

半挠性喷管挠性板弹性曲线计算方法

刘铭甲

(上海消防科学研究所)

摘要 本文基于梁弯曲变形的小挠度线性理论,提出了半挠性喷管挠性板弹性曲线的计算方法。并对挠性板弹性曲线与气动力学给出的型面进行了对比研究,两者吻合得较好,研究表明,结构设计中撑杆合理布局,是影响匹配的关键问题,足应引起设计者的重视。

关键词 计算方法, 挠性喷管, 弹性曲线, 曲率匹配

分类号 O343

喷管是气动力学试验设备——风洞的重要部件。由它提供给风洞试验段良好的气流品质,满足气动力试验的需求。挠性喷管可以连续变化几个 M 数,每变一个 M 数,就要用撑杆调整一次挠性板的型面。而不须像固块喷管那样,变一个 M 数,换一具喷管。因此,要求挠性板所形成的型面与空气动力学计算出的气动力学型面相一致,提供良好的流场条件。

1 理论分析

半挠性喷管由固块和挠性板组合而成(图1)。虽然半挠性喷管无须配置多具喷管备用,节省加工费、停放的空间及更换喷管的时间,但它技术难度高,制造、安装、调试

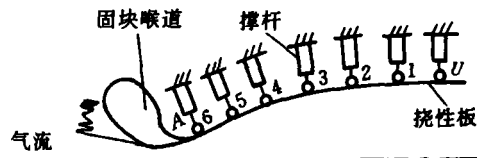


图1 半挠性喷管示意图

较为复杂,撑杆多少影响其造价。所以在满足挠性喷管性能的前提下,尽可能减少撑杆数目,成为降低造价的目标。

半挠性喷管上下挠性薄板,在几副撑杆的支持和作用下,完成一定的弯曲变形,满足相应 M 数下气动型面的要求。为此,须对挠性板的弹性曲线进行必要的计算。以期对撑杆的分布,撑杆力的大小,及撑杆点处弯矩的大小作出估计,以便进行喷管的结构设计。通过弹性曲线的计算,求得撑杆点处的曲率,并与气动型面作比较,研究两者的匹配问题。

若挠性板弯曲变形所形成的曲面,与理论计算给出的气动力学型面相一致,必须要满足如下两个条件:(1) 挠性板上有限个撑杆点 $p'(x, y)$ 的纵坐标,必须和与其相对应的

气动力学型面上的点 $p(x, y)$ 的纵坐标相等；(2) 挠性板弯曲所形成的曲面上，点 $p'(x, y)$ 的一阶导数 (dy/dx) 和二阶导数 (d^2y/dx^2) 值，也必须和气动型面对应点上的导数值相一致。

挠性板的弹性曲线和理论的气动型面是否匹配，就要看上述的两个必要充分条件有没有得到满足。只有同时满足了上述条件，才能说两者相匹配，挠性板上撑杆的分布则是形成所需弹性曲线的关键。

2 弹性曲线的计算

就半挠性喷管挠性板的弹性曲线计算而言，首要是将具体的研究对象——挠性板，简化成什么样的一种模型。使之简化后，既不失去原物理意义，又使计算工作大为简便。

一般对挠性板的弹性曲线的计算，可有如下三种考虑，这就是：(1) 按偏微分方程解平板问题；(2) 按非线性常微分方程描述梁的弹性变形理论，解大挠度问题；(3) 按小挠度变形梁的理论，处理挠性板的变形情况。

按(1)需要解挠性板挠度协调的位移函数，按(2)不但要考虑挠性板的弹性变形，而且还要考虑结构的几何非线性，这都增加了数学解算的复杂性。

针对我们所研究的挠性喷管这一具体问题，撑杆是在挠性板横截面轴线(对称轴线)的法面之内。挠性板弯曲时，撑杆基本仍垂直作用在对称轴，小变形的概念仍然适用。符合有些情况下，即使位移的量接近所研究对象的一个小度量，但只要不影响力的作用，仍可认为是小变形的论述。此外，我们还知道等厚度和小挠度的挠性板，在垂直板对称轴的撑杆作用下的平衡，与梁的情况相似，都是以弯曲应力来承受撑杆力而达平衡的，且板产生平面弯曲。故挠性板可以看成是数条有一致弯曲变形的梁集合而成。这里我们按照(3)小挠度梁理论，把半挠性喷管的挠性板简化成多支点的连续梁。这样简化模型是合理且简单的。

将图 1 所示的半挠性喷管，视为 A 端固支、 U 端滑动铰支，且中间撑杆有位移“沉陷”的多支点连续梁。按梁的理论考虑挠性板的弯曲变形(图 2)。

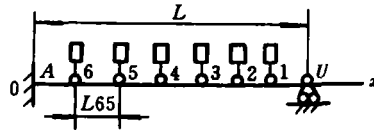


图 2 挠性板简化成多支点梁

挠性板弯曲变形时，各撑杆点在 x 向有移动，滑铰 U 也会左移(小量位移)，挠性喷管设计时要考虑这一补偿。因为撑杆基本上保证垂直于板，在 x 向的支撑分力很小，可以略去。若板上取曲线坐标 s ，板弯曲时撑杆点在直角坐标 x 向投影有变化，在 s 坐标上不变。

从梁的挠度微分方程知：

$$1/R = M(x)/EJ = y''/(1 + y'^2)^{3/2} \quad (1)$$

式中， R —曲率半径(mm)； M —弯矩(kgmm)； E —弹性模数(kg/mm²)； J —梁横截面惯性矩(mm⁴)； y' —角位移(RAD)； y'' —曲率(1/mm)。

$$y' = dy/dx; y'' = d^2y/dx^2 \quad (2)$$

在小挠度情况下， y'^2 很小，故 $(1 + y'^2)^{3/2} \approx 1$ ，梁的挠度微分方程线性化。于是： $1/R = y'' = M(x)/EJ$ 。只要我们能求得各撑杆点的弯矩，弯曲的 $(1/EJ)$ 倍，就是该点的曲率。

把简化后的模型，以撑杆划界分成单元，相邻单元又在撑杆点由相同的变形协调一致联系在一起，由这样的集合得出全结构的面貌。从有限元法知单跨梁力与位移的关系（参照图 2），有

$$\{R_A M_A R_6 M_6\} = [k]_{A6} \{y_A \theta_A y_6 \theta_6\} \quad (3)$$

式中， R_A 、 R_6 是 A 端和 6 端的 y 向力； M_A 、 M_6 是 A 端和 6 端的弯矩（逆时针为正）。 y_A 、 y_6 是 A 端和 6 端的 y 向位移； θ_A 、 θ_6 是 A 端和 6 端的角变位。 $[k]_{A6}$ 是单跨梁的刚度影响矩阵。

$$[k]_{A6} = \frac{EJ}{L_{A6}} \begin{bmatrix} 12/L_{A6}^2 & 6/L_{A6} & -12/L_{A6}^2 & 6/L_{A6} \\ 6/L_{A6} & 4 & -6/L_{A6} & 2 \\ -12/L_{A6}^2 & -6/L_{A6} & 12/L_{A6}^2 & -6/L_{A6} \\ 6/L_{A6} & 2 & -6/L_{A6} & 4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

双跨梁力与位移的关系是：

$$\{R_A M_A R_6 M_6 R_5 M_5\} = [k]_{A5} \{y_A \theta_A y_6 \theta_6 y_5 \theta_5\} \quad (5)$$

双跨梁的刚度影响矩阵 $[k]_{A5}$ （跨长均为 L 时）：

$$[k]_{A5} = \frac{EJ}{L} \begin{bmatrix} 12/L^2 & 6/L & -12/L^2 & 6/L & 0 & 0 \\ 6/L & 4 & -6/L & 2 & 0 & 0 \\ -12/L^2 & -6/L & \frac{12+12}{L^2} & \frac{-6+6}{L} & -12/L^2 & 6/L \\ 6/L & 2 & \frac{-6+6}{L} & 4+4 & -6/L & 2 \\ 0 & 0 & -12/L^2 & -6/L & 12/L^2 & -6/L \\ 0 & 0 & 6/L & 2 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

多跨梁的刚度影响矩阵可由此延伸推得。从力与位移方程求出各点的 M_i ，就可进而求得该点的曲率。对图 2 所示的简化图来说，挠性板的刚度影响矩阵是一个 (16×16) 阶的对称方阵。

3 算 例

(1) 已知某 M ($M > 1$) 数的气动型面数据。见表 1。

(2) 挠性板初始位置 $A'U'$ 与气动型面 AU 的关系，见图 3 板斜置，板的坐标系为 XOY ，它与气动型面坐标系 xoy 的夹角 θ_0 为：

$$\theta_0 = \tan^{-1}(y_U - y_A/x_{AU}) = 0.075\text{RAD} \quad (7)$$

挠性板弯曲时，有限撑杆点 i' 的位移为 δ_{r_i}

$$\delta_{r_i} = [(y_i - y_A) - x_i \tan \theta_0] \cos \theta_0 = Y_i \quad (8)$$

撑杆点	A	6	5	4	3	2	1	U
Y_i [mm]	0	10.42	18.44	21.35	19.56	14.77	8.00	0

(3) 以撑杆划界分段, 各段不等长时, 取标准长 $L_0=134\text{mm}$. 各段长度与 L_0 之比为 $\epsilon_i=L_i/L_0$.

(4) 符号规定: x 向逆时针转 90° , 为 y 的正向。弯矩以顺时针方向为正。

表 1 按 xoy 坐标系给出的气动型面参数

位置	参 数					
	$x, [\text{mm}]$	$y, [\text{mm}]$	$y', [\text{RAD}]$	$y'', [1/\text{mm}]$	$\bar{s}, [\text{mm}]$	$\bar{s}_x, [\text{mm}]$
A	0	20.44	0.1978	-0.4353×10^{-7}	95.74	94.12
6	94.12	37.97	0.1689	-0.4184×10^{-3}		
5	209.89	54.72	0.1211	-0.3923×10^{-3}	117	115.77
4	343.26	67.67	0.07662	-0.2520×10^{-3}	134	133.37
3	477.00	75.94	0.04917	-0.1642×10^{-3}	134	133.74
2	610.89	81.21	0.03087	-0.1105×10^{-3}	134	133.89
1	744.76	84.49	0.01885	-0.6765×10^{-4}		
U	878.80	86.55	0.01335	-0.8512×10^{-5}	134	134.04

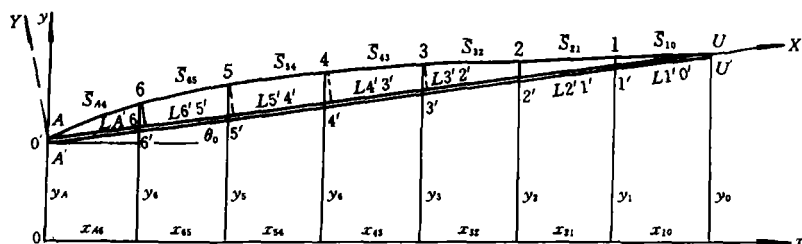


图 3 挠性板初始位置图

(5) 列出全结构力 $\{P\}$ 与位移 $\{u\}$ 的刚度方程

$$\{P\} = [K]\{u\} \quad (9)$$

$\{P\}$ 与 $\{u\}$ 均为列阵。刚度矩阵 $[K]$ 是七段梁刚度矩阵 $[k]_i$ 的迭加, 且

$$\{P\} = \{R_A \ M_A/L_0 \ R_6 \ M_6/L_0 \ R_5 \ M_5/L_0 \ R_4 \ M_4/L_0 \ R_3 \ M_3/L_0 \ R_2 \ M_2/L_0 \ R_1 \ M_1/L_0 \ R_U \ M_U/L_0\}$$

$$\{u\} = \{Y_A \ L_0\theta_A \ Y_6 \ L_0\theta_6 \ Y_5 \ L_0\theta_5 \ Y_4 \ L_0\theta_4 \ Y_3 \ L_0\theta_3 \ Y_2 \ L_0\theta_2 \ Y_1 \ L_0\theta_1 \ Y_U \ L_0\theta_U\}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{A'6'} & & & & & & & \\ 0 & k_{6'5'} & & & & & & \\ 0 & 0 & k_{5'4'} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{4'3'} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{3'2'} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{2'1'} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{1'U'} & \end{bmatrix} \quad (\text{对称})$$

式中 $A'6'$ 梁段刚度矩阵 $[k]_{A'6'}$ 为

(8) 求撑杆点的支撑力。此时 Y_i 、 Y_i' 均已知，利用分块矩阵式即可求得支撑力 R_i 。

(9) 求撑杆点的曲率 C_i 。从各梁段的内载中求出弯矩 M_i ，故曲率 $C_i = y'' = M_i/EJ$ 。

现将计算结果列于表2，弹性曲线绘于图4。

表2 按简化模型算出挠性板弹性曲线 y_i' 及 y_i'' 之值

撑杆点 i	A	6	5	4	3	2	1	U
y_i' (RAD)	0.191	0.169	0.120	0.077	0.049	0.031	0.019	0.014
R_i (kg)	-179.325	204.297	10.145	-8.081	-12.119	-7.337	12.729	-20.226
M_i (kgmm)	0.0988	-11383.243	-9420.580	-6315.969	-3928.289	-2589.317	1817.036	27.346
$y_i'' \cdot 10^4$ (1/mm)	0.4205	-4.6297	-3.8315	-2.5688	-1.5977	-1.0531	-0.7390	0.0111

上面按梁变形的小挠度理论，提出了半挠性喷管挠性板弹性曲线的计算方法，并以算例给出求解步骤和计算结果。从求出的挠性板 y' 和 y'' 与气动型面理论值比较来看，两者比较接近。 y' 吻合相当好，误差 $< 1\%$ ，只是在 A 点为 3% ， y'' 除 A、6、U 点外，也基本一致，误差范围在 $2 \sim 10\%$ 以内。基本证明简化方法简单可行。

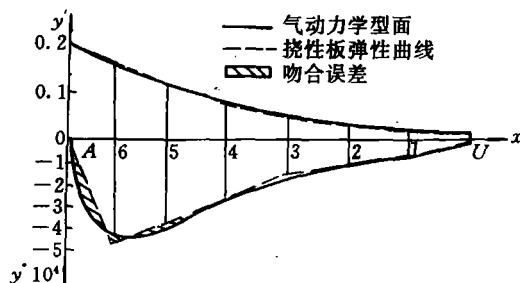


图4 挠性板弹性曲线与气动型面比较

挠性板上以有限撑杆实现与气动型面在理论上完全一致是不可能的。但能取得一定程度的近似。通过求解弹性曲线和示例，提醒我们要特别注意撑杆的布局。在点 A、5 之间曲率变化大的地方，显然应增加撑杆密度，可以减小曲率匹配误差。在此不再赘述。

A Method of Calculating Elastic Curve of Semiflexible Plate Nozzle

Liu Mingjia

(Shanghai Fire Research Institute)

Abstract

A method of calculating elastic curve for semiflexible plate wind tunnel nozzle has been presented, based on the linear theory of small deflection of beam deformation, in this paper. In light of the match results of curvature between flexible plate calculated and aerodynamic contour, the reasonable arrangement of jacks on the plate, which has an obvious effect on the curvature match, is of vital importance. So the structure designer of flexible nozzle should be cautious of it.

Key words calculation method, flexible plate nozzle, elastic curve, curvature match