

一类随机差分方程的解序列的最优停止规则

罗建书

(系统工程与应用数学系)

摘要 设报酬序列 $\{x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 满足随机差分方程 $x_{n+1} = x_n + a_n + b_n \epsilon_{n+1}$ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 为白噪声序列)。本文讨论了用有限情形 $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ 的 Snell 包逼近无限情形 $\{x_n, n \geq 0\}$ 的 Snell 包的条件, 得到了 $\bar{x}_n = E(x_n | \mathcal{F}_n^*)$ ($\mathcal{F}_n^* = \sigma(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \epsilon_0 = 0$) 的 Snell 包 $\bar{\gamma}_n$ 的分解形式和最优停时存在的条件。最后讨论了最优停止规则的迭代算法, 并得出了迭代过程在有限步停止的充分条件。

关键词 最优停止, 随机差分方程, Rasche 方法

分类号 O211

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的概率空间, $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是递增的 σ 代数族, 每个 $\mathcal{F}_n$ 关于 P 完备。设报酬序列 $\{x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是随机差分方程

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + a_n + b_n \epsilon_{n+1}, & n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = \xi_0 \end{cases} \quad (1)$$

的解, 其中 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 为 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ 适应的正态序列, $\epsilon_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots$ 且 $\xi_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 相互独立, $a_n(b_n)$ 为可积的 $\mathcal{F}_n$ ($\mathcal{F}_n^* = \sigma(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n), \epsilon_0 = 0$) 适应的随机序列。记 $\mathcal{T} = \{\tau, \tau \text{ 为 } \mathcal{F}_n \text{ 停时}, P(\tau < \infty) = 1\}$, $C_n = \{\tau \in \mathcal{T}, \tau \geq n \text{ 且 } E x_\tau < \infty\}$, $V_n = \sup_{\tau \in C_n} E x_\tau$, $\gamma_n = \text{ess sup}_{\tau \in C_n} E(x_\tau | \mathcal{F}_n)$ 。对于有限情形 $\{x_n, \mathcal{F}_n, 0 \leq n \leq N\}$, 记 $C_n^N = \{\tau \in C_n, \tau \leq N\}$, $\gamma_n^N = \text{ess sup}_{\tau \in C_n^N} E(x_\tau | \mathcal{F}_n)$, $V_n^N = \sup_{\tau \in C_n^N} E x_\tau$ 。易知 $\gamma_n^N \uparrow \gamma_n, V_n^N \uparrow V_n$ 。记 $\gamma'_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_n^N, V'_n = \lim_{N \rightarrow \infty} V_n^N$ 。本文证明了当 $E \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ (或存在可积随机变量 η , 使得 $E(\eta | \mathcal{F}_n) \geq |\sum_{k=0}^n a_k|, n = 0, 1, 2, \dots$) 及 $\sum_{k=0}^{\infty} (E b_k^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ 时, $\gamma'_n = \gamma_n, V'_n = V_n$ 。

让 $\bar{x}_n = E(x_n | \mathcal{F}_n^*)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 。记 $\mathcal{T}' = \{\tau, \tau \text{ 为 } \mathcal{F}_n^* \text{ 停时}, P(\tau < \infty) = 1\}$, $C'_n = \{\tau \in \mathcal{T}', E(\bar{x}_\tau) < \infty\}$, $\bar{\gamma}_n = \text{ess sup}_{\tau \in C'_n} E(\bar{x}_\tau | \mathcal{F}_n^*)$ 。易知, $\bar{\gamma}_n = \text{ess sup}_{\tau \in C'_n} E(x_\tau | \mathcal{F}_n^*)$ 。记 $\bar{V}_n = \sup_{\tau \in C'_n} E \bar{x}_\tau$ 。§1 证明了当 $E \sup_n x_n^+ < \infty$ 且 $E x_\infty < \infty$ ($x_\infty = \lim_n \sup x_n$) 时, 存在可积适应序

列 $\{\tilde{a}_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$ 与一致可积鞅 $\{m_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$, 使得 $\bar{y}_n = m_n + \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$, 且 $\sigma_n = \inf\{m \geq n, \bar{y}_m = \bar{x}_m\}$ 是 $\{x_n, n \geq 0\}$ 在 C_n^* 中的最优停时的充分必要条件是 对一切 $m \geq n+1$, 有 $1_{(\sigma_n \geq m)} \tilde{a}_m = 0$. a.s. § 2 讨论了最优停时 σ_n 的迭代算法.

1 Snell 包的性质与最优停止规则

易知, 方程(1)的解为

$$x_n = \xi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varepsilon_{k+1}, n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

从文[1]有

$\gamma_n = \max\{x_n, E(\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}$, $V_n = E \gamma_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 对每一个正整数 N , 由后退归纳法得

$\gamma_N^N = x_N$, $\gamma_n^N = \max\{x_n, E(\gamma_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}$, $n = N-1, N-2, \dots, 1, 0$; $E \gamma_n^N = V_n^N$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

令 $\gamma'_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_n^N$, $V'_n = \lim_{N \rightarrow \infty} V_n^N$. 利用文[1]中定理 4.3. 我们证明定理 1.

定理 1 设 $\{x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是(1)的解, 如果存在可积随机变量 η , 使得 $|\sum_{k=0}^n a_k| \leq E(\eta | \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 且 $\sum_{k=0}^{\infty} (E b_k^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, 则 $\gamma'_n = \gamma_n$, $V'_n = V_n$.

证明 只需证对任意 $\tau \in C_n$, 有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\{\tau > N\}} (\gamma'_n) \cdot p(d\omega) = 0$$

因 $\gamma'_n \geq \gamma_n^N \geq x_n$, 故 $(\gamma'_n) \leq x_n$, 从而只需证明对任意 $\tau \in C_0$, 有

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\tau > n\}} x_n p(d\omega) = 0 \quad (3)$$

记 $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \varepsilon_{k+1}$, 则 $x_n \leq |\xi_0| + A_n + B_n \leq |\xi_0| + E(\eta | \mathcal{F}_{n-1}) + B_n$. 由于 $\sum_{k=0}^{\infty} (E b_k^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$, 所以

$$\begin{aligned} & \limsup_{a \rightarrow \infty} \int_{\{|B_n| > a\}} |B_n| p(d\omega) \\ & \leq \limsup_{a \rightarrow \infty} \int_{\{|B_n| > a\}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (\int_{\{|B_n| > a\}} b_k^2 p(d\omega))^{\frac{1}{2}} (\int_{\{|B_n| \geq a\}} \varepsilon_{k+1}^2 p(d\omega))^{\frac{1}{2}} \right\} \\ & \leq \limsup_{a \rightarrow \infty} \int_{\{|B_n| \geq a\}} \left\{ \int_{\{|B_n| \geq a\}} \varepsilon_1^2 p(d\omega) \right\}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (E b_k^2)^{\frac{1}{2}} \Big\} = 0 \end{aligned}$$

从而 $\{B_n, n \geq 0\}$ 一致可积, 于是对 $\tau \in C_0$,

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau > n\}} x_n p(d\omega) & \leq \int_{\{\tau > n\}} (|\xi_0| + A_n + B_n) p(d\omega) \\ & \leq \int_{\{\tau > n\}} (|\xi_0| + \eta + B_n) p(d\omega) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

定理得证。

为了找出 $\{x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 的最优停时的特征, 我们先证下列定理。

定理 2 设 $E \sup_{n \geq 0} x_n^+ < \infty, E x_\infty < \infty$, 则存在一致可积鞅 $\{m_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$ 和可积的 $\mathcal{F}_n^*$ 适

应的随机序列 $\{\tilde{a}_n\}$, 使得 $\bar{y}_n = m_n + \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$, 且 $1_{\{\sigma_n > n\}} \tilde{a}_{n+1} = 0$ a.s., 这里 $\sigma_n = \inf\{m \geq n, \bar{y}_m = \bar{x}_m\}$.

证明 令 $\bar{x}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \bar{x}_n$, 则 $\bar{y}_\infty = \bar{x}_\infty$. 这里 $\bar{y}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \bar{y}_n$.

事实上, 首先由 $E \sup_{n \geq 0} x_n^+ < \infty$ 知, $E \sup_{n \geq 0} \bar{x}_n^+ < \infty$, 对每个正整数 m , 取 $n > m$, 则

$$\bar{y}_n = \text{ess sup}_{\tau \in C_n^*} E(\bar{x}_\tau | \mathcal{F}_n^*) \leq E(\sup_{k \geq n} \bar{x}_k | \mathcal{F}_n^*)$$

由鞅收敛定理得

$$\bar{y}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \bar{y}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup E(\sup_{k \geq n} \bar{x}_k | \mathcal{F}_n^*) = \sup_{k \geq n} \bar{x}_k, m = 1, 2, \dots$$

令 $m \rightarrow \infty, \bar{y}_\infty \leq \bar{x}_\infty$.

另一方面, 显然有 $\bar{x}_\infty \leq \bar{y}_\infty$, 故 $\bar{y}_\infty = \bar{x}_\infty$.

由于 $(\bar{x}_n)^- = E^-(x_n | \mathcal{F}_n^*) \leq E(x_n | \mathcal{F}_n^*)$, 故 $\bar{x}_\infty^- \leq E(x_\infty | \mathcal{F}_n^*)$, 从而 $E \bar{x}_\infty^- < \infty$. 又由 $E \sup_{n \geq 0} \bar{x}_n^+ < \infty$ 知, $E(\bar{x}_\infty)^+ < \infty$, 从而 $E|\bar{y}_\infty| = E|\bar{x}_\infty| < \infty$.

因为 $\{\bar{y}_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$ 是上鞅, 由上鞅的收敛性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y}_n = \bar{y}_\infty$ a.s. 且 $E(\bar{y}_\infty | \mathcal{F}_n^*) \leq \bar{y}_n, n = 0, 1, 2, \dots$. 令 $Z_n = \bar{y}_n - E(\bar{y}_\infty | \mathcal{F}_n^*) = \bar{y}_n - E(\bar{x}_\infty | \mathcal{F}_n^*)$, 则 $Z_n \geq 0$ 且 $E Z_n = E(\bar{y}_n - \bar{x}_\infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$. 由于 $\{E(\bar{x}_\infty | \mathcal{F}_n^*)\}$ 与 $\{E(\sup_{k \geq 0} \bar{x}_k^+ | \mathcal{F}_n^*)\}$ 一致可积, 且 $E(\bar{x}_\infty | \mathcal{F}_n^*) \leq \bar{y}_n \leq E(\sup_{k \geq 0} \bar{x}_k^+ | \mathcal{F}_n^*)$, 故 $\{Z_n\}$ 一致可积, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} E Z_n = 0, \{Z_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$ 为位势. 由 Doob-Meyer 分解定理, 存在唯一的零初值自然增过程 $\{\tilde{A}_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$, 使得 $Z_n = E(\tilde{A}_\infty | \mathcal{F}_n^*) - \tilde{A}_n$, 其中 $\tilde{A}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n$ 且 $E|\tilde{A}_\infty| < \infty$.

令 $\tilde{a}_0 = 0, \tilde{a}_n = -(\tilde{A}_n - \tilde{A}_{n-1})$, 则 $\tilde{a}_n \leq 0$ 且 $Z_n = E(\tilde{A}_\infty | \mathcal{F}_n^*) + \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$. 置 $m_n = E(\tilde{A}_\infty + \bar{x}_\infty | \mathcal{F}_n^*)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 因 $E|\bar{x}_\infty| < \infty$, 故 $\{m_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 0\}$ 为一致可积鞅. 可见 $\bar{y}_n = m_n + \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k$.

由文[4]定理 2.13 之推论 1 知, $\tilde{A}_0 = 0, \tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n = Z_n - E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n^*), n = 0, 1, 2, \dots$, 从而 $\tilde{a}_{n+1} = E(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n^*) - Z_n$. 易知 $\tilde{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{y}_k - E(\bar{y}_{k+1} | \mathcal{F}_k^*))$, 因此, 当 $\sigma_n > n$ 时, $\bar{y}_n > \bar{x}_n$, 于是 $\tilde{a}_{n+1} = E(\bar{y}_{n+1} | \mathcal{F}_n^*) - \bar{y}_n = E(\bar{y}_{n+1} | \mathcal{F}_n^*) - \max\{\bar{x}_n, E(\bar{y}_{n+1} | \mathcal{F}_n^*)\} = 0$, 从而 $1_{\{\sigma_n > n\}} \tilde{a}_{n+1} = 0$ a.s. 定理得证。

由定理 2, 可得出 σ_n 为最优停止规则 (有限停时) 的条件如下。

定理 3 设 $E \sup_{n \geq 0} x_n^+ < \infty$, 如果 $\sigma_n \in C_n^*$, 则 σ_n 是最优停止规则的充分必要条件是对于一切 $m > n$, 有 $1_{\{\sigma_n \geq m\}} \tilde{a}_m = 0$.

证明 先证充分性。由定理 2, 有

$$E(\bar{x}_{\sigma_n} - \bar{y}_n | \mathcal{F}_n^*) = E(\bar{y}_{\sigma_n} - \bar{y}_n | \mathcal{F}_n^*)$$

$$= E\left(\sum_{k=n+1}^{\sigma_n} \tilde{a}_k | \mathcal{F}_n^*\right) = E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 1_{\{\sigma_n \geq k\}} \tilde{a}_k | \mathcal{F}_n^*\right) = 0,$$

因此 $\bar{y}_n = E(\bar{x}_{\sigma_n} | \mathcal{F}_n^*)$, 由文[1]中定理 4.2 知, σ_n 是最优的。

再证必要性。若 σ_n 是 $\{\bar{x}_n, n \geq 0\}$ 的最优停止规则, 由文[1]中定理 4.2 知, $E(\bar{x}_{\sigma_n} | \mathcal{F}_n^*) = \bar{y}_n$. 由定理 2, $E\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} 1_{\{\sigma_n \geq m\}} \tilde{a}_m | \mathcal{F}_n^*\right) = E(\bar{x}_{\sigma_n} | \mathcal{F}_n^*) - \bar{y}_n = 0$, 从而 $E\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} 1_{\{\sigma_n \geq m\}} \tilde{a}_m\right) = 0$, 而 $\tilde{a}_m \leq 0$, 故对一切 $m > n, 1_{\{\sigma_n \geq m\}} \tilde{a}_m = 0$. (证毕)

2 最优停时的迭代计算

由 §1 定理 3 知, 当 $E \sup_{n \geq 0} x_n^+ < \infty$, $\sigma_n \in C_n^*$ 且对一切 $m > n, 1_{\{\sigma_n \geq m\}} \tilde{a}_m = 0$ 时, σ_n 是最优停止规则。但因 $\bar{y}_n$ 一般很难计算, 所以, 寻求直接利用 $\{\bar{x}_n, n \geq 0\}$ 计算 σ_n 的方法是很重要的。记

$$M(F) = \{C = (C_n)_{n \leq \infty}, C_n \in \mathcal{F}_n^*, C_\infty = \Omega\}$$

$$T(C) = \{\tau \in \mathcal{T}^e, \{\tau = n\} \subset C_n, \text{对一切 } n\}$$

$$\tau_n(C) = \inf\{k > n, 1_{C_k} = 1\}, \tau(C) = \tau_0(C)$$

对于 $C \in M(F)$, 定义

$$C_n^* = \{E(\bar{x}_{\tau_n(C)} | \mathcal{F}_n^*) \leq \bar{x}_n\} \cap C_n, C_\infty^* = \Omega$$

归纳地定义

$$C^0 = (\Omega)_{n \leq \infty}, C^k = (C^{k-1})^*, D_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_n^k, D = (D_n)_{n \leq \infty}$$

Rasche 证明了 (见文[2]): 若对每个停时列 $\sigma_n \uparrow n$, 有 $E \bar{x}_{\sup \sigma_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \bar{x}_{\sigma_n}$, 则 $\tau(D)$ 是最优停时。

本文证明了 $\tau(D)$ 与 σ_0 的下列关系:

定理 4 如果对所有上升的停时列 $\{\sigma_n\}$, 有 $E \bar{x}_{\sup \sigma_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \bar{x}_{\sigma_n}$ 且 $E \sup_{n \geq 0} x_n^+ < \infty$, 则 $\tau(D) = \sigma_0$.

证明 由 Rasche 的上述结果知, 最优停时是存在的。从文[1]定理 4.2 知, $\sigma_0 \in C_0^*$ 且 σ_0 是最优停止规则。由文 [3] 定理 2.11.5 与 2.11.6 知, σ_0 是最小的最优停止规则。从而 $\tau(D) \geq \sigma_0$.

因 $\tau(D) = \inf\{k > 0, \omega \in D_k\} = \inf\{k > 0, \omega \in C_k^j, j = 0, 1, 2, \dots\} = \inf\{k > 0, E(\bar{x}_{\tau_k(C^{j-1})} | \mathcal{F}_k^*) \leq \bar{x}_k, j = 1, 2, \dots\}$, 而 $\sigma_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n 1_{\{\sigma_0 = n\}}$, 记 $A_n = \{\sigma_0 = n\}$ 。在 A_n 上, $\bar{y}_n = \bar{x}_n$, 而 $\tau_n(C^{j-1}) \geq n+1, j = 1, 2, \dots$, 故

$$1_{A_n} E(\bar{x}_{\tau_n(C^{j-1})} | \mathcal{F}_n^*) \leq 1_{A_n} \bar{y}_n = 1_{A_n} \bar{x}_n, \quad j = 1, 2, \dots.$$

故在 A_n 上, $\tau(D) \leq n$, 因此, $\tau(D) \leq \sigma_0$. (证毕)

因定理 4 中的 $\tau(D)$ 是直接利用 $\{\bar{x}_n, n \geq 0\}$ 作迭代计算而得出的, 又 $\tau(D) = \sigma_0$, 故给计算最优停时 σ_0 带来方便。下面的定理 5, 我们给出了这种迭代计算在有限步停止的一个充分条件。

定理 5 在 §1 定理 1 的条件下, 若 $\bar{a}_n = E(a_n | \mathcal{F}_n^*)$ 单调下降, 且 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \{\bar{a}_n \leq 0\} = \Omega$, 则 $C_n^1 = C_n^2 = \dots$, $\tau(D) = \tau(C^1)$ 为 $\{x_n\}$ 在 C_0^* 中的最优停时。

先证引理。

引理 在 §1 定理 1 的条件下, 设递增的停时列 $\{\sigma_n\}$ 满足 $\sup_n \sigma_n = \sigma < \infty$ a.s., 则 $E\bar{x}_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} E\bar{x}_{\sigma_n}$ 。

证明 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma < \infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1_{\{\sigma_n = k\}} = 1_{\{\sigma = k\}}$ 。注意到 $E\bar{x}_{\sigma_n} = \sum_{k=0}^{\infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}})$, 而

$$E|\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}}| \leq E|\xi_0|P(\sigma_n = k) + E|\eta 1_{\{\sigma_n = k\}}| + E\left|\sum_{j=0}^{k-1} b_j \varepsilon_{j+1} 1_{\{\sigma_n = k\}}\right|$$

于是

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}})\right| \leq E|\xi_0|P(\sigma_n \geq m) + E|\eta 1_{\{\sigma_n \geq m\}}| + E(\varepsilon_1^2 1_{\{\sigma_n \geq m\}}) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (Eb_j^2)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\sigma_n \uparrow \sigma < \infty$, 故 $\{\sigma_n \geq m\} \subset \{\sigma \geq m\}$, 而 $P(\sigma \geq m) \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$, 故对 n 一致地有

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}})\right| \leq E|\xi_0|P(\sigma \geq m) + E|\eta 1_{\{\sigma \geq m\}}| + E(\varepsilon_1^2 1_{\{\sigma \geq m\}}) \sum_{j=0}^{\infty} (Eb_j^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} E\bar{x}_{\sigma_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}}) \right\}$ 。易知 $\{E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}})\}$ 关于 n 一致可积, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\bar{x}_{\sigma_n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}}) \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_k 1_{\{\sigma_n = k\}} \right) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} E(\bar{x}_k 1_{\{\sigma = k\}}) = E\bar{x}_\sigma. \end{aligned}$$

定理 5 证明 由上述引理知, 对所有使得 $\sup_n \sigma_n = \sigma < \infty$ 的上升停时列 $\{\sigma_n\}$, 有 $E\bar{x}_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} E\bar{x}_{\sigma_n}$ 。从文[2]定理 2.1 之注, $\tau(D)$ 是最优停时。

因为 $C_n^0 = \Omega$, 故 $\tau_n(C^0) = n+1$, 从而

$$C_n^1 = (C_n^0)^* = \{E(\bar{x}_{n+1} | \mathcal{F}_n^*) \leq \bar{x}_n\} \cap C_n^0 = \{\bar{a}_n \leq 0\}$$

$$\tau_n(C^1) = \inf\{k > n, \bar{a}_k \leq 0\} > n, n = 0, 1, 2, \dots$$

由 $\sum_{j=0}^{\infty} (Eb_j^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ 知, $\{\bar{B}_n, \mathcal{F}_n^*, n \geq 1\}$ ($\bar{B}_n = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \varepsilon_{k+1}\right), n = 1, 2, \dots$) 是一致可积

鞅。由 Doob 停时定理, $E(\bar{B}_{\tau_n(C^1)} | \mathcal{F}_n^*) = \bar{B}_n$ 。于是, 由 $\{\bar{a}_n\}$ 单调下降知

$$C_n^2 = (C_n^1)^* = \{E(\bar{x}_{\tau_n(C^1)} | \mathcal{F}_n^*) \leq \bar{x}_n\} \cap C_n^1$$

$$= \left\{ E\left(\sum_{k=n}^{\tau_n(C^1)} \bar{a}_k | \mathcal{F}_n^* \right) \leq 0 \right\} \cap \{\bar{a}_n \leq 0\}$$

$$= \{\bar{a}_n \leq 0\} = C_n^1, n = 0, 1, 2, \dots$$

同理可知, $C_n^2 = C_n^3 = \dots$ 。所以 $D_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_n^k = C_n^1, D = C^1, \tau(D) = \tau(C^1)$ 。(证毕)

由定理 4 知, 如果 $\{x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 满足定理 5 的条件, 则 $\sigma_0 = \inf\{n \geq 0, \bar{a}_n \leq 0\}$ 是最优停时。

参 考 文 献

- 1 Chow Y S, Robbins H and Siegmund D: 何声武, 汪振鹏译. 最优停止理论. 上海科学技术出版社, 1983
- 2 Irle A. On the Best Choice Problem with Random Population Size. Z. O. R., 1980, 24: 177~190
- 3 Kopp P E. Martingales and Stochastic Integrals. Cambridge University Press, 1984
- 4 Liptser R Sh and Shirayey A N: 张维国译. 随机过程统计. 宇航出版社, 1987

On Optimal Stopping Rules for Solutions of a Class of Stochastic Difference Equations

Luo Jianshu

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

Payoff sequence $(x_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0)$ satisfy the stochastic difference equation $x_{n+1} = x_n + a_n + b_n \epsilon_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, where ϵ_i , $i = 1, 2, \dots$, is a white noise sequence. In this paper, we discussed the condition for Snell's envelope of $(x_n, n \geq 0)$ to be approached by using Snell's envelope of finite sequence $(x_n, 0 \leq n \leq N)$. We have obtained the decomposable representations of Snell's envelope of $\bar{x}_n = E(x_n | \mathcal{F}_n^e)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, where $\mathcal{F}_n^e = \sigma(\epsilon_i, i = 0, 1, 2, \dots, n)$, $\epsilon_0 = 0$. It is proposed that the necessary and sufficient condition for $\sigma_n = \inf (m \geq n, \bar{r}_m = \bar{x}_m)$ is optimal stopping. At last, we discussed the iterative algorithm for optimal stopping rules and obtained the sufficient condition under which the iterative process can be stopped in finite steps.

Key words optimal stopping, stochastic difference equation, Rasche method

中国电子工业总公司

中国电子工业总公司拥有机电部原直属电子企事业单位、原电子部重点军工企业和骨干企业。其具备生产、科研、建设、销售、外贸、金融、教育和服务的功能。其科学技术力量强大, 所属研究所有 3 万多科研技术人员, 所属大中企业有 4 万多工程技术人员。

中国电子工业总公司职能机构有: 办公厅、计划局、生产局、科技质量局、军工局、系统工程局等。现总经理张学东、副总经理王金城、吕新奎。

中国电子工业总公司是中国电子工业的“国家队”。