国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第3期　1992年9月　Vol. 14 No. 3

对称集及其在无线电信号频率设计中的应用

马锡来

（国防科工委教育训练部）

摘　要　本文在完成对称集理论研究基础上，提出了运用对称集理论来解决无线电信号频率间相互干扰的新方法，从而可编制出简明实用的“不干扰表”，达到在狭小地域（航空母舰）内有多路无线电信号频率（段）的正确选择。

关键词　信号设计，频率，对称集

分类号　TN911.1

1　对称集

定义 1.1　A 是有理数域的有限子集，任取 $a\in A$，则 $-a\in A$，称 A 为有限对称集。如集合

$$A=\{a,-a,b,-b\}$$

A 为对称集，其元数为 4. 为简化写法，A 记作：$A=\{\pm a,\pm b\}$.

显然，零集是对称集，记作 $\{\pm 0\}$；对称集元数是偶数；空集是对称集。

对称集 A、B，若 $A\supset B$，$B\supset A$，则 $A=B$.

设对称集 $A=\{\pm a,\pm b\}$，将 A 集的每一元素变到它本身的对称位置的变换，称为 A 的相反变换，记作 $-A$，变换记作 σ，由此 $-A=\sigma A$. 事实上，$-A$ 是 A 的象集。在 σ 的变换下，得到：

$$\sigma(a)=-a,\sigma(-a)=a,\sigma(b)=-b,\sigma(-b)=b,$$

记作

$$\sigma=\begin{Bmatrix} a & -a & b & -b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -a & a & -b & b \end{Bmatrix}$$

即

$$-A=\sigma A=\{\pm a,\pm b\}=A$$

定义 1.2　对称集的运算

(1) 对称集加法。两个有限对称集 $A=\{\pm a,\pm b\}$ 与 $B=\{\pm c,\pm d\}$ 的和 A [+] B 指的是以下 C 集

$$C=A[+]B=\begin{Bmatrix} \pm(a+c),\pm(a+d),\pm(a-c),\pm(a-d) \\ \pm(b+c),\pm(b+d),\pm(b-c),\pm(b-d) \end{Bmatrix}$$

式中符号 [+] 代表对称集加法，C 为 A，B 两对称集之对称和。

C 集合的元素是下述法则得到的：即 A 集合的每一元素依次与 B 集合的每一元素做代数和，每相

* 1991年12月5日收稿

加一次所得代数和作为 C 集合的一个元素。

若 A 集合元数为 m，B 集合的元数为 n，则 C 集合的元数 $P\leqslant m\cdot n$.

若 A、B、C 为对称集，则有

$$A[+]B=B[+]A \qquad \text{(交换律)}$$

$$A[+]B[+]C=A[+](B[+]C) \qquad \text{(结合律)}$$

(2) 对称集减法。设 $A=\{\pm a,\ \pm b\}$，$B=\{\pm c,\ \pm d\}$，符号 $[-]$ 表示减法，E 为两对称集之对称差，于是可写成

$$E=A[-]B$$

对称集减法法则是：A 集的每一元素依次与 B 集的每一元素做代数差，每一次相减所得差，就是 E 集的一个元素。按照这个法则，得到

$$E=\left\{\begin{matrix}\pm(a+c),\pm(a+d),\pm(a-c),\pm(a-d)\\ \pm(b+c),\pm(b+d),\pm(b-c),\pm(b-d)\end{matrix}\right\}$$

比较对称集 C 与 E，不难发现 $C=E$，也就是说 $A[+]B=A[-]B$. 即对称集的和运算等于对称集的差运算，很明显，对称集的减法同样满足结合律和交换律。

(3) 有理数 l 与对称集 $A=\{\pm a,\ \pm b\}$ 之数和、数积的运算规则。所谓数和是指对称集 $A=\{\pm a,\ \pm b\}$ 与有理数 l 的数和运算得到 M 集。

$$M=l+A=\{l\pm a,l\pm b\}$$

M 集是按下述法则得到的，A 集的每一元素与有理数 l 做代数和，每做一次和即为 M 集的一个元素。

显然，由于有理数 l 的出现，使得 A 集的对称点在数轴上移动了距离 l. M 集的元数与 A 集相同。

所谓数积是指对称集 $A=\{\pm a,\ \pm b\}$ 与有理数 l 的数积运算得到 N 集

$$N=lA=l\{\pm a,\pm b\}=\{\pm la,\pm lb\}$$

N 集是按下述法则得到的：A 集的每一元素，依次与有理数 l 做代数乘，每一次乘积作为 N 集的一个元素。很明显 N 集的元素相对于 A 集的元素扩大了 l 倍，N 集的元数与 A 相同。

若 A、B 为对称集，下面的算律是成立的：

(a) $l(A[+]B)=lA[+]lB$

若 $l=0$,则 $l(A[+]B)=\{\pm 0\}$，即数 0 与对称集之积为零集。

(b) 假定 $l\neq 0$，若 $lA\cap B=\phi$，则 $A\cap\frac{1}{l}B=\phi$.

定义 1.3 对称集的移项

(1) 若 A、B 对称集为非空有限对称，且 A、B 两对称集至少有一对对称元素相同，则有 $A[+]B\ni\pm 0$.

显然，(a)若 $A=B$,则 $A[+]B\ni\pm 0$；(b)若 $A\supset B$，则 $A[+]B\ni\pm 0$；(c)若 $B\supset A$，则 $A[+]B\ni\pm 0$.

(2) 若 A、B 对称集非空有限，且 $A\cap B=\phi$，则有 $A[+]B\not\ni\pm 0$.

显然，若 A、B、C、D 对称集为非空有限集，且 $A[+]B\cap C=\phi$，$A[+]B\cap C[+]D=\phi$，则有：(a)$A\cap B[+]C=\phi$；(b)$A\cap B[+]C[+]D=\phi$.

上式中的运算顺序是，先做对称集加法，后做交集运算。

定义 1.4 数带。数带用符号“△”表示，△是一个连续的区间，是附着在对称集元素上面，以元素为中心左右连续移动而形成有一定宽度的带，称为数带，其运算规则与对称集完全一致。

如：$A=\{\pm a\pm\triangle\}$ 与 $B=\{\pm b\pm\triangle\}$

做对称和运算时

$$A[+]B = \{\pm a \pm \triangle\}[+]\{\pm b \pm \triangle\}$$
$$= \{\pm (a+b) \pm 2\triangle, \pm (a-b) \pm 2\triangle\}$$

可见引入数带后，对称集的对称元素不是单一的数，而是一个连续的区间。

2 正弦信号通过非线性调制器的输出频率及对称集

2.1 正弦信号通过非线性调制器输出信号频率分布

由于我们只研究信号频率，因此在今后的讨论中，其信号的振幅及相位都不标出。

(1) 如图 1 示，一个正弦信号其频率为 Ω_1，通过调制器调制在 ω_0 的载频上，则输出的信号频率成份是：载频为 ω_0，边频为 $\omega_0 \pm n_1\Omega_1$，其中 $n_1 = \{0, 1, \cdots\}$.

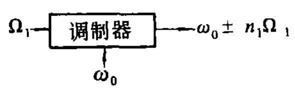

图 1

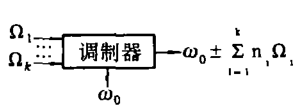

图 2

其输出频率是以载频 ω_0 为中心成对称分布。

(2) 如图 2 示，当有 $k \geqslant 2$ 个正弦信号通过调制器调到载频 ω_0 上，则输出信号的频率是：载频为 ω_0，边频为 $\omega_0 \pm \sum_{i=1}^{k} n_i\Omega_i$ 其中 $n_1, \cdots, n_k$ 为任意正整数及零数。其输出频率是以载频 ω_0 为中心成对称分布。

2.2 频率对称集的变换及全阶对称集

(1) N 阶频率对称集的变换

由 2.1 给出了边频的表示式，而在实际中，边频的数目是有限的，也就是说 n_i 的取值是有限的正整数，令

$$|n_1| + \cdots + |n_k| = N \tag{1}$$

即

$$\sum_{i=1}^{k} |n_i| = N$$

将 $n_1, \cdots, n_k$ 的取值限制在不超过 N 的正整数范围内，此时的 N 称为 N 阶。

于是写出当有 k 个正弦信号，其频率分别为 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 调制在载频 ω_0 上，其输出信号频率的第 N 阶表达式为

$$\omega_0 \pm \sum_{i=1}^{k} n_i\Omega_i, \text{且} \sum_{i=1}^{k} |n_i| = N \tag{2}$$

其中 $|n_i|$ 的取值可为 0，1，…，N.

在(2)式中，假定：$N=0$，只有载波 ω_0；$N=1$，只有基频：$\omega_0 \pm \Omega_1$，…，$\omega_0 \pm \Omega_k$；$N=2$，只有二阶频，余此类推。

第 N 阶频率分布是以 ω_0 为中心，其对称元素是由上、下边频构成的。

假定存在一个 $\Delta\omega$，能分别整除 ω_0，及 Ω_1，…，Ω_k，即

$$\omega_0 = A_0\Delta\omega, \Omega_1 = a_1\Delta\omega, \cdots, \Omega_k = a_k\Delta\omega$$

则(2)式改写成

$$\Delta\omega\left(A_0 \pm \sum_{i=1}^{k} n_i a_i\right), \text{且} \sum_{i=1}^{k} |n_i| = N \tag{3}$$

事实上，$A_0 \pm \sum_{i=1}^{k} n_i a_i$ 且 $\sum_{i=1}^{k} |n_i| = N$ 表示式是个以 A_0 为中心的对称集，A_0 的大小只影响对称集的对称点的移动。为了研究问题的方便，对称点固定在 0 点上，即是说令 $A_0 = 0$.

令 $$\overset{N}{U}_k = \pm \sum_{i=1}^{k} n_i a_i \text{ 且} \sum_{i=1}^{k} |n_i| = N \tag{4}$$

$\overset{N}{U}_k$ 是以 0 点为对称集，其中 N 表示第 N 阶对称集，k 表示有 a_1，…，a_k，共 k 个数。

(2) 全阶对称集。从第一阶直至第 N 阶全部对称集所有元素的构成的对称集，称全阶对称集。全阶对称集用 $\overset{N\downarrow}{U}_k$ 表示写成

$$\overset{N\downarrow}{U}_k \{\overset{N}{U}_k, \overset{N-1}{U}_k, \cdots \overset{2}{U}_k \cdot \overset{1}{U}_k\}$$

符号 $$N\downarrow = \{N, N-1, \cdots, 2, 1\}$$

至此，已做到有 k 个正弦信号调制在载波上，其输出信号频率变换为第 N 阶对称集、全阶对称集。这样，可运用对称集理论进一步完成定理及推论的证明，实现信号频率设计。

定理 2.3 若 $\overset{N}{U}_k \cap \overset{q}{U}_k = \phi$，则必存在一个对称集 G，G 中任意对元素 $\pm a_{k+1}$ ($a_{k+1} \neq 0$) 满足

$$\overset{N}{U}_{k+1} \cap \overset{q}{U}_{k+1} = \phi$$

证明

将 $\overset{N}{U}_{k+1} \cap \overset{q}{U}_{k+1} = \phi$ 式展开写成

$$\begin{bmatrix} \overset{N}{U}_k \\ \overset{N-1}{U}_k [+] \{\pm a_{k+1}\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \overset{1}{U}_k [+] \{\pm (N-1) a_{k+1}\} \\ \pm N a_{k+1} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \overset{q}{U}_k \\ \overset{q-1}{U}_k [+] \{\pm a_{k+1}\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \overset{1}{U}_k [+] \{\pm (q-1) a_{k+1}\} \\ \pm q a_{k+1} \end{bmatrix} = \phi \tag{5}$$

(5) 式交集两边的所有元素应该互不相等。因此，令其左边任一子集与右边任一子集互不相等，然后应用对称集理论将 $\pm a_{k+1}$ 全部解出，(证明过程从略)。最后将 $\pm a_{k+1}$ 的解综合写出如下：

$$\{\pm a_{k+1}\} \cap \begin{bmatrix} \overset{N+q-1}{U_k}, \overset{N+q-3}{U_k}, \cdots, \overset{N-q-1}{U_k} \\ \frac{1}{2}\{\overset{N+q-2}{U_k}, \overset{N+q-4}{U_k}, \cdots, \overset{N-q-2}{U_k}\} \\ \frac{1}{3}\{\overset{N+q-3}{U_k}, \overset{N+q-5}{U_k}, \cdots, \overset{N-q-3}{U_k}\} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{1}{N+q-1}\{\overset{1}{U}_k\} \end{bmatrix} = \phi \tag{6}$$

推论 2.4 若 $\overset{N_{(q)}\downarrow}{U_k} \cap \overset{q}{U}_k = \phi$，其中 $N > q$ 则必存在对称集 G，G 中任意对元素 $\pm a_{k+1}$($a_{k+1} \neq 0$)满足

$$\overset{N_{(q)}\downarrow}{U_{k+1}} \cap \overset{q}{U}_{k+1} = \phi, \quad \text{式中 } N_{(q)}\downarrow = \{N, \cdots, q+1, q-1, \cdots, 1\}$$

证明

将 $\overset{N_{(q)}\downarrow}{U_{k+1}} \cap \overset{q}{U}_{k+1} = \phi$ 展开写成

$$
\begin{bmatrix} \overset{N}{U}_{k+1} \\ \overset{N+1}{U}_{k+1} \\ \vdots \\ \overset{q+1}{U}_{k+1} \\ \overset{q-1}{U}_{k+1} \\ \vdots \\ \overset{1}{U}_{k+1} \end{bmatrix} \cap \overset{q}{U}_{k+1} = \phi(r)
$$

(7)式交集两边的子集为空集，其中左边任意子集与右边子集之交集都是空集，，因此正好应用定理 2.3 的结果(6)式(证明过程从略)，将$\pm a_{k-1}$的解综合起来写出

$$
\{\pm a_{k+1}\} \cap \begin{bmatrix} \overset{N+q-1}{U_k} \\ \frac{1}{2i}\{\overset{N+q-2}{U_k}\} \\ \frac{1}{3i}\{\overset{N+q-3}{U_k}\} \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{(N+q-1)i}\{\overset{1}{U_k}\} \end{bmatrix} = \phi \tag{8}
$$

(8)式是计算有用信号最重要的公式。若信号为 q 阶，其余 N，$N-1$，…，$q+1$，$q-1$，…，直至一阶都视为干扰。显然 $\{\pm a_{k+1}\}$ 的解也是一个对称集。

3 (8) 式的简化及信号带宽的处理

3.1 (8)式的简化条件

(1) q 阶为有用信号频率，在工程中，通常取 $q=1$，即是说有用信号为基波信号。这样假定是符号实际的。

(2) $N_{(q)}\,\mathrm{i}$ 阶为干扰信号频率，已假定 $q=1$，则干扰阶即为 $N_{(q)}\,\mathrm{i} = N_{(1)}\,\mathrm{i} = \{N, N-1, \cdots, 2\}$. 事实上，当干扰阶愈高时，其携带能量就愈小，因此影响就愈小。在一般情况下取 $N_{(1)}\,\mathrm{i} = \{3, 2\}$ 就能满足工程要求，而其它高阶可不考虑。此时，只要 3 阶、2 阶干扰频率不与基波频率相同，就满足了工程上的要求。于是当 $q=1$，$N_{(q)}\,\mathrm{i} = \{3, 2\}$ 时，(8)式可简化写成

$$
\{\pm a_{k+1}\} \cap \begin{bmatrix} \overset{3}{U_k} \\ \frac{1}{2i}\{\overset{2}{U_k}\} \\ \frac{1}{3i}\{\overset{1}{U_k}\} \end{bmatrix} = \phi \tag{9}
$$

(9)式中

$$
\frac{1}{2i}\{\overset{2}{U_k}\} = \left\{\overset{2}{U_k}, \frac{1}{2}\overset{2}{U_k}\right\}
$$

$$
\frac{1}{3i}\{\overset{1}{U_k}\} = \left\{\overset{1}{U_k}, \frac{1}{2}\overset{1}{U_k}, \frac{1}{3}\overset{1}{U_k}\right\}
$$

(3) 令 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1}$

在上述条件下，(9)式中$\pm a_{k+1}$的取值的绝对值一定要大于a_k. 再仔细分析(9)式定会做进一步简化。

已知$\frac{1}{2}\{\overset{2}{U}_k\}$对称集中的元素绝对值最大的元素是$a_k$，根据令$a_k < a_{k+1}$，因此$\frac{1}{2}\{\overset{2}{U}_k\}$可以略去不考虑。同理，$\frac{1}{2}\{\overset{1}{U}_k\}$及$\frac{1}{3}\{\overset{1}{U}_k\}$都可略去，不予考虑。这样，(9)式又进一步简化写成

$$\pm a_{k+1} \cap \{\overset{3}{U}_k \cdot \overset{2}{U}_k\} = \phi \tag{10}$$

(10)式是比较简单的，利用(10)式可以编制不干扰表，供设计者选择。

3.2 信号带宽处理

假定信号带宽$=\Delta \cdot \Delta\omega$，可见信号带宽与数带$\Delta$有关，解决了数带问题，信号带宽也就解决了。

图 3

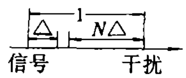

图 4

(1) 数带Δ与a_1的关系（a_1是起始值）。当出现数带并附在信号元素之后，仍然要求对每一个干扰信号（含数带）都不应进入有用信号带内。当$N>q$时，N阶为干扰，q阶为信号，则有（如图3所示）

$$Na_1 - N\Delta \geqslant qa_1 + q\Delta$$

解得

$$a_1 \geqslant \frac{N+q}{N-q}\Delta \tag{11}$$

(2)数带大小的确定。按照(10)式($q=1$，$N_{(1)}\,\mathbf{i} = \{3, 2\}$)可以编制出不干扰表。这种不干扰表反映的信号集的元素与干扰集的元素之间的最小间隔等于1. 当数带依附在N阶干扰集元素上摆动到一侧的幅度为$N\Delta$，有用信号元素（含数带）要有效地避开N阶干扰，就必须满足（如图4所示）：$N\Delta+\Delta\leqslant 1$.

解得

$$\Delta \leqslant \frac{1}{N+1} \tag{12}$$

4 结 束 语

根据设计者不同需要，可将(8)式作相应简化，从而制定出各种不干扰表。作者编制出两种。一是取$q=1$，$N_{(1)}\,\mathbf{i} = \{3, 2\}$，$a_1=1$，$k+1=4$，$a_4$的最大取值不超过20. 利用(10)式编制的不干扰表有536种组合。二是取$q=1$，$N_{(1)}\,\mathbf{i} = \{3, 2\}$，$a_1=1$，$k+1=5$，$a_5$的最大值不超过20. 利用(10)式编制的不干扰表只有5种组合。当然也可编制使用较为广泛的不干扰表。如取$q=1$，$N_{(1)}\,\mathbf{i} = \{5, 4, 3, 2\}$，$a_1=1$，$k+1=10$，$a_{k+1}$的最大值不超过200. 根据这些条件，可将(8)式简化，然后再采取将k值由0逐一增加到9的方法计算制定不干扰表。这种不干扰表能在一个狭小地域内（如航空母舰）研制大量多频段、多频率电子设备的总体设计时提供一种最佳的选择。

Symmetric Assemblage and Its Application in Radio Signal Frequency Design

Ma Xilin
(Education Training Department of COSTIND)

Abstract

On the basis of the research for symmetric assemblage theory, this article provides a new method of eliminating interference among radio signal frequencies. Using this method, the author also draws up a concise and practical "non－interference table", by which multichannel radio signal frequencies can be available in the narrow field (such as aircraft carrier).

Key words signal design, frequency. symmetric assemblage

中国五大防护林体系

我国正在建设世界瞩目的五大防护林体系，为改善我国生态环境而努力。

1. "三北"防护林体系。从新疆乌孜别里山口至黑龙江宾县，横贯西北、华北北部、东北西部13个省、市和自治区，乔木、灌木、草原结合，制服风沙，保持水土。它是保护我国42.4%国土上生态环境的绿色长城。

2. 长江中上游防护林体系。以青海高原、四川盆地，到江汉平原、湘赣丘陵"两湖"，沿长江两岸140多个县市，人工造林，保持水土，防洪抗旱，避免长江成为第二条黄河，保护长江流域经济区。

3. 平原防护林体系。从松辽、华北、渭汾、淮北、江汉、太湖、洞庭、鄱阳平原到长江、珠江三角洲、广大平原、半平原地区，900多个县市，积极营造林木，保护农田，避免沙化，保护全国40%以上耕地的生态环境。

4. 太行山绿化工程。南起黄河、北接恒山、燕山山脉，绵亘400多公里的太行山区，包括100多个县（区），展开绿化，从生态环境上屏障以北京为中心的经济文化区和华北大平原。

5. 沿海防护林体系。在万里海疆，以辽东半岛、山东半岛，经江、浙、闽、粤，直到广西北仑河口，近200个县（市、区）营造人工林带，减轻来自海上的风潮灾害，也为沿海经济开发区提供环境保护。