

随机控制系统大纯时滞辨识及结构 辨识的偏差补偿算法

胡 德 文

(自动控制系)

摘 要 本文研究了已知噪声自相关函数时,线性 SISO 系统 ARMAX 模型的大纯时滞的辨识问题及结构与参数辨识的偏差补偿算法。本算法使得能够在很小的样本数及极低的信噪比下得到系统的结构参数。

关键词 系统辨识, 参数估计, 结构辨识, 大纯时滞辨识

分类号 TP271.74

随机控制系统辨识的起码要求是得到的参数估计值一致收敛于真值。这就要求系统的纯时滞、阶次选取正确,同时,还要消除因有色噪声带来的偏差。

当系统的纯时滞较小时,已有很多辨识的方法。当系统是确定性的时,其大纯时滞的辨识可通过寻优的办法来解决。但是,当随机控制系统面临大纯时滞的问题时,原有的方法就行不通了,因为,随着时滞的增加,确定出最终正确时滞的总的置信度将惊人地下降,以至于甚至完全不可信。

在本文中,我们采用事先假设干扰噪声自相关函数已知的方法。这样做便于理论分析。

1 脉冲响应的相关辨识

考虑如下线性离散 SISO 系统:

$$y(t) = \frac{B(z)}{A(z)}u(t) + v(t) \quad (1)$$

式中, $\{u(t)\}$ 、 $\{y(t)\}$ 分别为系统的输入和输出, $\{v(t)\}$ 为观测噪声序列,均值为零且自相关函数已知,即, $E\{v(t)\} = 0$, 及

$$r(i) = E\{v(t)v(t-i)\} \quad (2)$$

控制系统的多项式分别为

$$A(z) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_pz^{-p} \quad (3)$$

$$\delta = 2.96 \sqrt{r(0)/(NP_0)} \quad (17)$$

$$\text{即} \quad P[|\hat{g}(i)| < \delta] = 0.997 \quad (18)$$

上面的 $P[\cdot]$ 表示概率。注意到 $g(0)=0$ ，我们有如下结论：

准则 1 分别取 $i=0, 1, 2, \dots$

$$|\hat{g}(i+1)| > \delta \quad (19)$$

这时的 i 值即为系统纯时滞 d 。

本准则给出了随机控制系统纯时滞 d 的显著性检验，避免了将 d 与 p, q 一起作为结构参数进行的三维搜索。本准则适用于 d 较小的场合，当纯时滞较大时可能误判。

为了说明其原因，我们不妨暂时假设干扰噪声 $\{v(t)\}$ 是白噪声序列，由 (8)–(11) 式可知，各脉冲响应函数估值 $\hat{g}(i)$ 是独立同分布高斯型随机变量。事件 $\hat{g}(1), \hat{g}(2), \dots, \hat{g}(d)$ 之间是独立的，得出正确结论 $g(1)=0, g(2)=0, \dots, g(d)=0$ 的概率在各次判断的显著性水平 α 时等于 $(1-\alpha)^d$ 。当 $\alpha=0.05$ 时，为 $(0.95)^d$ ，取 $d=10$ 时，其值仅为 0.5987，也就是说，得出关于时滞 d 正确的可能性不过 60%。

为了解决大纯时滞的判断问题，可采用两种途径。一是提高每次显著性检验的置信度，如可取 $\alpha=0.003$ ，当 $d=30$ 时，正确判断出 d 的概率仍有 91.4%，当 $d=100$ 时，有 74% 的正确率。但是，增加置信区间的办法可能导致另一类误判。这就是将本来 $g(d+1) \neq 0$ 判断为 $g(d+1)=0$ ，使得出的时滞有可能超过真实数。

另一个方法是，由先验知识了解纯时滞 d 的上界和下界，在一定的显著性水平 α 下，将此区间满足 $|\hat{g}(i+1)| > \delta$ 的各个 i 值遴选出来，其根据是拟合优良度准则：

$$K(i) = \frac{1}{N - (N_i - i - 1)} \sum_{t=1}^N [y(t) - \sum_{k=i+1}^{N_i} \hat{g}(k)u(t-k)]^2 \quad (20)$$

当 i 低于或超过真实的纯时滞 d 值时，都会引起拟合优良度的增加。根据这个思想，我们得到了辨识大纯时滞的准则。

准则 2 在显著性水平 α 下，在纯时滞 d 的上、下界中遴选满足 $|\hat{g}(i+1)| > \delta$ 的全部 i 值。计算它们的拟合优良度 $K(i)$ 。当 $K(i)$ 为最小值时的 i 值即为系统的纯时滞 d 。

3 AR 部分辨识及偏差补偿算法

3.1 基本算法

在确定系统的纯时滞 d 后，我们假定 AR 部分与 MA 部分阶次上界分别为 P_m 和 Q_m 。选 N_0 值：

$$2P_m + Q_m + d - 1 \leq N_0 \leq N, \quad (21)$$

及

$$k_0 = d + Q_m, k_1 = N_0 - P_m \quad (22)$$

仿照文献[3]关于无输入 ARMA 模型 AR 部分参数估计的算法，记

$$R(p) \triangleq [\hat{g}(k_0 + p), \dots, \hat{g}(k_1 + p)]^T \quad (23)$$

$$H(p) \triangleq [R(p-1)R(p-2)\dots R(0)] \quad (24)$$

$$W(p) \triangleq [H^T(p) \cdot H(p)]^{-1} \quad (25)$$

$$F(p) \triangleq H^T(p)R(p) \quad (26)$$

记 AR 部分的参数按顺序排序成向量 $A(p)$, 这时,

$$A(p) = -W(p)F(p) \quad (27)$$

为正确地确定出 AR 部分的阶次 p , 我们采取如下的定阶准则。

准则 3 取 $i=1, 2, \dots$, 分别计算

$$J(i) = \det W(i) / \det W(i+1) \quad (28)$$

当 $J(i)$ 明显减小时的那个 i 值即定为 p 。

这个准则的理论依据是: 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 若真实阶次为 p , 必有 $\text{rank}[\lim_{N \rightarrow \infty} H(i)] \leq \min\{i, p\}$, 从而 $\text{rank}[\lim_{N \rightarrow \infty} H(p)] = p$ 和 $\text{rank}[\lim_{N \rightarrow \infty} H(p+1)] = p$ 。亦即有:

$\text{rank}[\lim_{N \rightarrow \infty} H^T(p)H(p)] = p$ 及 $\text{rank}[\lim_{N \rightarrow \infty} H^T(p+1)H(p+1)] = p$, 这一结论是在 N 有限的条件下得出的。最终有结论 $\lim_{N \rightarrow \infty} [\det W^{-1}(p+1)] = 0$, 即 $\lim_{N \rightarrow \infty} J(p) = 0$ 。

准则 3 包含了三个技巧: 一是从脉冲响应角度考虑, 将 AR 部分与 MA 部分分离, 仅需作一维搜索即可得出 AR 部分阶次 p ; 二是通过对数据矩阵 $H(p)$ 巧妙构造, 使它又成为第三类准则(以脉冲响应估值为二次性数据), 不需计算行列式; 三是若还要计算出 AR 参数向量估值, 则可构造出递推算法, $J(p)$ 的计算包含在其中, 不增加额外的计算量。准则 3 对纯时滞 d 的确定具有很强的鲁棒性。即使 d 误判很多, 也不影响 AR 阶次 p 的确定。

3.2 偏差分析与补偿

在基本算法中, 赖以定阶的基本思想是, $\lim_{N \rightarrow \infty} \det W^{-1}(p+1) = 0$ 。但是, 观测样本数 N 在实际辨识中不可能是无限地大, 这必然会影响到行列式 $\det W^{-1}(p+1)$ 的准确性。为了进一步提高定阶准则的检测能力以及参数估计的精度, 我们有必要对估计算式中的有关矩阵和向量的误差分析。

对于 $W(p)$ 矩阵, 有

$$\begin{aligned} E\{W^{-1}(p)\} &= E\{H^T(p)H(p)\} = E\{\{R^T(p-i)R(p-j)\}_{p \times p}\} \\ &= \{E\{R^T(p-i)R(p-j)\}\}_{p \times p} \end{aligned} \quad (29)$$

式中, $\{x(i, j)\}_{p \times p}$ 表示 $p \times p$ 维矩阵, 元素为 $x(i, j)$ 。

$$\begin{aligned} E\{R^T(p-i)R(p-j)\} &= \sum_{k=k_0}^{k_1} E\{\hat{g}(k+p-i)\hat{g}(k+p-j)\} \\ &= \sum_{k=k_0}^{k_1} E\{[\hat{g}(k+p-i) - g(k+p-i)][\hat{g}(k+p-j) - g(k+p-j)]\} \\ &\quad + \sum_{k=k_1}^{k_2} E\{\hat{g}(k+p-i) - g(k+p-i)\}g(k+p-j) \\ &\quad + \sum_{k=k_0}^{k_2} E\{\hat{g}(k+p-j) - g(k+p-j)\}g(k+p-i) \\ &\quad + \sum_{k=k_0}^{k_1} E\{\hat{g}(k+p-i)g(k+p-j)\} \end{aligned} \quad (30)$$

根据脉冲响应估计的渐近正态性,即(12)式,上式中的第一项内容,在 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot E\{[\hat{g}(k+p-i) - g(k+p-i)][\hat{g}(k+p-j) - g(k+p-j)]\} = r(|i-j|)/P_0 \quad (31)$$

又根据[1][2]证得的无偏性,知(30)式中第二、三项均等于零;从而,有

$$E\{R^T(p-i)R(p-j)\} = \rho \cdot r(|i-j|) + \sum_{k=k_0}^{k_i} g(k+p-i)g(k+p-j) \quad (32)$$

$$\text{式中, } \rho \triangleq (k_i - k_0 + 1)/(NP_0) \quad (33)$$

这说明,当观测样本有限时, $W^{-1}(p)$ 矩阵存在一固定偏差,从而是有偏的。由于这个偏差只与噪声的自相关函数有关,而这又是已知的,因此,可将其补偿掉。

定义 $\bar{W}(p)$ 矩阵,使得:

$$\bar{W}^{-1}(p) = W^{-1}(p) - [(k_i - k_0 + 1)/N]\Omega \quad (34)$$

由此得到新的定阶准则如下:

准则 4 取 $i=1, 2, \dots$, 分别计算

$$J(i) = \det \bar{W}(i) / \det \bar{W}(i+1) \quad (35)$$

当 $J(i)$ 明显减小时的 i 值即定为阶次 p 。

这里值得指出的是,在有色噪声下,(26)式所定义的 $F(p)$ 也存在偏差,无偏差值应为:

$$\bar{F}(p) = F(p) - \rho[r(1), r(2), \dots, r(p)]^T \quad (36)$$

用(34)、(36)式分别替代(25)、(26)式,根据[3]的有关推导,可得出 ARMAX 模型 AR 部分偏差补偿递推算法,限于篇幅,算法具体步骤在此略去。

4 MA 部分辨识

在以上各步完成后,由二步法得参数($i=1 \sim q$):

$$\hat{b}_i = [\hat{g}(d+i), \hat{g}(d+i-1), \dots, \hat{g}(d+i-p)][1, \hat{A}^T(p)]^T \quad (37)$$

式中, $\hat{A}(p)$ 为 AR 部分的参数估计向量。

由于 MA 阶次 q 是未知的,我们须计算 $i=1 \sim Q_m$ 时的 \hat{b}_i 值。设阶次为 q 时,计算模型的输出

$$\hat{y}_q(t) = -[\hat{y}_q(t-1), \dots, \hat{y}_q(t-p)]\hat{A}(p) + [u(t-d-1), \dots, u(t-d-q)][\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q]^T$$

利用 $\hat{y}_q(t)$ 与观测得到的系统输出 $y(t)$ 的拟合优良度来判断 MA 部分阶次 q 。

准则 5 取 $q=1, 2, \dots, Q_m$, 分别计算

$$I(q) = \frac{1}{N-p-q} \sum_{t=1}^N [y(t) - \hat{y}_q(t)]^2$$

当 $I(q)$ 的当前值显著下降时,阶次即为真实值 q 。

这个准则与 AR 部分的两个准则的意义不同,它的依据是冗余的参数对拟合优良度不增加贡献。因此, $I(p)$ 的显著性不是以零值为标准,而是以它的前后各值为参照的。

5 仿真结果及分析

考虑如下系统

$$x(t) = 0.9x(t-1) - 0.8x(t-2) + 0.7x(t-3) - 0.6x(t-4) \\ + u(t-d-1) + 0.5u(t-d-2)$$

观测噪声为 MA 型噪声:

$$v(t) = \varepsilon(t) - 0.5\varepsilon(t-1) + 0.4\varepsilon(t-2) - 0.2\varepsilon(t-3), \varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

系统的观测到的输出 $y(t) = x(t) + v(t)$, 不难知道观测噪声自相关函数:

$$r(0) = 1.45\sigma^2, \quad r(1) = -0.78\sigma^2, \quad r(2) = 0.5\sigma^2, \\ r(3) = -0.2\sigma^2, \quad r(4) = r(5) = \dots = 0$$

现采用周期为 63 功率为 1 的改良型 m 序列^[1], 共输入三个周期外加一个预激周期, 取

$$N_0 = 62, \quad Q_m = 4, \quad P_m = 6.$$

5.1 大纯时滞辨识的仿真

取 $\sigma=1, d=20$. 取 d 的下界为 0, 上界为 22. 采用 Monto Carlo 方法共进行 20 次独立仿真, 用准则 1 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时, 有 11 次正确得出 $d=20$, 当显著性水平 $\alpha=0.003$ 时, 正确得出 $d=20$ 的次数增至 18 次. 在误判的各次中, 采用准则 2, 取 $K(i)$ 为最小时的 i 值, 最终结果正确率是 100%. 如在其中一次仿真中, 最多有 $i=9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22$ 均满足 $|\hat{g}(i)| > \delta(\gamma=0.05)$, 且 $i=16, 20, 21, 22$ 满足 $|\hat{g}(i)| > \delta(\alpha=0.003)$. 计算得出的 $K(i)$ 值分别为:

$$K(9) = 0.852, \quad K(10) = 0.798, \quad K(11) = 0.728, \quad K(12) = 0.675 \\ K(15) = 0.562, \quad K(16) = 0.502, \quad K(17) = 0.408, \quad K(19) = 0.361 \\ K(20) = 0.302, \quad K(21) = 1.585, \quad K(22) = 4.087$$

取最小的 $K(i)$, 得 $d=20$.

5.2 偏差补偿算法比较

取 $\sigma=0.1$, 分别采用基本算法和偏差补偿算法进行计算. ($d=2$)

(1) 采用基本算法时, AR 定阶准则值:

$$J(1) = 0.7338826, \quad J(2) = 0.6005629, \\ J(3) = 0.3045027, \quad J(4) = 3.010215 \times 10^{-2}, \\ J(5) = 5.871475 \times 10^{-3}, \quad J(6) = 3.631041 \times 10^{-3}$$

根据前后三个数的显著性, 阶定为 $p=4$, 参数

$$\hat{a}_1 = -0.7950141, \quad \hat{a}_2 = 0.6499802, \\ \hat{a}_3 = -0.572183, \quad \hat{a}_4 = 0.5414853$$

由此得到 MA 部分的参数

$$\hat{b}_1 = 0.9962347, \quad \hat{b}_2 = 0.612196, \\ \hat{b}_3 = -1.869202 \times 10^{-3}, \quad \hat{b}_4 = -5.610955 \times 10^{-2}$$

MA 部分定阶判据 $I(q)$ 的值

$$I(1) = 1.08188, \quad I(2) = 9.401389 \times 10^{-2}, \\ I(3) = 9.465154 \times 10^{-2}, \quad I(4) = 9.706854 \times 10^{-2}$$

由此定出 MA 部分的阶为 2, \hat{b}_1, \hat{b}_2 有效。

(2) 采用偏差补偿算法时, AR 定阶准则值:

$$\begin{aligned} \bar{J}(1) &= 0.7252441, & \bar{J}(2) &= 0.5851911, \\ \bar{J}(3) &= 0.2836734, & \bar{J}(4) &= 2.557621 \times 10^{-3}, \\ \bar{J}(5) &= 5.037785 \times 10^{-4}, & \bar{J}(6) &= -1.027137 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

根据前后三个数的显著性, 阶定为 4, 参数

$$\hat{a}_1 = -0.8715334, \hat{a}_2 = 0.7564057, \hat{a}_3 = -0.6613723, \hat{a}_4 = 0.582448$$

MA 部分的参数

$$\hat{b}_1 = 0.9962347, \hat{b}_2 = 0.5359648, \hat{b}_3 = -3.294051 \times 10^{-3}, \hat{b}_4 = -3.125072 \times 10^{-2}$$

MA 部分定阶准则值

$$\begin{aligned} \bar{I}(1) &= 0.8219818, & \bar{I}(2) &= 4.919734 \times 10^{-2}, \\ \bar{I}(3) &= 4.95645 \times 10^{-2}, & \bar{I}(4) &= 5.103073 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

阶次定为 $q=2$, \hat{b}_1, \hat{b}_2 有效。

对上面的比较看出, 偏差补偿算法具有更高的参数估计精度, 同时, $\bar{J}(4), \bar{J}(5), \bar{J}(6)$ 分别较之 $J(4), J(5), J(6)$ 更接近于零, 易于定阶判断。

为了更进一步地比较两种方法之间的定阶能力, 我们将噪声功率加大, 取 $\sigma=0.3$ 。

(3) 采用基本算法, AR 定阶准则值

$$\begin{aligned} J(1) &= 0.8369005, & J(2) &= 0.759225, & J(3) &= 0.4735672, \\ J(4) &= 0.1540364, & J(5) &= 4.92419 \times 10^{-2}, & J(6) &= 3.196469 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

阶次可能会定为 5, 出现误判。即使取 $p=4$, 其相应的参数也与真实值相差甚远:

$$\hat{a}_1 = -0.4523751, \hat{a}_2 = 0.183022, \hat{a}_3 = -0.1831402, \hat{a}_4 = 0.363966$$

此时噪声与输入信号功率比达到 0.13, 而且样本数 $N=189$ 也很小, 因此, 这个结果的误差很大。

(4) 采用偏差补偿算法, AR 定阶准则值

$$\begin{aligned} \bar{J}(1) &= 0.7614571, & \bar{J}(2) &= 0.6389155, & \bar{J}(3) &= 0.3196856, \\ \bar{J}(4) &= 1.908135 \times 10^{-2}, & \bar{J}(5) &= 3.885359 \times 10^{-3}, & \bar{J}(6) &= -7.802248 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

从前后三个数的显著性来看, 阶次仍可定为 4, 相应的 AR 参数值为

$$\hat{a}_1 = -0.7801706, \hat{a}_2 = 0.621988, \hat{a}_3 = -0.5444032, \hat{a}_4 = 0.5288743$$

MA 部分的参数

$$\hat{b}_1 = 0.9887404, \hat{b}_2 = 0.6412492, \hat{b}_3 = -5.957484 \times 10^{-3}, \hat{b}_4 = -0.1049803$$

MA 部分的定阶准则值

$$\bar{I}(1) = 1.295357, \bar{I}(2) = 0.2261111, \bar{I}(3) = 0.2272337, \bar{I}(4) = 0.2328939$$

从 $\bar{I}(q)$ 的显著性, $q=2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ 有效。

在这种情况下, (样本为 $N=189$), 仍能得到较满意的结果。说明了偏差补偿算法的改进是显著的。

本文的偏差补偿算法与郑卫新、冯纯明^{[4][5]}的算法相比有着本质的区别。[4][5]提出的算法是为了解决在有色噪声估计下, 最小二乘估计的一致收敛性问题, 笔者对此也进行了仿真。而本文算法建立在相关分析——最小二乘二步法的基础上, 参数的收敛性本来

就得到了保证。之所以加入偏差补偿(这种偏差在样本 $N \rightarrow \infty$ 时消失)是为了提高定阶的检测能力和参数估计的精度。

本文紧紧围绕如何高精度辨识系统这个主题。解决了文献未能解决的随机系统大纯时滞问题。算法建立在相关分析基础上并利用了已知的噪声自相关函数。由于采用了作者提出的 A-最优输入设计及新的偏差补偿方法,使得能够在很小的样本数及极低的信噪比下得到系统的结构与参数。限于篇幅,我们在此不考虑辨识的快速算法。如何从理论上分析偏差补偿算法的精度和置信度是值得进一步研究的。

参 考 文 献

- 1 Hu D W, et al, *Optimal Input Signal Design and Statistical Properties of the Impulse Response Functions Estimation*. Proc. 8th IFAC Identification and System Parameter Estimation(H. F. Chen ed.), Pergmon Press, 1988
- 2 胡德文等. 脉冲响应函数辨识的随机 A-最优输入设计. 自动化学报, 1991, 17 (1)
- 3 胡德文. ARMA 模型 AR 部分阶与参数估计的超定快速递推算法. 控制理论与应用, 1990, 7 (2)
- 4 Zheng W Z and Feng C B. Unbiased Identification of Linear time Delay systems Corrupted by Correlated Noise. Proc. 8th IFAC Identification and System Parameter Estimation (H. F. Chen ed.), Pergmon Press, 1988
- 5 Zheng W X and Feng C B. Identification of Stochastic Time Lag Systems in the Presence of Coloured Noise. Automatica, 1990, 26(4)

The Large Time Delay Identification and the Bias Compensation for Structure Discrimination of Stochastic Control Systems

Hu Dewen

(Department of Automatic Control)

Abstract

Based on given noise autocorrelations, we investigate the large time delay identification and the bias compensation for the structure and system parameter identification for linear SISO system's ARMAX models.

Key words parameter estimation, system identification, structure discrimination, large time delay identification