国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第1期 1992年3月 Vol. 14 No. 1

整数线性规划问题的一个新算法

谢 政

（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文给出求解整数线性规划问题的一个算法。基本思想是通过求出其伴随线性规划问题的最优单纯形表，把整数线性规划化成正整数系数的不定方程，然后从不定方程的非负整数解集中选取一组满足整数线性规划的约束条件的解，作为整数线性规划的最优解。

关键词 运筹学，算法，数论，整数线性规划，线性规划，单纯形表，不定方程

分类号 O221.4

整数规划的应用已扩展到许多领域。研究整数规划的解法，既有理论意义也有实用价值。本文给出求解整数线性规划的一个算法，其基本思想是利用整数线性规划与数论中一次不定方程组的关系，把整数线性规划化成较简单的正整数系数的不定方程，再从不定方程的非负整数解集中寻求整数线性规划的最优解。

1 整数线性规划与线性规划

考虑整数线性规划问题

$$\max x_0=CX$$
$$\begin{cases}AX=b\\ X\geq 0\ \text{整数}\end{cases}\tag{1}$$

其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 为 n 维行向量，b 为 m 维列向量，X 为 n 维列向量，A 的秩为 m，并且式(1)中所有数据均为整数。

记 $S=\{X|AX=b,\ X\geq 0\ \text{整数}\}$，$T=\{X|AX=b,\ X\geq 0\}$，则(1)式的伴随线性规划问题为

$$\max_{X\in T} x_0=CX\tag{2}$$

设 B 是 A 的 m 阶非奇异子矩阵，则(2)式化为

$$\max x_0=C_BB^{-1}b-(C_BB^{-1}N-C_N)X_N$$
$$\begin{cases}X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N\\ X_B,X_N\geq 0\end{cases}\tag{3}$$

这里 X_B 为基变量组成的 m 维列向量，X_N 为非基变量组成的 $(n-m)$ 维列向量；令 R 为 X_N 的下标集，N 为 A 中对应于 R 的那些列向量构成的子矩阵；C_B 和 C_N 是 C 中分别对应于基变量和非基变量的那些分量组成的向量。

记 $A=(a_1,\cdots,a_n)$，$D=|\det B|$. 因 A 和 b 中元素均为整数，所以 D 为正整数，且 B^{-1}

* 1991年3月16日收稿 1991年8月31日收修改稿

b 和 $B^{-1}a_j$ 的第 i 个分量可分别写成 α_i/D 和 β_{ij}/D 的形式，$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$.

定理 1 问题(1)与问题(2)有如下关系：

1) 若问题(2)无可行解，则问题(1)亦无可行解。

2) 若问题(2)有最优解，则问题(1)或者无可行解或者有最优解。

3) 若问题(2)有可行解，但目标函数在 T 上无上界，则问题(1)或者无可行解或者目标函数在 S 上无上界。

证明 因为 $S\subseteq T$，所以 1)、2)显然成立。

下面证明 3).

由假设知，问题(2)有可行解，但 x_0 在 T 上无上界，对问题(2)使用单纯形法可知：存在非奇异矩阵 B 和 $r\in R$，使得

$$B^{-1}b\geqslant 0,\ C_BB^{-1}a_r-c_r<0, B^{-1}a_r\leq 0$$

如若 (1) 问题有可行解 X^*，由(3)式知 $X_B^*=B^{-1}b-B^{-1}NX_N^*$，记 $x_0^*=C_BB^{-1}b-(C_BB^{-1}N-C_N)X_N^*$，则

$$x_0=x_0^*+(C_BB^{-1}N-C_N)(X_N^*-X_N)$$

$$X_B=X_B^*+B^{-1}N(X_N^*-X_N)$$

于是，对一切正整数 k，有

$$\bar{x}_j=x_j^*,\ j\in R\backslash\{r\}$$

$$\bar{x}_r=x_r^*+kD,\ \overline{X}B=X_B^*-kDB^{-1}a_r$$

为问题(1)的可行解，这里 $D=|\det B|>0$，且

$$\bar{x}_0=x_0^*-(C_BB^{-1}a_r-c_r)kD\to+\infty(k\to+\infty)$$

即 x_0 在 S 上无上界。 （证毕）

定理 2 若 $S\neq\phi$，则 S 有界当且仅当 T 有界。

证明 因 $S\subseteq T$，故若 T 有界，则 S 有界。

假设 $S\neq\phi$. 若 T 无界，则函数 $z=x_1+\cdots+x_n$，在 T 上必无上界。这是因为，由于 T 无界，故对任意正整数 K，总存在 $X'\in T$，使 $X'\leqslant(K,\cdots,K)^T$ 不成立，即存在 $1\leq k\leq n$，使 $x_k'>K$. 所以，$z'=x_1'+\cdots+x_n'\geq x_k'>K$.

由于 $S\neq\phi$，z 在 T 上无上界，根据定理 1 之 3)，z 在 S 上无上界，从而 S 无界。(证毕)

2 算 法

设问题(2)有最优解，则根据单纯形法或对偶单纯形法可得到问题(2)的最优解 X^0 及最优基 B，使 $B^{-1}b\geq 0$，$C_BB^{-1}N-C_N\geq 0$.

如果问题(2)的最优解 $X^0\in S$，则 X^0 为(1)式的最优解。

假设 $X^0\notin S$. 注意到 c_j 是整数($j=1,\cdots,n$)，故若(1)式有最优解，则其最优目标函数值（简称最优值）必为整数。据此，我们首先试探问题(1)是否有目标函数值（简称目标值）为[$C_BB^{-1}b$]的可行解(这里[$C_BB^{-1}b$]是指不大于 $C_BB^{-1}b$ 的最大整数)，为此构造方程组

$$\begin{cases} (C_BB^{-1}N - C_N)X_N = C_BB^{-1}b - [C_BB^{-1}b] \\ X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq 0 \text{ 整数} \end{cases} \tag{4}$$

若式(4)有解，则它就是问题(1)的最优解，且最优值为$[C_BB^{-1}b]$. 若式(4)无解，则(1)不存在目标值为$[C_BB^{-1}b]$的可行解。再试探(1)是否有目标值为$[C_BB^{-1}b]-1$的可行解，为此构造方程组

$$\begin{cases} (C_BB^{-1}N - C_N)X_N = C_BB^{-1}b - [C_BB^{-1}b] + 1 \\ X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_N, X_B \geq 0 \text{ 整数} \end{cases} \tag{5}$$

若式(5)有解，则它就是(1)的最优解，最优值为$[C_BB^{-1}b]-1$；否则，再试探(1)是否有目标值为$[C_BB^{-1}b]-2$的可行解。如此重复下去，若第$k-1$次构造的方程组有解，则它即为(1)的最优解，最优值为$[C_BB^{-1}b]-k+1$；否则，构造方程组

$$\begin{cases} (C_BB^{-1}N - C_N)X_N = C_BB^{-1}b - [C_BB^{-1}b] + k \\ X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \\ X_B, X_N \geq 0 \text{ 整数} \end{cases} \tag{6}$$

综上所述，并利用定理1可得到求解整数线性规划(1)的一个算法。

step0 用单纯形法或对偶单纯形法求解(2)，若(2)无最优解，则(1)无最优解；否则，设B为(2)的最优基，根据(2)的最优单纯形表可得到式(3)，转step1.

step1 若$B^{-1}b$的每个分量均为整数，则$X_B^*=B^{-1}b$，$X_N^*=0$为(1)的最优解；否则，令$k=0$，转step2.

step2 求解方程(6)，若(6)有解X_B^*，X_N^*，转step3；否则，置$k=k+1$，重复step2.

step3 结束。X_B^*，X_N^*为(1)的最优解，最优值为$[C_BB^{-1}b]-k$.

3 算法的有限性

因为使用单纯形法或对偶单纯形法可在有限步求出(2)的最优解或判断(2)无最优解，所以，若(2)无最优解，则上述算法必在有限步结束。下面假设(2)有最优解。

首先讨论方程组(6)的解法。为此考虑

$$(C_BB^{-1}N - C_N)X_N = C_BB^{-1}b - [C_BB^{-1}b] + k, \quad X_N \geq 0 \text{ 整数} \tag{7}$$

若(7)无解，则(6)无解；若(7)存在一个解X_N^*满足

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N, \quad X_B \geq 0 \text{ 整数} \tag{8}$$

则$X_B^*=B^{-1}b-B^{-1}NX_N^*$，$X_N^*$是(6)的解；若(7)的任何解$X_N$都不满足(8)，则(6)无解。

为了求解(7)，我们对它进行简化。把(7)中第一个式子两端同乘以正整数$|\det B|$，然后提出公因子，记$\hat{R}=\{j|C_BB^{-1}a_j-c_j=0, j\in R\}$，再把下标属于$\hat{R}$的$x_j$项删去，于是得到一次不定方程

$$\sum_{j\in R\backslash\hat{R}} \lambda_j x_j = \omega \tag{9}$$

因为$C_BB^{-1}b-[C_BB^{-1}b]+k\geqslant 0$，$C_BB^{-1}N-C_N\geqslant 0$，故$\omega\geq 0$，$\{\lambda_j|j\in R\backslash\hat{R}\}$中所有$\lambda_j$均是正整数并且是互质的。

易知，如果ω不是整数，则(9)无非负整数解；如果$\omega>0$，且对一切$j\in R\backslash\hat{R}$，$\lambda_j>$

ω，则(9)无非负整数解。

不妨设 $R\backslash\hat{R}=\{1, \cdots, t\}$，$t\geq 3$，则(9)化成

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=\omega-\sum_{j=3}^{t}\lambda_j x_j \tag{10}$$

在式(10)中依次令 $x_j=0,1,\cdots,[\omega/\lambda_j](j=3,\cdots,t)$，并求出式(10)的全部非负整数解，可以得到(9)式的所有非负整数解或者判定(9)式无非负整数解。因此，经过有限次计算就可得到(7)式的解集或者判定(7)式无解。

再讨论算法的有限性。分两种情况讨论：

(1) S 有界，即存在非负整数向量$(u_1,\cdots,u_n)^T$，使得对一切$(x_1,\cdots,x_n)^T\in S$，有 $0\leq x_j\leq u_j$，$j=1, \cdots, n$.

由于 S 有界，所以，若式(7)有解，则只有有限个解，因此，经过有限次计算，可以求出(6)式的解或判定(6)式无解。

令 $R^-=\{j|C_j<0, j=1,\cdots,n\}$，

$$L=\begin{cases}0, & \text{若 } R^-=\phi\\ \sum\limits_{j\in R^-}C_j u_j, & \text{若 } R^-\neq\phi\end{cases}$$

则 $L\leq x_0\leq[C_B B^{-1}b]-k$，从而 $k\leq[C_B B^{-1}b]-L$，即算法中 step2 最多循环$[C_B B^{-1}b]-L$ 次.

(2) S 无界，设 $X^0\in S$，则算法中 step2 最多循环$[C_B B^{-1}b]-CX^0$ 次。

当 $\hat{R}=\phi$ 时，显然，若式(7)有解，则只有有限个解，所以，经过有限次计算，可求出(6)式的解或判定(6)式无解。

当 $\hat{R}\neq\phi$ 时，若式(7)有解，则 $x_r(r\in\hat{R})$ 可取任何非负整数，因而(7)式有无限多个解。此时不能保证在有限步求出式(6)的解或判定式(6)无解。

综上所述，若 S 有界或 $\hat{R}=\phi$，则算法经过有限步可求出(1)的最优解或判定(1)无最优解。

4 算例

例 求解下列整数线性规划问题

$$\max x_0=3x_1+5x_2+4x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+6x_2+3x_3+x_4=8\\ 5x_1+4x_2+4x_3+x_5=7\\ 6x_1+x_2+x_3+x_6=12\\ x_1,\cdots,x_6\geq 0 \text{ 整数}\end{cases} \tag{11}$$

解 先求解式(11)的伴随线性规划问题，得最优单纯形表（表 1）。

表 1

		$-x_1$	$-x_4$	$-x_5$
x_0	$\frac{95}{12}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
x_2	$\frac{11}{12}$	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
x_3	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
x_6	$\frac{41}{4}$	$\frac{19}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$

伴随线性规划问题的最优解为 $x_1=0$，$x_2=\frac{11}{12}$，$x_3=\frac{5}{6}$，$x_4=0$，$x_5=0$，$x_6=\frac{41}{4}$；$x_0=\frac{95}{12}$. 这不是式(11)的可行解。由表 1 知：

$$x_0 = \frac{95}{12} - \frac{17}{12}x_1 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{3}{4}x_5 \tag{12}$$

$$x_2 = \frac{11}{12} + \frac{7}{12}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \tag{13}$$

$$x_3 = \frac{5}{6} - \frac{11}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \tag{14}$$

$$x_6 = \frac{41}{4} - \frac{19}{4}x_1 \qquad + \frac{1}{4}x_5 \tag{15}$$

判定式(11)是否有目标值为[95/12]=7 的可行解,为此令 $x_0=7$,由式(12)即有

$$17x_1 + 4x_4 + 9x_5 = 11 \tag{16}$$

式(16)无非负整数解。

再判定式(11)是否有目标值为 6 的可行解,即令 $x_0=6$,由式(12)有

$$17x_1 + 4x_4 + 9x_5 = 23 \tag{17}$$

式(17)亦无非负整数解。

试探工(11)是否有目标值为 5 的可行解,为此令 $x_0=5$,由式(12)得

$$17x_1 + 4x_4 + 9x_5 = 35 \tag{18}$$

式(18)有两组非负整数解 $x_1=1$,$x_4=0$,$x_5=2$ 和 $x_1=0$,$x_4=2$,$x_5=3$.

把 $x_1=1$,$x_4=0$,$x_5=2$ 代入式(13)、(14)和(15)得 $x_2=2$,$x_3=-2$,$x_6=6$,但$(x_1,\cdots,x_6)=(1,2,-2,0,2,6)$不是(11)的可行解。

把 $x_1=0$,$x_4=2$,$x_5=3$ 代入式(13)、(14)和(15)得 $x_2=1$,$x_3=0$,$x_6=11$,得到了式(11)的最优解$(x_1,\cdots,x_6)=(0,1,0,2,3,11)$,最优值为 5.

参 考 文 献

1 Garfinkel R S and Nemhauser G L. Integer Programming. New York: John Wiley & Sons, 1972

2 华罗庚. 数论导引. 北京:科学出版社,1957

A New Algorithm for Solving the Problem of Integer Linear Programming (ILP)

Xie Zheng

(Department of system Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

An algorithm for soving ILP problems is given in this paper. According to the optimal simplex tableau of the associate LP, we transform ILP into an indeterminate equation with positive integer coefficients. We then choose a solution, which satisfies the constraint conditions of ILP, from the nonnegative integer solution set of the indeterminate equation as an optimal solution of ILP.

Key words operations reserach, algorithms, number theory; integer linear programming (ILP), linear programming (LP), simplex tableaus, indeterminate equations