right\}$$

$$= \inf\{n \geq 1: \pi_n \geq 0\} = s(N,q,0)$$

由于 $X_n^0 = X_{n,i}$，当停在 τ 时而遭拒绝时，应该继续观察并录用每个相对最好者。这可从下面的最优规则一般理论而知：

$$\sigma = \inf\{n \geq 1: X_n \geq \gamma_n\} = \inf\{n \geq s: X_n \geq \gamma_n\}$$

$$= \begin{cases} \inf\{\tau > n \geq s: X_n \geq \gamma_n\} \\ \tau, \text{当上述}\{\tau > n \geq s: X_n \geq \gamma_n\} = \phi\text{时} \end{cases}$$

3 算例

3.1 考虑 YANG[9]所讨论的情形

$q(0)=1$，则

(1) 当对一切 r，$\frac{q(r+1)}{q(r)} > \frac{N-2}{N-1}$时，最优规则是全部观察完后再录用最好者（招回），此时选到最好姑娘的概率是 $\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}q(j)$.

(2) 当对一切 r，$\frac{q(r+1)}{q(r)} \leqslant \frac{N-2}{N-1}$时，则在 S^* 前不应停止，这里

$$S^* = \inf\left\{n: \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{N-1} \leqslant 1\right\}$$

(3) 定理 3 中的

$$\tau = \inf\left\{n \geq s: \left(1 - \sum_{j=n+1}^{N}\frac{1}{j-1}\right) \Big/ \left(1\sum_{j=n+2}^{N}\frac{1}{j-1}\right) \geqslant \frac{q(r+1)}{q(r)}\right\}$$

3.2 $q(r)=qp^r$，$0<p<q<1$

由(33)式，$\tau = \inf\left\{n \geq 1: \frac{q(r+1)}{q(r)} \leqslant \frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}\right\}$

$$= \inf\left\{n \geq 1: p \leqslant \frac{1-q\prod_{k=n+1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right) \cdot \frac{n+1-q}{n}}{1-q\prod_{k=n+1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right)}\right\}$$

$$= \inf\left\{n \geq 1: \prod_{K=n+1}^{N-1}\left(1+\frac{1-q}{k}\right) \leqslant \left[q\left(1+\frac{1-q}{n(1-p)}\right)\right]^{-1}\right\}$$

此时，由于$\frac{q(r+1)}{q(r)}=p$，可见在τ之前，恒有$p>\frac{1-b(n)}{1-b(n+1)}$. 这表明$X_{n,i}<\gamma_{n,i}$，所以在$S$与$\tau$之间不必考虑录用。这时最优规则是跳过前$\tau-1$个候选人，并且在$\tau$时录用相对最好者，(不管它在哪个位置上)。如果受拒绝，则继续观察并依次录用每一个到来的相对最好者。此时最优停止σ的值

$$V=\mathrm{E}X_{\sigma}=\sum_{i=1}^{\tau}\frac{\tau}{N}q(\tau-i)P(W_{\tau}=\tau-i)+\sum_{i=1}^{\tau}(1-q(\tau-i))\tilde{\gamma}_{\tau}P(W_{\tau}=\tau-i)$$

据 $X_{\tau}^{0}=\frac{\tau}{N}H_{\tau}q$ 及 $X_{\tau}^{0}=\frac{\tau q}{N}+(1-q)\tilde{\gamma}_{\tau}$，有 $\tilde{\gamma}_{\tau}=\frac{\tau q}{N}\cdot\frac{H_{\tau}-1}{1-q}$.

于是 $V=\frac{q}{N}\frac{1-p^{\tau}}{1-p}+\left(\tau-q\frac{1-p^{\tau}}{1-p}\right)\frac{q}{N}\frac{H_{\tau}-1}{1-q}=\frac{q}{N}\left[\frac{1-p^{\tau}}{1-p}+\left(\tau-\frac{q(1-p^{\tau})}{1-p}\right)\frac{H_{\tau}-1}{1-q}\right]$.

参 考 文 献

1 Chow Y S, Robbins H and Siegmund D. Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton M: fflin Company, Boston. Massachasettes. 1971

2 Smith M H. A Secretary Problem with Uncertain Employment. J. Appl prob. 1975, 12: 620～624

3 金治明. 允许拒绝的秘书问题. 国防科技大学学报, 1986

4 金治明. 可拒绝的秘书问题. 应用概率与统计, 1986

5 Mark C K Yang. Recognizing the Maximum of a Sequence based on Relative Rank with Backward Solicitation. J. Appl. Prob, 1974, 11: 504～512

6 Joseph D. Petruccell. Best－choice Problem in Volving Uncertaining of Selection and Recall of Observation. J. Prob. 1981, 18: 415～425

7 Choe K L and Bal D S. A Secretary Problem with Backward Solicilation and Uncertain Employment. J. Appl. Prob. 20: 891～896

A Secretary Problem with Backward Solicitation

Jin Ziming Li Xiaojie

(Department of System Engineering and Applied Mathmatics)

Abstract

The secretary problem with backward solicitation has been studied by Yang, Joseph, Petrocceoi, Choe and Bal. The problem is put into snell frame, the relative rank y_k is replaced by the relatively best position function. Optimal stopping rules are obtained with differential probability of backward solicitation.

Key words probability, optimal, stopping rule, backward solicitation, secretary problem