国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第3期 1992年9月 Vol. 14 No. 3

半线性热传导方程 Cauchy 问题全局经典解的存在性与唯一性

孔 荣 张 蕊
(系统工程与应用数学系)

摘 要 本文证明了热传导方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u^a & x \in R, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

当实数 $a>3$ 时，只要初值 $\varphi(x)$ 在某些 Sobolev 空间中的范数充分小，就有唯一的全局经典解，且当 $t \to +\infty$ 时，这个解具有一定的衰减性。本文所用的方法使得 Cauchy 问题中的 a 的值同解与初值所在的空间紧密联系，a 的值越大，解的性质越好。

关键词 非线性偏微分方程，热传导方程，方程解，Cauchy 问题，全局解，经典解。
分类号 O175.24

本文将讨论如下的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u^a, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

证明此问题全局经典解的存在性与唯一性。

关于所考虑的问题的存在性与唯一性，许多数学工作者作过研究（可参看[1]，[2]，[3]）。作者在 a 为满足某个条件的整数的情况下证明了当初值在某个函数空间中很小时，全局解的存在与唯一。而在[4]中，讨论了当 $a>3$ 且为实数时，小初值情况下全局解的存在与唯一，其中要求初值满足较高的条件：$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \delta e^{-kx^2}$. 这里 $\delta>0$，$k>0$ 为常数，且所使用函数空间也不是通常的 Sobolev 空间。

本文的工作力求得到，当 $a>3$，且为实数时，只要初值 $\varphi(x)$ 在某个 Sobolev 中很小，则问题 (1) 在相应函数空间存在很小的唯一经典解。

参见文[4]，当 $\varphi(x)$ 非负时，(1)的解也是非负的，从而 u^a 不会有任何误会。这里我们所说的函数非负是在 Sobolev 意义下的，本文将始终假设 $\varphi(x) \geqslant 0$.

1 几个不等式

本段中我们将列举一些常用的不等式而不一一证明，仅指出结论的出处。

引理1 设 $a_i \geqslant 0$，$a_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, m$，且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = a > 1, a_i < a, i = 1, \cdots, m.$$

* 1991年6月21日收稿

则存在常数 $C=C(a_1,\cdots,a_m,m)>0$，使

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_m^{a_m}\leqslant C(a_1^a+a_2^a+\cdots+a_m^a) \tag{2}$$

当 $n=2$ 时，此引理的证明可参见[5]. 一般情况应用归纳法。

引理 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m\geqslant 0$，$p>1$，则存在常数 $C=C(p)>0$，使

$$a_1^p+a_2^p+\cdots+a_m^p\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_m)^p\leqslant C(p)(a_1^p+\cdots+a_m^p) \tag{3}$$

当 $m=2$ 时，此引理的证明可参见[5]。一般情形使用归纳法。

在先验估计的推导中将涉及 $u^a(x,t)$ 的导数。下面是一些有关的代数估计。

引理 3 设 $a(x),b(x)\geqslant 0$，$a>3$，则存在常数 $C=C(a)$，使

$$|a^a-b^a|\leqslant C(a^{a-1}+b^{a-1})|a-b| \tag{4}$$

$$|D_x(a^a-b^a)|\leqslant C(a^{a-1}+|a_x|^{a-1}+b^{a-1}+|b_x|^{a-1})\cdot(|a-b|+|a_x-b_x|) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}|D_x^2(a^a-b^a)|\leqslant{}& C(a^{a-1}+|a_x|^{a-1}+|a_{xx}|^{a-1}+b^{a-1}+|b_x|^{a-1}+|b_{xx}|^{a-1}\\&\cdot(|a-b|+|a_x-b_x|+|a_{xx}-b_{xx}|)\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $D_xa=a_x=\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}$，依次类推，等等。

此引理中(4)的证明可在[4]中找到。式(5)和(6)通过直接计算并利用引理 1 可得。

此外，还将不断地引用多个函数乘积的 Holder 不等式，其证明可参看[6]。

2 基本估计

将问题(1)化为积分方程(设 $a>1$)

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}u^a(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

或

$$u(x,t)=S(t)\varphi+\int_0^tS(t-\tau)u^a(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

其中 $S(t)$是对应的积分算子。

先来估计 $D_x^m(S(t)\varphi)$的 $L^r(R)$范数，其中 m 为非负整数。显然

$$D_x^mS(t)\varphi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}D_\xi^m\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

引理 4 设 $1\leqslant r<+\infty$，则有

$$\|D_x^mS(t)\varphi\|_{L^r(R)}\leqslant\|D_x^m\varphi\|_{L^r(R)} \tag{10}$$

证明 若 $r=1$，在(9)式两边积分即得(10)。下设 $r>1$.

取 ρ，$\rho'>1$ 待定，使 $1/\rho+1/\rho'=1$，则由 Hö]lder 不等式，有

$$\|D_x^mS(t)\varphi\|_{L^r(R)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t\rho}\frac{r}{r-1}}d\xi\right)^{r-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{r(\xi-x)^2}{4t\rho'}}|D_\xi^m\varphi(\xi)|^r\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{r-1}{r}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\frac{1}{(\sqrt{r})^{\frac{1}{r}}}(\sqrt{\rho})^{\frac{r-1}{r}}(\sqrt{\rho'})^{\frac{1}{r}}\|D_x^m\varphi\|_{L^r(R)}=\|D_x^m\varphi\|_{L^r(R)}$$

在上式中，取 $\rho'=r$，最右边的等式成立。

引理 5 设 $1\leqslant r,p,q<+\infty$，$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，则

$$\|S(t)\varphi\|_{w^{m,r}(R)}\leqslant C_pt^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\|\varphi\|_{w^{m,q}(R)} \tag{11}$$

其中 $C_p=(2\pi)^{-(1-\frac{1}{p})}\frac{1}{(\sqrt{p})^{\frac{1}{p}}}$。

证明 (见[6])

引理 6 设 $1\leqslant r,\ p,\ q<+\infty$，$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，则有

$$\| S(t)\varphi \|_{w^{m,r}(R)} \leqslant C_p(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} N_{m,r,q}(\varphi) \tag{12}$$

其中 $N_{m,r,q}(\varphi)=\max\{\|\varphi\|_{w^{m,r}(R)},\ \|\varphi\|_{w^{m,q}(R)}\}$

此引理是引理 4 与引理与的直接推论。注意到式(12)既在 $t\to+\infty$ 时衰减又在 $t=0$ 无奇性。

下面来估计(8)中第 2 项。令

$$v(x_1t)=\int_b^t S(t-\tau)u^a(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

引理 7 设 $a>1$，则存在常数 $C=C(p,\varphi,a)$ 使

$$\| v(\cdot,t)\|^r_{L^r(R)} \leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} \| u(\cdot,\tau)\|^r_{L^r(R)}\mathrm{d}\tau\right)^a \tag{14}$$

其中参数 r，p，θ，φ 满足下列关系

$$+\infty>r,p>1,\frac{1}{p}+\frac{a-1}{r}=1 \tag{15}$$

$$\theta+\varphi(1-\frac{p}{r})=1-\frac{1}{r} \tag{16}$$

$$\varphi p<3 \tag{17}$$

证明 设 $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，$\psi$，$\theta$，$\varphi$ 满足：$\psi p/r+\theta\ (1-q/r)\ +\varphi\ (1-p/r)\ =1$. 利用关于多个函数乘积的 Aölder 不等式，得

$$|v(x,r)|^r=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^r}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^{\psi}}\right)^{\frac{p}{r}}(u^a)^{\frac{q}{r}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{u^a}{(\sqrt{t-\tau})^{\theta}}\right)^{1-\frac{q}{r}}\left(\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^{\varphi}}\right)^{1-\frac{p}{r}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^r$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^r}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2 p}{4(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^{\varphi p}}u^{aq}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]$$

$$\cdot\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2 p}{4(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^{\varphi p}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{r}{p}-1}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^{aq}}{(\sqrt{t-\tau})^{\theta q}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{r}{q}-1}$$

注意到 $\varphi p<3$，上面不等式两端关于 x 积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}v^r\mathrm{d}x\leqslant C(p,\varphi,r)t^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(\frac{r}{p}-1)}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{-\frac{\theta q}{2}}u^{aq}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{r}{q}-1}$$

$$\cdot\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\varphi p-1)}u^{aq}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]$$

其中 $C\ (p,\ \varphi,\ r)\ =\dfrac{1}{(2\sqrt{\pi})^T}\left(\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}\right)^{\frac{r}{q}}\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\ (\varphi p-1)\right)^{\frac{r}{p}-1}}$

令 $r=aq$，$\frac{1}{2}\theta q=\frac{1}{2}\ (\psi p-1)$，则 r，p，θ，φ 满足(15)及(16)。由于 φ 仍有任意性，故(17)也可得到满足。(14)得证。

引理 8 设 $a>1$，$0\leqslant m\leqslant[a]$（a 的整数部分），则有

$$\| D_x^m v(\cdot\ t,)\|^r_{L^r(R)}\leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)}\left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}}\| u(\cdot,\tau)\|^r_{w^{m,r}(R)}\mathrm{d}\tau\right]^a \tag{18}$$

$$\| v(\cdot,t)\|^r_{w^{m,r}(R)}\leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}}\| u(\cdot,\tau)\|^r_{w^{m,r}(R)}\mathrm{d}\tau\right)^a \tag{19}$$

$$\| u(\cdot,t) \|^{r}_{w^{m,r}(R)} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} N^{r}_{m,r}(\varphi)$$

$$+ C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2\alpha}} \| u(\cdot,\tau) \|^{r}_{w^{m,r}(R)} \mathrm{d}\tau) \right]^{\alpha} \tag{20}$$

其中 r，p，θ，φ 满足式(15)，(16)，(17)，$C=C$ (p，φ，m，α) 为常数，而

$$N_{m,r}(\varphi) = \max\{ \| \varphi \|_{w^{m,r}(R)}, \| \varphi \|_{w^{m,\frac{r}{\alpha}}(R)} \} \tag{21}$$

证明 直接在 v 的表达式的积分号下求导，并利用引理 1 估计之，再仿照引理 7 的证明便可得式(18)。(19)式是引理 2 与(18)式的直接推论，而(20)式又是引理 6 与(19)式的直接结果。

3 强解

引入度量空间。设整数 $m\geqslant 0$，实数 $+\infty > r > 1$，$\beta > 1$，$\delta > 0$，记

$$X_{m,r,\beta,\delta} = \{u(x,t) \geqslant 0 | D(u) \leqslant \delta, u(x,t) \in C_0((0,+\infty), w^{m,r}(R))\} \tag{22}$$

其中

$$D(u) = \sup_{t\geqslant 0} (1+t)^{\frac{\beta}{r}} \| u(\cdot,t) \|_{w^{m,r}(R)} \tag{23}$$

则类似于 [6]，容易验证

引理 9 $X_{m,r,\beta,\delta}$ 在度量 D (u) 下为非空完备的度量空间。

为证主要结论，将用 Banach 不动点定理。

令

$$Tu = s(t)\varphi + \int_0^t S(t-\tau) u^{\alpha}(\cdot,\tau) \mathrm{d}\tau \tag{24}$$

引理 10 设 $0\leqslant m \leqslant [\alpha]$，$\alpha > 3$，则存在 $\beta > 1$，使

$$\| \varphi \|_{w^{m,r}(R)} + \| \varphi \|_{w^{m,\frac{r}{\alpha}}(R)} \leqslant \varepsilon (> 0) \tag{25}$$

且 ε 和 δ (>0) 都充分小时，T 将 $X_{m,r,\beta,\delta}$ 映到自身，其中 $\alpha < r < \frac{3}{2}$ ($\alpha - 1$)。

证明 设 $u \in X_{m,r,\beta,\delta}$，则 u 满足式(23)，代入式(20)得

$$\| Tu(\cdot,t) \|^{r}_{w^{m,r}(R)} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} \varepsilon^{r} + C\delta^{r\alpha} (1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{\alpha\alpha}} (1+\tau)^{-\beta} \mathrm{d}\tau \right]^{\alpha}$$

经过简单的计算，可断言：只要 $\beta > 1$，$\theta r / 2\alpha < 1$，就有

$$I = \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2\alpha}} (1+\tau)^{-\beta} \mathrm{d}\tau \leqslant C(1+t)^{-\frac{\theta r}{\alpha\alpha}} \tag{26}$$

于是由式(26)，有

$$\| Tu(\cdot,t) \|^{r}_{w^{m,r}(R)} \leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)} \varepsilon^{r} + C\delta^{r\alpha} (1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)-\frac{\theta r}{2}}$$

下证当 ε 与 δ 充分小时，必有：$\| Tu(\cdot,t) \|^{r}_{w^{m,r}(R)} \leqslant \delta^{r} (1+t)^{-\beta}$

为此只须证对 $\beta > 1$

$$-\frac{1}{2}(\alpha-1) + \beta \leqslant 0 \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha) - \frac{\theta r}{2} + \beta \leqslant 0 \tag{28}$$

因 $\alpha > 3$，故式(27)显然成立。另外，$\varphi p < 3$，又在式(26)的推导中要求：$\theta r / 2\alpha < 1$， (29)

为证满足(28)的 β(>1)存在，只须适当选取 r 使式(17)及式(29)成立的同时还有

$$\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha) - \frac{\theta r}{2} < -1 \tag{30}$$

由式(16)得，$\theta = 1 - \frac{1}{r} - \varphi p (1 - \frac{\alpha}{r})$，代入式(30)得 $r < \frac{3}{2}(\alpha - 1)$。又因 $r > \alpha$，故 r 须满足

$$\alpha < r < \frac{3}{2}(\alpha - 1) \tag{31}$$

因 $\alpha > 3$，故满足式(31)的 r 存在，从而满足式(27)、(28)的 β 必存在。注意到此为止还未对 θ 与 φ 加限

制。容易验证式(31)成立时满足式(17)、(29)的 θ 和 φ 存在。(证毕)

下证当 $m=2$ 时，T 为压缩映射。

引理 11 设 $a>3$，$a<r<\frac{3}{2}(a-1)$，β 如引理 10 所确定，则当 $\delta>0$ 充分小时，$T:X_{2,r,\beta,\delta}\to X_{2,r,\beta,\delta}$ 为压缩映射。

证明 设 v_1，$v_2\in X_{2,r,\beta,\delta}$，且 $u_1=Tv_1$，$u_2=Tv_2$，则 $w=u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} + (v_1^a - v_2^a) \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{32}$$

在引理 3 中取 $a=v_1$，$b=v_2$，则相应于(4)，(5)，(6)的不等式成立。以下来估计 $\| Tv_1-Tv_2 \|_{w_{2,r(R)}}$。注意到 $1\leqslant r$，p，$q<+\infty$ 且 $1+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$，最后令 $r=aq$，取 ψ，θ，φ 使 $\psi\frac{p}{r}+\theta\left(1-\frac{q}{r}\right)+\varphi\left(1-\frac{p}{r}\right)=1$，利用多重 Hölder 不等式，有

$$|Tv_1-Tv_2|^r \leqslant \left(\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\right)^r \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} (v_1^{a-1}+v_2^{a-1})|v_1-v_2|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^r$$

$$\leqslant \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}\psi p}}{(\sqrt{t-\tau})^{\psi p}} |v_1-v_2|^r \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right] \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1^{a-1}+v_2^{a-1}}{(\sqrt{t-\tau})^{\theta q}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{r}{q}-1}$$

$$\cdot \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}\varphi p}}{(\sqrt{t-\tau})_{\varphi p}} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{r}{p}-1}$$

因而得

$$\| Tv_1-Tv_2 \|_{L^r(R)}^r \leqslant Ct^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)} \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} (v_1^{a-1}+v_2^{a-1})^{\frac{r}{a-1}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{a-1}$$

$$\cdot \left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)} |v_1-v_2|^r \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right] \tag{33}$$

在此，没有必要让(33)右端括号中$(t-\tau)$的幂次相等，而只要求

$$\varphi p<3,\frac{\theta r}{2a}<1,\frac{1}{2}(\varphi p-1)<1 \tag{34}$$

由引理 10 的证明知，当 $a<r<\frac{3}{2}(a-1)$，$\frac{1}{p}+\frac{a-1}{r}=1$ 时，满足式(35)的 ψ，θ，φ 存在。应用引理 2，有

$$\| Tv_1-Tv_2 \|_{L^r(R)}^r \leqslant C(t+1)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} \left(\| v_1(\cdot,\tau) \|_{L^r(R)}^r \right.\right.$$

$$\left.\left. + \| v_2(\cdot,\tau) \|_{L^r(R)}^r \mathrm{d}\tau\right]^{a-1} \left(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)} \| v_1-v_2 \|_{L^r(R)}^r \mathrm{d}\tau\right)$$

类似地

$$\| D_x(Tv_1-Tv_2) \|_{L^r(R)}^r \leqslant t^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)r-a)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} \left(\| v_1(\cdot,\tau) \|_{w^{1,r}(R)}^r \right.\right.$$

$$\left.\left. + \| v_2\cdot\tau) \|_{w^{1,r}(R)}^r \mathrm{d}\tau\right]^{a-1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)} \| v_1-v_2 \|_{w^{1,r}(R)}^r \mathrm{d}\tau\right]$$

$$\| D_x^2(Tv_1-Tv_2) \|_{L^r(R)}^r \leqslant Ct^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} \left(\| v_1(\cdot,\tau) \|_{w^{2,r}(R)}^r \right.\right.$$

$$\left.\left. + \| v_2(\cdot,\tau) \|_{w^{2,r}(R)}^r \mathrm{d}\tau\right]^{a-1} \cdot \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)} \| v_1-v_2 \|_{w^{2,r}(R)}^r \mathrm{d}\tau\right]$$

综合上面三个不等式，有

$$\| Tv_1-Tv_2 \|_{w^{2,r}(R)}^r \leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}} \left(\| v_1(\cdot,\tau) \|_{w^{2,r}(R)}^r \right.\right.$$

$$+\ \|v_2(\cdot,t)\|^r_{w^{2,r}(R)})\mathrm{d}\tau]^{a-1}\left[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}\|v_1-v_2\|^r_{w^{2,r}(R)}\mathrm{d}\tau\right]$$

由于 $\|v_i(\cdot,t)\|^r_{w^{2,r}(R)}\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta}$，$i=1,2$，故

$$\|Tv_1-Tv_2\|^r_{w^{2,r}(R)}\leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)}\delta^{(a-1)r}\cdot\left[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}}(1+\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau\right]^{a-1}$$

$$\cdot\left[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\varphi p-1)}(1+\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau\right]D^r(v_1-v_2)$$

注意 $D^r(v_1-v_2)\sup\limits_{t\geqslant0}(1+t)^{\beta}\|v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t)\|^r_{w^{2,r}(R)}$，类似于(26)式的证明可得

$$\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}(1+\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}$$

$$\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}}(1+\tau)^{-\beta}\mathrm{d}\tau\leqslant C(1+t)^{-\frac{\theta r}{2a}}$$

于是有

$$\|Tv_1-Tv_2\|^r_{w^{2,r}(R)}\leqslant C\delta^{r(a-1)}$$

$$\cdot(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)-\frac{\theta r}{2a}(a-1)-\frac{1}{2}(\psi p-1)}D^r(v_1-v_2)$$

类似于引理 10 的证明，当 $a<r<\frac{3}{2}(a-1)$ 时，必存在 $\beta>1$，使 $\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)-\frac{\theta r}{2a}(a-1)-\frac{1}{2}(\psi p-1)\leqslant-\beta$，从而 $(1+t)^{\beta}\|Tv_1-Tv_2\|^r_{w^{2,r}(R)}\leqslant C\delta^{(a-1)r}D^r(v_1-v_2)$ 即 $D(Tv_1-Tv_2)\leqslant C^{\frac{1}{r}}\delta^{(a-1)}D(v_1-v_2)$，显然可取 δ 充分小，使 $C^{\frac{1}{r}}\delta^{(a-1)}<1$，从而 T 为压缩映射。

为了证明本文的最后结果，还需 u_t 的估计式。显然 $v=u_t$ 满足

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}+au^{a-1}v & (35)\\ v|_{t=0}=\varphi_{xx}+\varphi^a & (36)\end{cases}$$

于是
$$v(x,t)=S(t)(\varphi_{xx}+\varphi^a)+\int_0^tS(t-\tau)[au^{a-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{37}$$

引理 12 设 $a>3$，$a<r<\frac{3}{2}(a-1)$，则对任何 $T>0$，存在 $A(T)>0$，使当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时

$$\|v(\cdot,t)\|^r_{L^r(R)}\leqslant A(T)(\|\varphi\|^r_{w^{2,r}(R)}+\|\varphi\|^r_{w^{2,\frac{r}{a}}(R)}+\|\varphi\|^{ar}_{L^r(R)}+\|\varphi\|^{ar}_{L^a(R)}) \tag{38}$$

证明 由引理 6，存在常数 $C>0$ 使

$$\|S(t)(\varphi_{xx}+\varphi^a)\|^r_{L^r(R)}\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(a-1)}(\|\varphi_{xx}\|^r_{L^r(R)}+\|\varphi_{xx}\|^r_{L^{\frac{r}{a}}}+\|\varphi\|^{ar}_{L^r(R)}$$
$$+\|\varphi\|^{ar}_{L^{ar}(R)} \tag{39}$$

(37)式右端第二项的估计与引理 11 的证明类似，引用多重的 Hölder 不等式得

$$\left\|\int_0^tS(t-\tau)(au^{a-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^r_{L^r(R)}\leqslant C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2a}}u^r(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]^{a-1}$$

$$\cdot\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}v^r(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]$$

其中所涉及的各种参数如引理 13 所示，于是当 $u\in X_{2,r,\beta,\delta}$ 时，有

$$\left\|\int_0^tS(t)(au^{a-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau\right\|^r_{L^r(R)}\leqslant C\delta^{r(a-1)(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-a)-\frac{\theta r}{2a}(a-1)}}\cdot\left(\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}\|v\|^r_{L^r(R)}\mathrm{d}\tau\right)$$

从而当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，有 $A_1(T)>0$ 使

$$\|v(\cdot,t\|^r_{L^r(R)}\leqslant C(\|\varphi_{xx}\|^r_{L^r(R)}+\|\varphi\|^r_{L^{\frac{r}{a}}(R)}+\|\varphi\|^{ar}_{L^r(R)}+\|\varphi\|^{ar}_{L^{ar}(R)})$$
$$+A_1(T)\int_0^t\|v(\cdot,\tau)\|^r_{L^r(R)}\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

再利用 Gronwall 引理便得(38)式。

结合引理 10，11，12 得以下定理。

定理 1　设 $\alpha>3$，$\alpha<r<\frac{3}{2}(\alpha-1)$，则存在 $\beta>1$ 使当

$$\|\varphi\|_{w^{2,r}(R)}+\|\varphi\|_{w^{2,\frac{r}{\alpha}}(R)}+\|\varphi\|_{L^{\alpha r}(R)}\leqslant\epsilon$$

而 ϵ 充分小时，问题(1)存在唯一全局解 $u(x,t)$ 使对任何 $T>0$，$u(x,t)\in C([0,T],w^{2,r}(R))$，$u_t(x,t)\in C([0,T),L^r(R))$.

4 经典解

讨论解所可能具有的性质。注意到 $v=u_t$ 满足式(35)、(36)。令 $M_\varphi^r=\|\varphi_{xx}\|_{L^r(R)}^r+\|\varphi_{xx}\|\,\|_{L^{\frac{r}{\alpha}}(R)}^{\frac{r}{\alpha}}+\|\varphi\|_{L^r(R)}^{\alpha r}+\|\varphi\|_{L^{\alpha r}(R)}^{\alpha r}$，则有

引理 13　设 $\alpha>3$，$\alpha<r<\frac{3}{2}(\alpha-1)$，则存在 $\beta>1$ 使 δ 及 M_φ^r 很小时，有

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta}\tag{41}$$

证明　注意由引理 12 的证明

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}M_\varphi^r+C(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)}\Big[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^{-\frac{\theta r}{2\alpha}}u^r(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\Big]^{\alpha-1}$$

$$\cdot\Big[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{1}{2}(\psi p-1)}\|v\|_{L^r(R)}^r\mathrm{d}\tau\Big]\tag{42}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{r}=1$，$\frac{p\psi}{r}+\theta(1-\frac{1}{\alpha})+\varphi p(1-\frac{\alpha}{r})=1$. 取 $\psi=\frac{1}{p}$，则简单的计算表明存在 θ 使 $\frac{\theta r}{2\alpha}<1$ 及 $\varphi p<3$. 另一方面，因 $u(x,t)\in X_{2,r,\beta,\delta}$，故 $\|u(\cdot,t)\|_{w^{2,r}(R)}^r\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta}$ 代入式(42)，得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant C^1(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}M_\varphi^r+C\delta^{(\alpha-1)r}(1+t)^{\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)-\frac{\theta r}{2\alpha}(\alpha-1)}\int_0^t\|v(\cdot,\tau)\|_{L^r(R)}^r\mathrm{d}\tau$$

由假设及 $\varphi p=\dfrac{r-1-r\theta(1-\frac{1}{\alpha})}{r-\alpha}$，得

$$\frac{1}{2}(3-\varphi p)(r-\alpha)-\frac{\theta r}{2\alpha}(\alpha-1)=r-\frac{3\alpha-1}{2}<\frac{3}{2}(\alpha-1)-\frac{3\alpha-1}{2}<-1$$

从而可取 $\beta>1$ 满足：$\frac{3}{2}(r-\alpha)-\frac{1}{2}\varphi p(r-\alpha)-\frac{\theta r}{2\alpha}(\alpha-1)<-\beta$

因而：$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}M_\varphi^r+C\delta^{(\alpha-1)r}(1+t)^{-\beta}\int_0^t\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\mathrm{d}\tau$，由 Gronwall 不等式，得

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant CM_\varphi^r e^{\frac{c}{\beta-1}\delta^{(\alpha-1)r}[1-(1+t)^{-(\beta-1)}]}(1+t)^{-\beta}$$

故当 M_φ^r 充分小时有：$\|v(\cdot,t)\|_{L^r(R)}^r\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta}$.（引理证毕）

引理 14　设引理 13 的条件满足，则对任给的 $T>0$，$v(x,t)\in C((0,],w^{1,r}(R))$

证明　由于 $v_x(x,t)=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}t^{3/2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}(\xi-x)(\varphi_{xx}+\varphi^\alpha)\mathrm{d}\xi$

$$+\frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}(\xi-x)u^{\alpha-1}(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$\triangleq Q(t)(\varphi_{xx}+\varphi^\alpha)+\int_0^tQ(t-\tau)[\alpha u^{\alpha-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)]\mathrm{d}\tau$ 采用引理 4 的证明方法，有

$$\|Q(t)(\varphi_{xx}+\varphi^\alpha)\|_{L^r(R)}^r\leqslant Ct^{-\frac{r}{2}}(\|D_x^2\varphi\|_{L^r(R)}^r+\|\varphi\|_{L^{\alpha r}(R)}^{\alpha r}\tag{43}$$

其中 C 仅与 r 有关。类似于引理 7 的证明，可得

$$\Big\|\int_0^tQ(t-\tau)[\alpha u^{\alpha-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)\mathrm{d}\tau\Big\|_{L^r(R)}^r\leqslant C(1+t)^{[1-\frac{1}{2}(3\varphi p-\frac{r}{r-\alpha}-1)]}$$

$$\cdot\left\{\Big[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3\theta r}{2\alpha}}\|u(\cdot,\tau)\|_{L^r(R)}^r\mathrm{d}\tau\Big]^\alpha+\Big[\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{3\theta r}{2\alpha}}\|v(\cdot,\tau)\|_{L^r(R)}^r\mathrm{d}\tau\Big]^\alpha\right\}\tag{44}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{\alpha-1}{r}=1$，$\frac{1}{3r}+\theta+\varphi p(1-\frac{\alpha}{r})$ 1. 计算表明，可取适当的 θ 与 φ 使 $\frac{3\theta r}{2\alpha}<1$，$\varphi p<1$，因而 (44) 式

的右端有意义。还可以给出更精确的结果。由 $u\in X_{2,r,\beta,\delta}$及引理 1 得

$$\| \int_0^t Q(t-\tau)[\alpha u^{\alpha-1}(\cdot,\tau)v(\cdot,\tau)]d\tau \|_{L^r(R)}^r \leqslant C\delta^{r\alpha}(1+t)^{\frac{1}{2}(r-3\alpha+1)} \tag{45}$$

结合式(43)、(45)得到：$\| v_x(\cdot,t) \|_{L^r(R)}^r \leqslant Ct^{-\frac{r}{2}}M_\varphi^r+C\delta^{r\alpha}(1+t)^{\frac{1}{2}(r-3\alpha+1)}$. (证毕)

引理 15 设引理 13 的条件满足，则对任意 $T>0$，$D_x^3u(x,t)\in C((0,T],L^r(R))$，这里 u 为第 5 段中所得到的问题 (1) 的解。

证明 因 $D_x^3u=(D_xS(t)\varphi_{xx}+\int_0^t(D_xS(t-\tau))D^2x(u^\alpha)d\tau$，则 $D_x^3u=Q(t)+\int_0^tQ(t-\tau)D_x^{2u}\alpha d\tau$. 以下的证明完全类似于引理 12. (证毕)

定理 2 设定理 1 的条件成立，则对任意 $T>0$，$u\in C([0,T],C^1(R))\cap C((0,T],C^2(R))$及 $u_t\in C((0,T],C(R))$，故 $u(x,t)$为问题(1)的经典解。

证明 由引理 13、14、15 可知，对任意 $T>0$ 有

$$u\in C([0,T],w^{2,r}(R))\cap C((0,T],w^{3,r}(R))$$
$$u_t\in C([0,T],L^r(R))\cap C((0,T],w^{1,r}(R))$$

再应用 Sobolev 嵌入引理即得结论。(证毕)

引理 16 设定理 1 的条件满足，且 $\|\varphi\|_{w^{3,r}(R)}$很小，则对任意 $T>0$，问题 (1) 的解 u 满足

$$u\in C([0,T],w^{3,r}(R))\cap C((0,T],W^{4,r}(R))$$
$$u_t\in C([0,T],W^{1,r}(R))\cap((0,T],W^{2,r}(R))$$

此外，若 $\|D_x^4\varphi\|_{L^r(R)}$还很小，则 u_t 和正则性还可提高：

$$u_t\in C([0,T],W^{2,r}(R))\cap C((0,T],W^{3,r}(R))$$

证明 设 $D_x^3u^\alpha=R(u)+\alpha u^{\alpha-1}D_x^3u$，这里 $|R(u)|\leqslant C(u^\alpha+|u_x|^\alpha|u_{xx}|^\alpha)$. 因 $D_x^3u=S(t)D_x^3\varphi+\int_0^tS(t-\tau)D_x^3u^\alpha(\cdot,\tau)d\tau$

从而：
$$D_x^3u=S(t)\varphi+\int_0^tS(t-\tau)R(u)d\tau+\int_0^tS(t-\tau)(\alpha u^{\alpha-1}D_3^xu)d\tau \tag{46}$$

但
$$\|u(\cdot,t)\|_{w^{2,r}}^r\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta} \tag{47}$$

利用引理 6、引理 8 及类似于引理 13 的证明，并将式(47)代入式(46)得：

$$\|D_x^3u\|_{L^r(R)}^r\leqslant C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\alpha-1)}(\|\varphi\|_{w^{3,r}(R)}^r+\|\varphi\|_{w^{3,\frac{r}{\alpha}}(R)}^r)+C(1+t)^{-\beta}\delta^{\alpha r}+$$
$$C(1+t)^{-\beta}\delta^{(\alpha-1)r}\int_0^t\|D_x^3u\|_{L^r(R)}^rd\tau$$

仿照引理 13 的证法易知，当 $\|\varphi\|_{w^{3,r}(R)}^r+\|\varphi\|_{w^{3,\frac{r}{\alpha}}(R)}^r\leqslant\varepsilon$，而 ε 充分小时，必有 $\|D_x^3u\|_{L^r(R)}^r\leqslant\delta^r(1+t)^{-\beta}$. 适当调整 β 及 δ 的值就有：$\|u(\cdot,t)\|_{w^{3,r}(R)}^r\leqslant\delta^r(1+)^{-\beta}$。故对任意 $T>0$，$u\in C([0,T],w^{3,r}(R))$。

利用引理 14 的证法，有：$u\in C((0,T],w^{4,r}(R))$。类似地，$u_t\in C((0,T],W^{1,r}(R))$及 $u_t\in C((0,T],w^{2,r}(R))$。若 $\|D_x^4\varphi\|_{L^r(R)}$很小，则因为

$$D_x^2(u_t)=S(t)(D_x^4\varphi+D_x^2\varphi^\alpha)+\int_0^tS(t-\tau)D_x^2(\alpha u^{\alpha-1}ut)d\tau$$

利用与前面相似的方法就可得到定理的结论。(证毕)

定理 3 设定理 1 的条件满足，且 $\|\varphi\|_{w^{3}(R)}$很小，则对任意 $T>0$，有

$$u\in C((0,T],C^3(R)\cap C([0,T],C^2(R))$$
$$u_t\in C((0,T],C^1(R))\cap C([0,T],C(R)$$

若 $\|\varphi\|_{w^{4,r}(R)}$很小，则 u_t 的正则性可改进为

$$u_t\in C([0,T],C^1(R))\cap C((0,T),C^2(R))$$

证明 这是引理 4 与 Sobolev 嵌入引理的直接推论。

这是在 $\alpha>3$ 的假设下所能得到（用我们的方法）的最好结果。即再对 φ 附加任何条件都不能改进解的正则性。但 α 值越大，解的性质却越好。有以下结论，(证明完全类似于定理 2)。

定理 4 设定理 1 的条件满足，$[\alpha]=m\geqslant 3$，且 $\|\varphi\|_{w^{m,r}(R)}$ 很小，则对任意 $T>0$，

$$u \in C([0,T],C^{m-1}(R)) \cap c((0,T)C^{m}(R))$$

$$u_t \in C([0,T],C^{m-3}(R)) \cap C((0,T],C^{m-2}(R))$$

若 $\|\varphi\|_{w^{m+1,r}(R)}$ 很小，则 u_t 的正则性可改进为

$$u_t = C([0,T],C^{m-2}(R) \cap C((0,T],C^{m-1}(R))$$

参 考 文 献

1 Klainerman S. Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations, Ach Rat Mech Anal, 1982, 78

2 Ponce G. Global existence of small soutions to a class of nonlinear evolution equations. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1985, 9: 399~418

3 Zheng Songmu, Chen Yunmei. Global existence for nonlinear parabolic equations. Chin Ann of Math, 1986, 7B: 57~73

4 Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+2}$. J Fac Sci Univ Tokyo, Sec I, 1966, 13

5 Adams R A. Sobolev spaces, Academic press, New York, 1975

6 李大潜，陈韵梅. 非线性发展方程。科学出版社，1989.

The Existence and Uniqueness of the Global Classic Solution to the Cauchy Problem of Semilinear Heat Transfer Equations

Kong Rong Zhang Rui

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

we investigated the existence and uniqueness of the cauchy problem of semilinear heat transfer equation. We proved that for $\alpha>3$, if the initial value $\varphi(x)$ is sufficiently small in some Sobolev spaces, there exists a unique global classic solution for the Cauchy problem. And the solution decays as $t\to+\infty$. The method used in this paper makes the value of α be closely combined with the spaces in which the sloution and initial value function are defined. The larger the value of α is, the better the properties of the solution are.

Key words non-linear partial differential equations, heat transfer equation, solution of equation cauchy prolblem, global solution, classic solution, existence, uniqueness, sobolev space