国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONALIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第 14 卷第 3 期　1992 年 9 月　Vol. 14 No. 3

# 锥比率数据包络分析模型的若干性质

张干宗　刘建雄

（系统工程与应用数学系）

**摘　要**　本文针对锥比率数据包络分析模型，对 DEA 有效决策单元的存在性、几种 DEA 有效性之间的关系、输入（出）锥和决策锥对 DEA 有效性的影响以及对应生产可能集的性质等问题进行了研究，得出了有关结论。

**关键词**　决策，模型，数据包络分析，锥比率，DEA 有效性

**分类号**　O221.5

数据包络分析（DEA）方法是由著名运筹学家 A. Charnes 和 W. W. Cooper 等人在 1978 年提出的[1]。这是一种多指标决策方法，也是一种非参数统计分析的新方法，它根据一组决策单元的输入输出观察值来推断决策单元间的相对有效性，判断决策单元对应点是否位于生产可能集的前沿面。第一个 DEA 模型是 $C^2R$ 模型，它对应的生产可能集是一个凸锥，其前沿面的点不仅技术有效也是规模有效性的。利用这种模型判断一个决策单元的相对有效性时，实际上是选取对该决策单元最有利的输入、输出权系数。但在大多数实际问题中，各项输入或输出的重要程度不尽相同，甚至差异很大。为此，A. Charnes, W. W. Cooper, Q. L. Wei 和 Z. M. Huang 于 1987 年提出了一种锥比率 DEA 模型 $C^2WH$[2]。这一模型体现了对输入、输出权系数选取的限制，同时也体现了对不同决策单元的偏好。这一模型的对应生产可能集仍为凸锥。但对于许多应用问题，锥性条件实际上并不成立。为此笔者在文［3］中提出并研究了另一种锥比率 DEA 模型，称之为 $C^2ZL$ 模型。它保留了 $C^2WH$ 模型的优点，同时不要求对应生产可能集满足锥性条件，从而可用于单纯地评价决策单元间的相对技术有效性。本文对这两种锥比率 DEA 模型的若干性质作了进一步的研究，得出了有关结论。

## 1　DEA 有效决策单元的存在性

关于 DEA（$C^2ZL$）有效决策单元的存在性已在文［3］中进行了讨论。这里仅讨论 DEA（$C^2WH$）有效决策单元的存在性。$C^2WH$ 模型可表为

$$\begin{aligned}&\max \mu^T Y_0\\&\text{s.t. } \omega^T \boldsymbol{X} - \mu^T \boldsymbol{Y} \in K\\&\omega^T X_0 = 1, \omega \in V, \mu \in U\end{aligned}$$

* 1990 年 12 月 16 日收稿

式中 $X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$X_j$ 为决策单元 $j$ 的输入向量；$Y=(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 为 $s\times n$ 阶矩阵，$Y_j$ 为决策单元 $j$ 的输出向量。$X_0$，$Y_0$ 分别为 $X_{j0}$，$Y_{j0}$的简记。$V\subset E_m^+$，$U\subset E_s^+$，$K\subset E_n^+$ 均为闭凸锥，且 $\mathrm{int}V\neq\varphi$，$\mathrm{int}U\neq\varphi$. 为叙述方便，称 $V$ 为输入锥，$U$ 为输出锥，$K$ 为决策锥，并用 DEA（$V$，$U$，$K$）表示对于给定的 $V$，$U$ 和 $K$ 全体 DEA（$C^2WH$）有效决策单元的集合。

**定理 1** 对于 $K=E_n^+$ 的 $C^2WH$ 模型，至少存在一个 DEA（$C^2WH$）有效的决策单元。即 DEA（$V$，$U$，$E_n^+$）$\neq\phi$.

**证明** 由于 $\mathrm{int}V\neq\phi$，可在 $V$ 中选取 $m'$ 个点，其中任意两点与原点不共线。设为 $a_1, a_2, \cdots, a_{m'}$，它们可决定一多面凸锥

$$V_1=\left\{\sum_{i=1}^{m'}a_i^T\omega_i'\,|\,\omega_i'\geqslant 0\right\}\triangleq\{A^T\omega'\,|\,\omega'\geqslant 0\}$$

显然 $V_1\subset V$，同理可作多面凸锥

$$U_1=\left\{\sum_{i=1}^{s'}b_i^T\mu_i'\,|\,\mu_i'\geqslant 0\right\}\triangleq\{B^T\mu'\,|\,\mu'\geqslant 0\}$$

使 $U_1\subset U$. 由于 $V_1$，$U_1$ 和 $K=E_n^+$ 所对应的 $C^2WH$ 模型可写为

$$\begin{aligned}&\max\mu'^T(BY_0)\\ &\text{s.t.}\ \omega'^T(AX)-\mu'^T(BY)\geqslant 0\\ &\qquad \omega'^T(AX_0)=1,\omega'\geqslant 0,\mu'\geqslant 0\end{aligned}$$

这一模型可视为具有输入阵 $AX$ 和输出阵 $BY$ 的 $C^2R$ 模型。由文 [1] 第二章定理 12，至少存在一个决策单元 DEA（$C^2R$）有效，不妨设为决策单元 $j_0$. 从而存在 $\omega_0'>0$，$\mu_0'>0$，满足

$$\omega_0'^T(AX)-\mu_0'^T(BY)\geqslant 0,\omega_0'^T(AX_0)=1,\mu_0'^T(BY_0)=1$$

令 $\omega_0=A^T\omega_0'$，$\mu_0=B^T\mu_0'$，则 $\omega_0\in\mathrm{int}V_1$，$\mu_0\in\mathrm{int}U_1$，且

$$\omega_0^TX-\mu_0^TY\geqslant 0,\omega_0^TX_0=1,\mu_0^TY_0=1$$

即知决策单元 $j_0\in$ DEA（$V_1$，$U_1$，$E_n^+$）。由文 [1] 第三章定理 8，DEA（$V$，$U$，$E_n^+$）$\supset$ DEA（$V_1$，$U_1$，$E_n^+$）。所以 DEA（$V$，$U$，$E_n^+$）$\neq\Phi$.（证毕）

如果存在坐标单位向量 $e_i\overline{\in}K$（$e_i$ 表示第 $i$ 个分量为 1 的单位向量），则可能不存在 DEA（$C^2WH$）有效的决策单元。

**例** 考虑具有三个决策单元、单输入、单输出的 $C^2WH$ 模型。设决策单元 1，2，3 的输入数据分别为 1，1，2；输出数据分别为 1，10，3. 设 $V=E_1^+$，$U=E_1^+$，$K=\{(1,1,1)\lambda_1+(2,1,3)\lambda_2+(0,0,1)\lambda_3\,|\,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0\}$. 这时 $(1,0,0)\overline{\in}K$，$(0,1,0)\overline{\in}K$，且 $K$ 可表为 $K=\{\lambda\,|\,\lambda C\geqslant 0\}$，其中

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),\qquad C=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1/2\\0&0&1/2\end{bmatrix}$$

易知，决策单元 1 和 3 均非 DEA（$C^2WH$）有效。决策单元 2 亦非 DEA（$C^2WH$）有效。因为如若不然，必有 $\omega^TX_2=1$，从而 $\omega=1$；$\mu^TY_2=1$，从而 $\mu=1/10$，且 $\omega^T(XC)-\mu^T$

$(YC)\geqslant 0$. 但可算出

$$\omega^T(XC)-\mu^T(YC)=\left(\frac{9}{10},-\frac{9}{10},-\frac{1}{20}\right)$$

## 2 几种 DEA 有效性之间的关系

由文[1]第三章定理 8 可知，如果一个决策单元为 DEA($C^2WH$)有效，则该决策单元必为 DEA($C^2R$)有效。但一般情况下，这一命题的逆命题不成立。但可得出下述结论。

**定理 2** 设 $V=E_m^+, U=E_s^+, K\subset E_n^+$ 为多面凸锥。若指标集 $J=\{j|e_j\overline{\in}K\}$ 是单元素集 $\{j_0\}$，决策单元 $j_0$ 为 DEA($C^2R$)有效，则决策单元 $j_0$ 必为 DEA($C^2WH$)有效。

**证明** 不妨设 $j_0=1$. 设 $K=\{\lambda|\lambda^TC\geqslant 0\}$，其中 $C=(C_{ij})_{n\times n'}$。这时 $C^2WH$ 模型为

$$\begin{aligned}&\max \mu^TY_1\\ &\text{s.t.}\quad \omega^T(XC)-\mu^T(YC)\geqslant 0\\ &\qquad \omega^TX_1=1,\omega\geqslant 0,\mu\geqslant 0\end{aligned}$$

由 $e_1\overline{\in}K$ 可知，存在 $k\in\{1,\cdots,n\}$，使 $C_{1k}<0$。由 $e_i\in K$ $(i\neq 1)$ 可知

$$C_{ij}\geqslant 0(i=2,\cdots,n;j=1,\cdots.n')$$

已知决策单元 1 为 DEA（$C^2R$）有效，即存在 $\omega_0>0$，$\mu_0>0$，使

$$\mu_0^TY_1=1,\quad \omega_0^TX_1=1,\omega_0^T\boldsymbol{X}-\mu_0^T\boldsymbol{Y}\geqslant 0$$

又由

$$\omega_0^T(\sum_{i=1}^{n}C_{ij}X_i)-\mu_0^T(\sum_{i=1}^{n}C_{ij}Y_i)=\sum_{i=2}^{n}C_{ij}(\omega_0^TX_i-\mu_0^TY_i)\geqslant 0,j=1,\cdots,n'$$

可知 $\omega_0^T(XC)-\mu_0^T(YC)\geqslant 0$. 因而决策单元 1 为 DEA（$C^2WH$）有效。（证毕）

若指标集 J 至少含有两个元素，则不能保证定理 2 的结论成立。如前节所举之例，其决策单元 2 是 DEA（$C^2R$）有效的，但它非 DEA（$C^2WH$）有效。

关于 DEA（$C^2WH$）有效性与 DEA（$C^2ZL$）有效性和 DEA（$C^2GS^2$）有效性的关系，易知：若决策单元 $j_0$ 为 DEA（$C^2WH$）有效，则决策单元 $j_0$ 必为 DEA（$C^2ZL$）有效；若决策单元 $j_0$ 为 DEA（$C^2ZL$）有效，则决策单元 $j_0$ 必为 DEA（$C^2GS^2$）有效。

## 3 输入（出）锥和决策锥对 *DEA* 有效性的影响

对于 $C^2WH$ 模型，笔者在文［4］中讨论了输入（出）锥和决策锥对 DEA（$C^2WH$）有效性的影响。这里仅对 $C^2ZL$ 模型来讨论。$C^2ZL$ 模型可表为如下的凸规划：

$$\begin{aligned}&\max\ \mu^TY_0+\mu_0\\ &\text{s.t.}\ \omega^T\boldsymbol{X}-\mu^T\boldsymbol{Y}-\mu_0e\in K\\ &\qquad \omega^TX_0=1,\omega\in V,\mu\in U,\mu_0\in E_1\end{aligned}$$

其中，$e$ 表示分量全为 1 的 $n$ 维行向量，$V\subset E_m^+$，$U\subset E_s^+$，$K\subset E_n^+$ 均为闭凸锥，且 $\mathrm{int}V\neq\phi$, $\mathrm{int}U\neq\phi$，并设 $X_j\in\mathrm{int}(-V^*),Y_j\in\mathrm{int}(-U^*)(j=1,\cdots,n)$，$V^*$，$U^*$ 分别表 $V$、$U$ 的负极锥。若上述问题存在可行解 $\omega^0$，$\mu^0$，$\mu_0^0$，满足

$$\omega^0\in\mathrm{int}V,\mu^0\in\mathrm{int}U,\mu^{0T}Y_0+\mu_0^0=1$$

则称决策单元 $j_0$ 为 DEA ($C^2ZL$) 有效，在 $C^2ZL$ 模型中，若取 $V=E_m^+$，$U=E_s^+$，$K=E_n^+$，便成为 $C^2GS^2$ 模型。

关于输入（出）锥和决策锥对 DEA ($C^2ZL$) 有效性的影响，有与文 [4] 相平行的下列结论。(证明从略)

**定理 3** 设决策单元 $j_0$ 为 DEA ($C^2GS^2$) 有效。若存在决策单元 $j_1$ 满足 $x_{1j_1}<x_{1j_0}$，$y_{ij1}\geqslant y_{ij0}$ ($i=1$，…，$s$)，则存在 $L>0$，使当选取 $V=\{\omega|\omega_1\geqslant l_2\omega_2+\cdots+l_m\omega_m,\ \omega_i\geqslant 0\ (i=2,\ \cdots,\ m)\}$ (其中 $l_i\geqslant L$，$i=2$，…，$m$)，$U=E_s^+$，$K=E_n^+$ 时，决策单元 $j_0$ 非 DEA ($C^2ZL$) 有效。

**定理 4** 设决策单元 $j_0$ 为 DEA ($C^2GS^2$) 有效。若存在决策单元 $j_1$ 满足 $x_{ij_1}\leqslant x_{ij_0}$ ($i=1.\ \cdots,\ t$)，其中至少一个成立严格不等式，且 $y_{ij_1}\geqslant y_{ij_0}$ ($i=1$，…，$s$)，则存在 $L_i>0$ ($i=t,\cdots,\ m-1$)，使当选取

$$V=\{\omega|\omega_i\geqslant l_i\omega_{i+1}(i=1,\cdots,m-1),\omega_m\geqslant 0\}$$

(其中 $l_i>0$ ($i=1$，…，$t-1$)，$l_i\geqslant L_i$ ($i=t$，…，$m-1$))，$U=E_s^+$，$K=E_n^+$ 时，决策单元 $j_0$ 非 DEA ($C^2ZL$) 有效。

**定理 5** 对于 $C^2ZL$ 模型，设 $K=\{\lambda|\lambda_1\geqslant\sum_{i=2}^{t}l_i\lambda_i,\lambda_i\geqslant 0(i=2,\cdots,n)\}$，其中 $2\leqslant t\leqslant n$，$l_i>0$ ($i=2$，…，$t$)。如果决策单元 1 为 DEA ($C^2ZL$) 有效，则决策单元 2 至 $t$ 均为 DEA ($C^2ZL$) 有效。

**定理 6** 对于 $C^2ZL$ 模型，设 $K=\{\sum_{i=2}^{n}e_i\lambda_i'+\sum_{k=1}^{r}b_k\lambda_{n+k}'|\lambda_i'\geqslant 0(i=2,\cdots,n+r)\}$，其中 $b_k=(b_{k1},\ \cdots,\ b_{kn})\in E_n^+$ ($k=1$，…，$r$). 如果决策单元 1 非 DEA ($C^2ZL$) 有效，且 $0<\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{b_{i1}/b_{ij_0}\}<+\infty$，其中 $j_0\in\{2,\ \cdots,\ n\}$，则决策单元 $j_0$ 亦非 DEA ($C^2ZL$) 有效。

## 4 对应生产可能集的性质

集合 $T=\{(X,Y)\ |$产出向量 $Y$ 可以由投入向量 $X$ 生产出来$\}$ 称为生产可能集。由于 $(X_j,\ Y_j)$ ($j=1$，…，$n$) 是观察到的生产活动，所以有 $(X_j,Y_j)\in T(j=1,\cdots,n)$。下面的结论指出，如果要求 $T$ 满足凸性、锥性和无效性，则导致 $C^2WH$ 模型所对应的生产可能集。

**定理 7** 生产可能集 $T$ 满足凸性、锥性和无效性当且仅当 $T=\{(X,Y)|(X,Y)\in(X\lambda,Y\lambda)+(-V^*,U^*),\lambda\in -K^*\}$，其中 $-V^*\supset E_m^+$，$U^*\supset -E_s^+$，$-K^*\supset E_n^+$ 均为凸锥。

**证明** 如果要求生产可能集 $T$ 满足凸性，锥性和无效性，则由 $(x_j,y_j)\in T(j=1,\cdots,n)$ 可知，对任意的 $\lambda\geqslant 0$，有 $(X\lambda,Y\lambda)\in T$；且对满足 $\hat{X}\geqslant X\lambda,\hat{Y}\leqslant Y\lambda$ 的任意 $(\hat{X},\hat{Y})$，有 $(\hat{X},\hat{Y})\in T$. 再由 $(\hat{X},\hat{Y})=(X\lambda,Y\lambda)+(\hat{X}-X\lambda,\hat{Y}-Y\lambda)$，其中 $\hat{X}-X\lambda\geqslant 0,\hat{Y}-Y\lambda\leqslant 0$，可知 $T$ 可表为：$Y=\{(X,Y)|(X,Y)\in(X\lambda,Y\lambda)+(P,Q),\lambda\in R\}$，其中 $P,Q,R$ 表示满足 $P\supset E_m^+$，$Q\supset -E_s^+$，$R\supset E_n^+$ 的集合。再由 $T$ 的凸性和锥性，对任意的 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\lambda_1$，$\lambda_2\in R$，$X^1$，$X^2\in P$，$Y^1$，$Y^2\in Q$，有：$\alpha$ [ $(X\lambda_1,\ Y\lambda^1)$ + $(X^1,\ Y^1)$] $+\beta$ ( $(X\lambda_2,\ Y\lambda_2)$ + $(X^2,\ Y^2)$] $\in T$，即 $(X,Y)(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)+(\alpha X^1+\beta X^2,\alpha Y^1+\beta Y^2)\in T$，从而有 $\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2\in$

$R, \alpha X^1 + \beta X^2 \in P, \alpha Y^1 + \beta Y^2 \in Q$．由此可知，$P$，$Q$，$R$均为凸锥。用$P^*$，$Q^*$，$R^*$分别表示$P$，$Q$，$R$的负极锥，则$P^* \subset -E_m^+$，$Q^* \subset E_s^+$，$R^* \subset -E_n^+$。记$V=-P^*$，$U=Q^*$，$K=-R^*$，则$V$，$U$，$K$均为闭凸锥且满足$V \subset E_m^+$，$U \subset E_s^+$，$K \subset E_n^+$。于是，$T$可表为$T = \{(X,Y) | (X,Y) \in (X\lambda, Y\lambda) + (-V^*, U^*), \lambda \in -K^*\}$，其中$-V^* \supset E_m^+, U^* \supset -E_s^+, -K^* \supset E_n^+$ 均为凸锥。

反之，由上式定义的集$T$也必满足凸性、锥性和无效性。由于$V^*, U^*, K^*$均为凸锥，从而容易验证$T$满足凸性和锥性。下面验证$T$满足无效性。

设$(X,Y) \in T$，即存在$\lambda \in -K^*$和$X^1 \in -V^*, Y^1 \in U^*$，使$(X,Y) = (X\lambda, Y\lambda) + (X^1, Y^1)$. 对任意的$\hat{X} \geqslant X$，由于$\hat{X} - X \in E_m^+ \subset -V^*$，和$-V^*$为凸锥，可知$X^1 + (\hat{X} - X) \in -V^*$. 从而，有$(\hat{X}, Y) = (X\lambda, Y\lambda) + (X^1 + (\hat{X} - X), Y^1) \in T$. 同理可知，对任意的$\hat{Y} \leqslant Y$，有$(X, \hat{Y}) \in T$.（证毕）

定理7给出的生产可能集为$C^2WH$模型所对应的生产可能集。如果要求生产可能集不仅满足凸性、锥性和无效性，还满足最小性，则

$$T = \{(X,Y) | (X,Y) \in (X\lambda, Y\lambda) + (E_m^+, -E_s^+), \lambda \in E_n^+\}$$

即

$$T = \{(X,Y) | X \geqslant X\lambda, Y \leqslant Y\lambda, \lambda \geqslant 0\}$$

这就是$C^2R$模型所对应的生产可能集。若要求生产可能集满足凸性、无效性和最小性，不要求满足锥性，便是$C^2GS^2$模型所对应的生产可能集：

$$T = \{(X,Y) | X \geqslant X\lambda, \quad Y \leqslant Y\lambda, \quad \lambda \geqslant 0. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\}$$

若仅要求生产可能集满足凸性和无效性，而不要求满足锥性和最小性，便是$C^2ZL$模型所对应的生产可能集：

$$T = \{(X,Y) | (X,Y) \in (X\lambda, Y\lambda) + (-V^*, U^*), \lambda \in -K^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\}.$$

## 参 考 文 献


1 魏权龄. 评价相对有效性的DEA方法. 中国人民大学出版社，1988

2 Charnes A, Cooper W W, Wei Q L, Huang Z M Cone Ratio Data Envelopment Analysis and Multi-objective Programming, The University of Texas at Austin. Center for Cybernetic Studies Report CCS 559, 1986

3 张干宗，刘建雄. 一种锥比率数据包络分析模型及有关结论，国防科技大学学报，1992，14(1)

4 张干宗，刘建雄. 锥比率条件对DEA有效性的影响. 系统工程，1991，9 (3)


# Some Properties of the Cone Ratio Data Envelopment Analysis Model


Zhang Ganzong　Liu Jianxiong

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

**Abstract**

This paper studies several problems for the cone ratio data envelopment analysis model: the existence of DEA effective decision-making units, the relations among several DEA efficiencies, the influence of input (output) cone and decision cone to DEA efficiency, and the properties of possible product set. The conclusions concerned have been obtained.

**Key words** decision making, model, data envelopment analysis, cone ratio, DEA efficiency

---

(上接 73 页)

**Abstract**

A model of computer speech-graphics system is proposed in this paper. The paper describes its principle and its design mothod, and a simple computer speech-graphics system based on this mothod is developed. It consists of a TI-SPEECH speech processing system , a KX-600 graphics display system and an IBM-PC/AT computer. The graphics software package is MGP 2D military graphics package which is implemented in KX-600 graphics display system. It possesses the Transparent keyboard ability to support speech input. Finally, the paper proposes an intelligent computer graphics display model which consists of speech input , and GKD-PROGKS graphics system . It provides some valuable recommendations for the development of intelligent computer graphics display system.

**Key words** speech signal processing, display, microcomputer, transparent keyboard, speech-graphics system