国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第1期 1992年3月 Vol. 14 No. 1

实二次函数域基本单位范的判别法

李 超

（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文给出实二次函数域基本单位范为 g(g 为 F_q^* 中本原元)的充分条件，从而解决了一批实二次函数域基本单位范的问题。

关键词 实二次函数域，自共轭理想

分类号 O153

二次函数域 K 是指有理函数域 $k=F_q(t)$，($q=p^a, a\geq 1, p$ 为素数，$2\nmid q$)的二次扩域。即存在 $D(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\in F_q[t]$，其中 $D(t)$ 无平方因子，并且 $\mathrm{sgn}D(t)=a_n\neq 0$，使 $K=k(\sqrt{D(t)})$。如果满足 $2|\deg D(t)$，$\mathrm{sgn}D(t)=1$，则称 K 为实二次函数域。

记 O_k，U_k，W_k 分别表示 K 的整数环、单位群和单位根群，则由 Dirichlet 单位定理，当 K 为实二次函数域时，$U_k=F_q^*\times(\varepsilon)$，其中 ε 为 K 的基本单位，并且 $N(\varepsilon)=1$ 或 $N(\varepsilon)=g$. 这里 $N(\varepsilon)$ 表示 ε 的范。实二次函数域 K 的基本单位的范何时为 1，何时为 g? 这是数论中一个重要问题。因为 Pell 方程 $X^2-DY^2=1$，(或者 $X^2-DY^2=g$) 在 $F_q[t]$ 中的解同实二次函数域基本单位范有密切联系，若给定了基本单位的范，我们便可决定 Pell 方程的解，(详见文[1])。1924年，E. Artin 在文[2]中给出了实二次函数域基本单位范为 1 和 g 的两个充分条件，即引理 1 和引理 2. H. F Trotter 在文[3]中讨论了实二次数域 $Q(\sqrt{d})$($d>0$ 为无平方因子的整数)的基本单位的范，给出了其基本单位范为 -1 的充分条件。我们将它推广到二次函数域中，从而给出实二次函数域基本单位范的一些新的判别法。

1 判别法

首先我们给出 E. Artin 的两个判别法：

引理 1 设 $K=k(\sqrt{D(t)})$，$2|\deg D(t)$，$\mathrm{sgn}D(t)=1$，若 $D(t)$ 为不可约多项式，则 $N(\varepsilon)=g$.

引理 2 设 $K=k(\sqrt{D(t)})$，$2|\deg D(t)$，$\mathrm{sgn}D(t)=1$，若 $D(t)$ 有奇次不可约因子，则 $N(\varepsilon)=1$.

上面两个引理证明可参见文[1]和[2].

* 1990年10月15日收稿，1991年5月13日收修改稿

引理 1 和引理 2 对于 $D(t)$ 为不可约多项式，或 $D(t)$ 有奇次不可约因式，已决定了 $K=k(\sqrt{D(t)})$ 的基本单位的范。但对于 $D(t)=p_1(t)\cdots p_s(t)$，$s\geq 2$，且 $p_i(x)$ 均为偶数次不可约多项式，不能决定 $K=k(\sqrt{D(t)})$ 的基本单位的范，下面讨论这种情形。有以下定理：

定理 设 $D(t)=p_1(t)p_2(t)\cdots p_s(t)$，$s\geq 2$，$p_i(t)$ 均为偶数次不可约因子，且两两互素，则下列条件等价：

(1) $N(\varepsilon)=g$.

(2) 对 $D(t)$ 的每个非平凡因子 $R(t)$，$(R(t), \sqrt{D(t)})$ 均不为主理想。

(3) 对于每一对多项式 $R(t), S(t)\in F_q[t]$，$R(t)\cdot S(t)=D(t)$，且 $R(t)\cdot S(t)\neq\pm 1$，$R(t)X^2-S(t)Y^2=1$ 在 $F_q[t]$ 中没有解。

证明

1) 证条件(2)⇔条件(3)

由于 $p_i(t)\mid D(t)$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $p_i(t)$ 在 O_k 中完全分歧，即 $p_i(t)=(p_i(t), \sqrt{D(t)})^2$，从而 $N(p_i(t), \sqrt{D(t)})=p_i(t)$，并且 $(p_i(t), \sqrt{D(t)})$ 为自共轭理想，并且是唯一范为 $p_i(t)$ 的理想。所以对 $D(t)$ 的每个因子 $R(t)$，$(R(t), \sqrt{D(t)})$ 均为自共轭理想，并且是唯一范为 $R(t)$ 的理想。

如果 $(R(t), \sqrt{D(t)})$ 为主理想，即存在 $\beta\in O_k$，使

$$(R(t), \sqrt{D(t)}) = \beta O_k$$

则

$$N(\beta) = \beta\bar{\beta} = R(t)$$

于是 $U^2-D(t)V^2=R(t)$ 在 $F_q[t]$ 中有解。反之亦然。

再证 $U^2-D(t)V^2=R(t)$ 与 $R(t)X^2-S(t)Y^2=1$ 等价。

事实上，对 $R(t)X^2-S(t)Y^2=1$ 的任一解 $A, B\in F_q[t]$. 令 $U=RA$，$V=B$，则 (U, V) 为 $U^2-D(t)V^2=R(t)$ 的解。

反之，对于 $U^2-D(t)V^2=R(t)$ 的任意解 (U,V)，因为 $R(t)\mid D(t)$，所以 $R(t)\mid U^2$，又 $R(t)$ 无平方因子，故 $R(t)\mid U$.

令 $X=\dfrac{U}{R(t)}$，$Y=V$，则 $\left(\dfrac{U}{R(t)}, V\right)$ 为 $R(t)X^2-S(t)Y^2=1$ 的解。

所以，$(R(t), \sqrt{D(t)})$ 为主理想⇔$R(t)X^2-S(t)Y^2=1$ 在 $F_q[t]$ 中有解。

2) 证：条件(1)⇔条件(2)

先证：(1)⇒(2) （反证）

若 $(R(t), \sqrt{D(t)})$ 为主理想 (β)，$\beta\in O_k$，由于 $(R(t), \sqrt{D(t)})$ 为自共轭理想，故 $(\bar{\beta})=(\beta)$。从而 $\bar{\beta}=\eta\beta$，其中 $\eta\in U_k$.

又因为 $N(\beta)=N(\bar{\beta})$，于是 $\eta\bar{\eta}=1$，即 $N(\eta)=1$. 但 $\eta=\varepsilon^m$，$m\in N$.

由(1)知，$N(\varepsilon)=g$，所以 m 必为偶数。即存在 $\delta\in U_k$，使 $\eta=\pm\delta^2$。

从而推出：$R(t)$ 为 O_k 中完全平方。所以 $R(t)=1$ 或 $R(t)=D(t)$.

这与 $R(t)$ 为非平凡因子矛盾。

所以对 $D(t)$ 的任意非平凡因子 $R(t)$，必有 $(R(t), \sqrt{D(t)}$ 不为主理想。

再证：(2)⇒(1)(反证)

若 $N(\varepsilon)=1$，则由 Hilbert 的定理 90，存在 $\beta=1+\varepsilon\in O_k$，使 $\varepsilon=\beta/\bar{\beta}$，即 $\bar{\beta}=\varepsilon\beta$.

从而 (β) 为 amibigious ideal，也就是$(\beta)=A\rho_1\rho_2\cdots\rho_l$，$l\geq1$，$\rho_i$ 为 O_k 中完全分歧的素理想，$A\in F_q[t]$，而 O_k 中只有$(p_i(t),\sqrt{D(t)})$为完全分歧的素理想，故 ρ_i 一定为某个$(p_i(t),\sqrt{D(t)})$。所以

$$(\beta)=A\prod_{j=1}^{l}(p_{ij}(t),\sqrt{D(t)})=(R(t),\sqrt{D(t)})$$

其中
$$p_{ij}(t)\in\{p_1(t),\cdots p_s(t)\},j=1,2,\cdots,l;R(t)\mid D(t)$$

下证 $R(t)$为非平凡因子。

事实上，若 $R(t)=1$ 或 $R(t)=D(t)$，则 $\varepsilon=\pm a\eta^2$ 与 ε 为基本单位矛盾。于是 $R(t)\neq1$，且 $R(t)\neq D(t)$.

从而$(R(t),\sqrt{D(t)})$为主理想，且 $R(t)$为 $D(t)$的非平凡因子。这与题设矛盾。

故 $N(\varepsilon)=g$.　　　　（证毕）

推论　如果对 $D(t)=p_1(t)p_2(t)\cdots p_s(t)$（$p_i(t)$为偶数次不可约多项式，$p_i(t)\neq p_j(t)$）的任意非平凡分解 $D(t)=R(t)S(t)$均有 $R(t)$与 $S(t)$不互为平方剩余，则 $N(\varepsilon)=g$.

证明　由定理，若 $N(\varepsilon)=1$，则

$$R(t)X^2-S(t)Y^2=1,\text{在 } F_q[t] \text{ 中有解 } X,Y.$$

从而
$$\left(\frac{R(t)}{S(t)}\right)=\left(\frac{R(t)X^2}{S(t)}\right)=\left(\frac{1+S(t)Y^2}{S(t)}\right)=\left(\frac{1}{S(t)}\right)=1$$

其中 $R(t)/S(t)$为 Jacobi 符号。

又 $\deg R(t)$为偶数

$$\left(\frac{S(t)}{R(t)}\right)=\left(\frac{S(t)Y^2}{R(t)}\right)=\left(\frac{R(t)Y^2-1}{R(t)}\right)=\left(\frac{-1}{R(t)}\right)=1$$

于是，$R(t)$与 $S(t)$互为平方剩余，与已知矛盾。故假设不成立，所以 $N(\varepsilon)=g$.

2　结束语

对于实二次函数域的基本单位范的判别，仅剩下面一种情形不能决定，即当 $D(t)=p_1(t)\cdots p_s(t)$ $2\mid\deg p_i(t)$，$i=1$，$2\cdots s$. 若存在 $D(t)$的一种非平凡分解 $D(t)=R(t)S(t)$，使$\left(\frac{R(t)}{S(t)}\right)=\left(\frac{S(t)}{R(t)}\right)=1$，我们不能决定 $N(\varepsilon)=1$，还是 $N(\varepsilon)=g$？若这种情形解决了，则关于 Pell 方程 $X^2-DY^2=1$（或者 $X^2-DY^2=g$）的求解问题便可彻底解决。

作者对导师冯克勤教授的指导表示感谢。

参 考 文 献

1　冯克勤．代数数论．中国科技大学研究生讲稿，1989

2　E Artin. Quadratische Kōrper in Gebiete Derhoheren Kongruenren Ⅰ，Ⅱ. Math 2，19 (1924)：153－246

3　H F Trotter. On the Norms of Units in Quadratic Field. proceeding of America Mathematial Science，1969. 199－201

4　冯克勤．代数数论入门．上海科技出版社，1988

On the Norms of Fundamental Units in Real Quadratic Function Fields

Li Chao

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper the sufficient condition for the norm of fundamental units in quadratic function fields being g (g is the primitive element in F_q^*) is given. Then we solve the problem about the norms of fundamental units in some real quadratic function fiels.

Key words algebra, real quadratic function fields, self conjugate idea

---

中国主要科学技术期刊（化学、化工类）

一、化学

化学学报	200032	上海零陵路中科院上海有机所
化学通报	100080	北京市中关村中科院化学所
高等学校化学学报	130023	长春市解放路83号：吉林大学
高分子学报	100080	北京中关村中科院化学所
催化学报	116012	中科院大连化学物理所
分析化学	130022	中科院长春应用化学所
核化学与放射化学	102413	北京275信箱65分箱
结构化学	350002	福州市143信箱
燃料化学学报	030001	中科院山西煤化所
无机化学学报	210008	南京大学化学系
物理化学学报	100871	北京市中关村：北京大学化学系
有机化学	200032	上海零陵路：中科院上海有机化学所
应用化学	130022	长春1022信箱：中科院长春应化所

二、化工

化工学报	100083	北京911信箱（中国化工学会）
高分子通报	100080	中国化学学会
高分子材料科学与工程	610066	成都科技大学高分子所
合成纤维	200335	上海合成纤维研究所
华东化工学院学报	200237	上海梅陇路130号：华东化工学院
化工进展	100013	中国化工学会
化学反应工程与工艺	310027	杭州：浙江大学
北京化工学院学报	210009	北京化工学院：
中国塑料	100037	北京阜成路3号
南京化工学院学报	210009	南京化工学院：