国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第3期 1992年9月 Vol. 14 No. 3

零扰动下一类R^N上临界增长的椭圆方程正解的存在性

周 海 银
（系统工程与应用数学系）

摘 要 本文讨论了N维欧氏空间R^N上一类临界增长的拟线性椭圆型方程$-\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)+k(x)u^{p-1}=K(x)u^{\bar p-1}$，$u\in W^{1,p}(R^N)\cap L^{\bar p}(R^N)$的正解的存在性。其中$4\leqslant p^2\leqslant N$，$\bar p=Np/(N-p)$。在微分几何与物理学等领域起重要作用的Yamabe问题就是其特例（$p=2$）。本文运用集中紧引理，证明了问题的正解的存在性。

关键词 椭圆方程，方程解，存在性，临界增长
分类号 O175.25

记$E=W^{1,p}(R^N)$，$\|u\|=(\int_{R^N}|Du|^pdx)^{\frac{1}{p}}$，$\|u\|_s=(\int_{R^N}|u|^sdx)^{\frac{1}{s}}$，$s\geqslant 1$. 假设$k(x)\in C_0^1(R^N)\cap L^{\frac{N}{p}}(R^N)$，$K(x)\in C_0^2(R^N)$，且满足如下条件：

(H_1)：存在常数$\beta>0$，使得：$\int_{R^N}(|Du|^p+k(x)|u|^p)dx\geqslant\beta\int_{R^N}|Du|^pdx$.

(H_2)：存在$x_0\in R^N$，$K_0>0$，使得$K(x_0)=\sup\limits_{x\in R^N}K(x)$，$K(x)\geqslant K_0$.

(H_3)：对(H_2)中的x_0，有$k(x_0)<0$。

(H_4)：$\bar K<K(x_0)$，其中$\bar K=\lim\limits_{P\to+\infty}\sup\limits_{|x|\geqslant R}K(x)$

定义1 $u\in E$称为如下问题的正解：

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)+k(x)u^{p-1}=K(x)u^{\bar p-1},x\in R^N & (1)\\ u\geqslant 0,u\in W^{1,p}(R^N)\cap L^{\bar p}(R^N),4\leqslant p^2\leqslant N,\bar p=Np/N\text{-}p & (2)\end{cases}$$

如果$u\geqslant 0$,$u\not\equiv 0$,且u满足方程(1)。选取$\bar k(x)\geqslant 0$,使得$\bar k(x)\in L^{\frac{N}{p}}(R^N)$,$r(x)=k(x)+\bar k(x)\geqslant 0$. 定义$E$上如下泛函：

$$J(u)=\int_{R^N}\{\frac{1}{P}(|Du|^p|r(x)|u|^p\text{-}\bar k(x)(u^+)^p)\text{-}\frac{1}{\bar P}K(x)(u^+)^{\bar P}\}dx$$

其中$u^+=\max(u,0)$. 显然$J(u)\in C^1(E,R^1)$.

引理1 假设(H_1-H_4)成立,并存在常数$C_0\in(0,S^{\frac{N}{P}}/NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}})$及序列$\{u_n\}\subset E$,使得$J(u_n)\to C_0$,$J'(u_n)\to 0$,那么$\{u_n\}$在$E\cap L^{\bar P}(R^N)$中有界。其中$S$为最佳Sobolev嵌入常数。(下同)

利用Hölder不等式,Young不等式及嵌入定理容易证得引理成立。

定义2 如果E中序列$\{u_n\}$使$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{|x|\geqslant R}|Du_n|^p=0$对任何$n$均成立,则称$\{u_n\}$是紧的。

* 1991年6月6日收稿

引理 2 引理 1 中的$\{u_n\}$是紧的。

证明 令 $\rho_n=|Du_n|^p$ 分两步证明。

1° 存在序列$\{y_n\}\subset R^N$,使得 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{R^N\setminus B_R(y_n)}\rho_n=0$

不妨设 $\int_{R^N}\rho_n(x)dx\to\lambda\geqslant 0$,则由 Sobolev 嵌入定理$\int_{|x|\leqslant R}|u_n|^p\to 0,n\to+\infty$,$R$ 为任给常数。由 $r(x)\in L^{\frac{N}{p}}(R^N)$,$k(x)\in L^{\frac{N}{p}}(R^N)$,$\{u_n\}$在 E 中有界及 $C_0>0$,容易推得 $\lambda>0$. 由第一集中紧引理(文献[1]之引理 1.1),存在子序列,仍记为$\{\rho_n\}$,使得$\{\rho_n\}$具有:(a)紧性,或(b)消失性,或(c)两分性。下面排除情形(b)和(c)。

(1)如果(b)发生,由对任给 $R<+\infty$,有 $\int_{|x|\leqslant R}|Du_n|^p\underset{n}{\to}0$,从而 $\int_{|x|\leqslant R}|u_n|^{\bar p}\underset{n}{\to}0$. 且易证得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{R^N}r(x)|u_n|^p=\lim\int_{R^N}\bar{k}(x)(u_n^+)^p=0\tag{3}$$

$$\lim\int_{|x|\geqslant R}|Du_n|^p=\lim\int_{R^N}|Du_n|^p=\lambda\tag{4}$$

$$\lim\int_{|x|\geqslant R}K(x)(u_n^+)^{\bar p}=\lim\int_{R^N}K(x)(u_n^+)^{\bar p}=l\tag{5}$$

由 $J'(u_n)\to 0$ 得 $l=\lambda$. 由 Sobolev 不等式有

$$\int_{|x|\geqslant R}|Du_n|^p\geqslant(S/\bar{K}_R^{\frac{p}{\bar p}})(\int_{|x|\geqslant R}K(x)(u_n^+)^{\bar p})^{\frac{p}{\bar p}}\tag{6}$$

其中 $\bar{K}_R=\sup\limits_{|x|\geqslant R}K(x)$。显然 $\lim\limits_{R\to+\infty}\bar{K}_R=\bar{K}$.

在(6)中先令 $n\to+\infty$,再令 $R\to+\infty$得 $l>NC_0$. 另一方面,$C_0=\lim\limits_{n\to+\infty}J(u_n)=\frac{1}{N}l$ 与上式矛盾。从而(b)排除。

(2)令 $Q_n(t)=\operatorname{Sup}\limits_{y\in R^N}\int_{y+B_t(0)}\rho_n dx$,则 $Q_n(t)$是一非负非降一致有界的函数列,从而可选子序列,仍记为 $Q_n(t)$,存在函数 $Q(t)$使得 $Q_n(t)\to Q(t)$. 如果(c)发生,则存在 $\alpha\in(0,\lambda)$,使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}Q(t)=\alpha$.

对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 n_0,R_0,及 $y_n\in R^N$,使得 $R>R_0$,$n>n_0$ 时 $Q_n(R)=\int_{y_n+B_R(0)}\rho_n dx\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$. 选取子序列 Q_n,存在 $R_n\to+\infty$,使得 $Q_n(2R_n)\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$。

作截断函数 ξ,$\varphi\in C^\infty(R^N)$,使得 $0\leqslant\xi$,$\varphi\leqslant 1$. 当$|x|\geqslant 2$ 时,$\xi(x)=0$,$\varphi(x)=1$;当$|x|\leqslant 1$ 时,$\xi(x)=1$,$\varphi(x)=0$. 记 $\xi_n(x)=\xi(\frac{x-y_n}{R_1})$,$\varphi_n(x)=\varphi(\frac{x-y_n}{R_n})$.

令 $u_n^{(1)}=\xi_n u_n$,$u_n^{(2)}=\varphi_n u_n$. 类似文[4]的讨论,得 $\int_{R^N}|Du_n^{(1)}|^p\underset{n}{\to}\alpha$,$\int_{R^N}|Du_n^{(2)}|^p\underset{n}{\to}\lambda-\alpha$

$$\int_{R^N}|Du_n^{(i)}|^p+r(x)|u_n^{(i)}|^p-K(x)(u_n^{(i)+})^{\bar p}-\bar{k}(x)(u_n^{(i)+})^p=\mu(\varepsilon)\tag{7}$$

$$J(u_n)\geqslant J(u_n^{(1)})+J(u_n^{(2)})-\mu(\varepsilon)\tag{8}$$

其中 $\mu(\varepsilon)\to 0$ $(\varepsilon\to 0^+)$,$i=1,2$.

如果$\{y_n\}$无界,不妨设$|y_n|\to+\infty$,那么

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{R^N}r(x)|u_n^{(1)}|^p dx\leqslant\lim_{n\to+\infty}(\int_{B_{2R_1}(y_n)}|r(x)|^{\frac{N}{p}})^{\frac{p}{N}}(\int_{R^N}|u_n|^{\bar p})^{\frac{p}{\bar p}}=0$$

同理 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N}\bar{k}(x)(u_n^{(1)+})^p dx=0$.

从而 $l^{(1)}=\lim\int_{R^N}K(x)(u_n^{(1)+})^{\bar p}=\lim\int_{R^N}|Du_n^{(1)}|^p-\mu(\varepsilon)=\alpha-\mu(\varepsilon)$. 当 ε 充分小时,由 Sobolev 不等式推出

$$\alpha\geqslant Sl^{(1)\frac{p}{\bar p}}/K(x_0)^{\frac{p}{\bar p}}=S(\frac{\alpha}{K(x_0)})^{\frac{p}{\bar p}}(1-\frac{\mu(\varepsilon)}{\alpha})^{\frac{p}{\bar p}}$$

从而 $\alpha > NC_0 - \mu(\varepsilon)$。又由式（8）及上述推导得到：$C_0 \geqslant \frac{\alpha}{N} + \frac{1}{N}\lim_{n\to+\infty}\int_{R^N} K(x)(u_n^{(2)+})^p - \mu(\varepsilon) \geqslant \frac{\alpha}{N} - \mu(\varepsilon)$

令 $\varepsilon \to 0^+$，则得到与 $C_0 < S^{\frac{N}{p}}/NK(x_0)^{\frac{N-p}{p}}$ 矛盾的结论。如果 $\{y_n\}$ 有界，则因 $R_n \to +\infty$，利用 $\{u_n^{(2)}\}$ 代替 $\{u_n^{(1)}\}$，同样推出矛盾。

$2°$ $\{y_n\}$ 是 R^N 中有界序列，即完成引理证明。

反证 不妨设 $|y_n| \to +\infty$. 由 $1°$，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $R > 0$，使得 $\int_{|x-y_n|\geqslant R} |Du_n|^p < \varepsilon$，（对任意 n）。从而 $\int_{|x-y_n|\geqslant R} K(x)(u_n^-)^p \leqslant \mu(\varepsilon)$，$\int_{|x-y_n|\geqslant R} r(x)|u_n|^p \leqslant \mu(\varepsilon)$. $\int_{|x-y_n|\geqslant R} \bar{k}(x)(u_n^+)^p \leqslant \mu(\varepsilon)$，其中 $\mu(\varepsilon) \to 0$（$\varepsilon \to 0^+$）。因 $|y_n| \to +\infty$，当 $|x - y_n| \leqslant R$ 时，x 也随 y_n 变得充分大，从而由 Hölder 不等式得到 $\int_{|x-y_n|\leqslant R} r(x)|u_n|^p \leqslant \mu(\varepsilon) \to 0$，$\int_{|x-y_n|\leqslant R} \bar{k}(x)(u_n^+)^p \leqslant \mu(\varepsilon) \to 0$. 类似于 $1°$的讨论导出 $C_0 \geqslant S^{\frac{N}{p}}/NK(x_0)^{\frac{N-p}{p}}$，与 C_0 假设矛盾。（证毕）

引理 3 假设（$H_1 - H_4$）成立，$\{u_n\}$ 为 E 中紧序列，$J'(u_n) \to 0$，$J(u_n) \to C_0$，那么存在子序列（仍记为 $\{u_n\}$）及 $u \in E$ 使得 $u_n \xrightarrow{弱} u$，$Du_n \to Du$ a. e. R^N，$|Du_n|^{p-2}Du_n \xrightarrow{弱} |Du|^{p-2}Du$，在 $(L^{p'}(R^N))^*$ 中。其中 $C_0 \in (0, S^{\frac{N}{p}}/NK(x_0)^{\frac{N-p}{p}})$。

证明 由引理 1，$\{u_n\}$在 $E \cap L^{\bar{p}}(R^N)$ 中有界，因此，存在子序列（仍记为 $\{u_n\}$）及 $u \in E$，使得 $u_n \xrightarrow{弱} u$ 在 E 中；$u_n \to u$ a. e. R^N；$u_n \to u$ 在 $L^q(B_R(0))$ 中，（$p \leqslant q < \bar{p}$，$0 < R < +\infty$），$(u_n^+)^{\bar{p}-1} \xrightarrow{弱} (u^+)^{\bar{p}-1}$ 在 $(L^{\bar{p}}(R^N))^*$ 中，其中 $(L^{\bar{p}}(R^N))^*$ 表 $L^{\bar{p}}(R^N)$ 的共轭空间。不失一般性，假设 $|Du_n|^p \to \mu$，$(u_n^+)^{\bar{p}} \to \nu$，其中 $\mu\nu$ 为 R^N 上非负有界测度。由第二集中紧引理（文献［2］之引理 1. 1），存在序列 $\{x_j\} \subset R^N$，$\{\nu_j\} \subset (0, +\infty)$. $\{\mu_j\} \subset (0, +\infty)$，$j \in J$，使得

$$\mu \geqslant |Du|^p + \sum_j \mu_j \delta x_j \qquad j \in J \tag{9}$$

$$\upsilon = (u^+)^{\bar{p}} + \sum_j \nu_j \delta x_j, S\nu_j^{\frac{p}{\bar{p}}} \leqslant \mu_j \qquad j \in J \tag{10}$$

其中 J 至多为可数集，S 为最佳 Sobolev 常数。

（a）首先我们证明 J 至多为有限集。

令 $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^N)$ 为标准截断函数，$\varphi_\varepsilon(x-x_j) = \varphi(\frac{x-x_j}{\varepsilon})$. 固定 x_j，$j \in J$，考虑序列 $\{\varphi_\varepsilon(x-x_j)u_n\}$，利用 Hölder 不等式，容易证明 $\{\varphi_\varepsilon(x-x_j)u_n\}$ 在 E 中有界，且该界与 ε，x_j 无关。记 $\varphi_\varepsilon(x-x_j) = \varphi_\varepsilon$.

因 $J'(u_n) \to 0$，即存在 $\delta_n \to 0$ 使得 $J'(u_n) = \delta_n$. 即

$$\int_{R^N} |Du_n|^p \varphi_\varepsilon + \int_{R^N} |Du_n|^{p-2} Du_n \cdot u_n \cdot D\varphi_\varepsilon = \langle \delta_n, \varphi_\varepsilon \cdot u_n \rangle +$$

$$\int_{R^N} (-r(x)|u_n|^p + K(x)(u_n^+)^{\bar{p}} + \bar{k}(x)(u_n^+)^p)\varphi_\varepsilon \tag{11}$$

由 Young 不等式，对任给 $\delta > 0$，存在 $C_\delta > 0$ 使得

$$\left|\int_{R^N} |Du_n|^{p-2} Du_n \cdot u_n \cdot D\varphi_\varepsilon\right| \leqslant \delta \int_{R^N} |Du_n|^p + C_\delta \int_{R^N} |u_n D\varphi_\varepsilon|^p$$

而

$$\left|\int_{R^N} (|u_n D\varphi_\varepsilon|^p - |uD\varphi_\varepsilon|^p) dx\right| \leqslant C \int_{R^N} \big||u_n|^p - |u|^p\big| \to 0$$

$$\int_{R^N} |uD\varphi_\varepsilon|^p = \int_{B_\varepsilon(x_j)} |uD\varphi_\varepsilon|^p \leqslant C_1 \left(\int_{B_\varepsilon(x_j)} |u|^{\bar{p}}\right)^{\frac{p}{\bar{p}}}$$

其中 $C_1=(\int_{R^N}|D\varphi(x)|^N dx)^{\frac{P}{N}}$ 与 ϵ,x_j 无关。所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\int_{R^N}|Du_n|^{P-2}Du_n\cdot u_n\cdot D\varphi_\epsilon\right|\leqslant C\delta+C_\delta C_1(\int_{B_\epsilon(x_j)}|u|^{P})^{\frac{P}{P}}\tag{12}$$

因为 $\varphi_\epsilon\in C_0^\infty$ (R^N)，由 Strauss 引理（文献[5]）得到

$$\int_{R^N}r(x)|u_n|^P\varphi_\epsilon\to\int_{R^N}r(x)|u|^P\varphi_\epsilon\tag{13}$$

$$\int_{R^N}\bar{k}(x)(u_n^+)^P\varphi_\epsilon\to\int_{R^N}\bar{k}(x)(u^+)^P\varphi_\epsilon\tag{14}$$

由式(11)～(14)得到

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{R^N}|Du_n|^P\varphi_\epsilon=\int_{R^N}\varphi_\epsilon d\mu\leqslant\int_{R^N}K(x)\varphi_\epsilon d\nu$$

$$+\int_{B_\epsilon(x_j)}(\bar{k}(x)(u^+)^P-r(x)|u|^P)+C\delta+C_1C_\delta(\int_{B_\epsilon(x_j)}|u|^P)^{\frac{P}{P}}$$

因为 $\mu(B_{\epsilon/2}(x_j))\geqslant\mu_j\geqslant S\nu_j^{\frac{P}{P}},\nu_j=\lim\limits_{\epsilon\to0^+}\nu(B_\epsilon(x_j)),\int_{R^N}K(x)\varphi_\epsilon d\nu\leqslant K(x_0)\nu(B_\epsilon(x_j))$，所以在上式两端令 $\epsilon\to0^+$ 得 $S\upsilon_j^{\frac{P}{P}}\leqslant\mu_j\leqslant K(x_0)\upsilon_j+C\delta$. 再令 $\delta\to0^+$，则有 $\upsilon_j\geqslant(S/K(x_0))^{\frac{N}{P}}$。由于 $\sum\limits_j\upsilon_j=\int_{R^N}d\upsilon<+\infty$，得 J 至多为有限集。

(*b*)设 $J=\{1,2,\cdots,m\}$。固定 $\epsilon_0>0$，充分小，记 $\Omega_{\epsilon_0}=B_{\frac{1}{\epsilon_0}}(0)$，$P_n(x)=(|Du_n|^{P-2}Du_n$ $-|Du|^{P-2}Du)\cdot(Du_n-Du)$，下面证明 $\int_{\Omega_{\epsilon0}}P_n(x)dx\to0$ (15)

因为 J 有限，故可选取 ϵ $(<\epsilon_0)$ 充分小，使得 $B_\epsilon(x_{j1})\cap B_\epsilon(x_{j2})=\phi$，$(\forall\ j_1\neq j_2,\ j_1,\ j_2\in J)$ $\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_\epsilon(x_j)\subset B_{\frac{1}{\epsilon}}(0)$。令 $\psi(x)\in C^\infty(R^N)$，$0\leqslant\psi(x)\leqslant1$，在 $B_1(0)$ 内 $\psi(x)=0$ 在 $R^N\backslash B_{\frac{3}{2}(0)}$ 内 $\psi(x)=1$. 记 $\psi_\epsilon(x)=1-\sum\limits_{j=1}^{m}\varphi_\epsilon(x-x_j)-\psi(\epsilon x)$，那么，$\psi_\epsilon(x)\in C_0^\infty$ (R^N)，$\mathrm{supp}\psi_\epsilon(x)\subset B_{\frac{3}{2\epsilon}(0)}$，在 $\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j)$ 内 $\psi_\epsilon(x)=0$，在 $(R^N\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_\epsilon(x_j))\cap B_{\frac{1}{\epsilon}(0)}$ 内 $\psi_\epsilon(x)=1$.

考虑序列 $\{\psi_\epsilon u_n\}$，类似于前面的讨论，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N}\psi_\epsilon(x)P_n(x)dx$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\int_{R^N}|Du_n|^{P-2}Du_n\cdot u_n\cdot D\psi_\epsilon\right|+\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\int_{R^N}|Du_n|^{P-2}Du_n\cdot u\cdot D\psi_\epsilon\right|$$

$$\leqslant2C\delta+2C_\delta(C_1\sum_{j=1}^{m}(\int_{B_\epsilon(x_j)}|u|^P)^{\frac{P}{P}}+C_2\epsilon\int_{R^N}|u|^P=A(\epsilon.\delta)$$

其中 A $(\epsilon.\ \delta)$ 中的 C、C_1、C_2 与 ϵ、δ 无关。

由于 P_n $(x)\geqslant0$，当 ϵ 充分小时得到

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\int_{\Omega_{\epsilon0}}P_n(x)dx\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\int_{R^N}\psi_\epsilon P_n(x)dx\leqslant A(\epsilon.\delta)$$

先令 $\epsilon\to0^+$，再令 $\delta\to0^+$，得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{\epsilon0}}P_n(x)dx=0$. 因此 P_n $(x)=0$ a. e. Ω_{ϵ_0}。类似于文 [3] 的讨论，得到 $Du_n\to Du$，a. e. Ω_{ϵ_0}，$|Du_n|^{P-2}Du_n\to|Du|^{P-2}Du$，a. e. Ω_{ϵ_0}. 因为 $|Du_n|^{P-2}Du_n$ 在 $(L^P(R^N))^*$ 中有界，从而有 $|Du_n|^{P-2}Du_n\overset{弱}{\rightharpoonup}|D_u|^{P-2}Du$ 在 $(L^P(R_N))^*$ 中。

因 ϵ_0 是任意给定的，通过取子序列（仍记为 u_n）我们证得 $Du_n\to Du$，a. e. R^N，$|Du^n|^{P-2}Du_n\overset{弱}{\rightharpoonup}|Du|^{P-2}Du$ 在 $L^P(R^N))^*$ 中。

如果 J 是空集，易证 $\int_{R^N}P_n(x)\to0$. 从而证得引理 3.

定理 1 假设 (H_1-H_4) 成立，那么存在常数 $C_0\in(0,S^{\frac{N}{P}}/NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}})$ 及序列 $\{u_n\}\subset E$，使得

$J(u_n)\to C_0$，$J'(u_n)\to 0$.

证明 由（H_1）及 Sobole 不等式有

$$J(u)\geqslant\int_{R_N}\{\frac{1}{p}(|Du|^p+k(x)|u|^p)-\frac{1}{\bar p}K(x_0)|u|\bar p\}dx$$

$$\geqslant\|u\|^p(\frac{\beta}{p}-CK(x_0)\|u\|\ \frac{p}{N-p})$$

因此，存在常数 $\rho>0$，$\alpha>0$，使得 $J(u)\geqslant\alpha>0$，当 $u\in\partial B_\rho(0)$ 时。又 $J(0)=0<\rho$，据没有（P. S）条件的山路引理（[3]），如果我们能证明存在 $v_0\in E$，$v_0\geqslant0$，$v_0\neq0$，使得

$$\sup_{t\geqslant0}J(tv_0)<S^{\frac{N}{P}}/NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}}=B(x_0,N,p)\tag{16}$$

那么定理 1 得证。因为，如果式(16)得证，由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}J(tv_0)=-\infty$，令 $v=t_0v_0$，其中 t_0 充分大，使得 $J(v)<0$，记 Γ 为所有连接 0 和 v 的道路的集合，$C_0=\inf\limits_{r\in\Gamma}\max\limits_{\omega\in r}J(\omega)$，则 $C_0\geqslant\alpha$ 且 $C_0\leqslant\sup\limits_{t\geqslant0}J(tv_0)<B(x_0,N,p)$，从而没有（P. S）条件的山路引理成立，即存在序列 $\{u_n\}\subset E$，使得 $J(u_n)\to C_0$，$J'(u_n)\to0$.

现证明（16）式。令 $u_\varepsilon=\varphi(x)/(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}})^{\frac{N-P}{P}}$，$v_\varepsilon=u_\varepsilon/\|u_\varepsilon\|_{\bar p}$，其中 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathrm{R}^N)$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$，在 $B_{\frac{R}{2}}(x_0)$ 内 $\varphi(x)=1$，在 $\mathrm{R}^N\backslash B_R(x_0)$ 内 $\varphi(x)=0$. x_0 由（H_2）给出，R 为某一适当正常数。

类似于[6]，经直接计算得

$$\begin{cases}\|Du_\varepsilon\|_p^p=K\varepsilon^{-\frac{N-P}{P}}+0(1),\ \|u_\varepsilon\|_{\bar p}^{\bar p}=\dfrac{K}{S}\varepsilon^{\frac{P-N}{P}}+0(1)\\ \|u_\varepsilon\|_P^P=\begin{cases}K_1\varepsilon^{\frac{P^2-N}{P}}+0(1) & 4\leqslant P^2<N\\ K_1|\log\varepsilon|+0(1) & P^2=N\end{cases}\end{cases}\tag{17}$$

其中 K、K_1 只依赖于 N、p，S 为最佳 Sobolev 常数。

经直接计算可得

$$\|Dv_\varepsilon\|_P^P=S+0(\varepsilon^{\frac{N-P}{P}})$$

$$\int_{\mathrm{R}^N}k(x)v_\varepsilon^P\leqslant\begin{cases}k(x_0)SK_1\varepsilon^{P-1}/K+0(\varepsilon^{\frac{N-P}{P}})+0(\varepsilon^{P-1}) & 4\leqslant p^2<N\\ k(x_0)SK_1\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|/K+0(\varepsilon^{P-1}) & p^2=N\end{cases}$$

$$V_\varepsilon=\int_{\mathrm{R}^N}K(x)v_\varepsilon^{\bar P}=K(x_0)+\int_{\mathrm{R}^N}(K(x)-K(x_0))v_\varepsilon^{\bar p}\geqslant K(x_0)+0(\varepsilon^{2-\frac{2}{p}})$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J(tv_\varepsilon)=(\int_{\mathrm{R}^N}|Dv_\varepsilon|^P+k(x)v_\varepsilon^P-K(x)v_\varepsilon^{\bar P}t^{\bar P-P})t^{P-1}=0$，有唯一非零解 $t_\varepsilon=(X_\varepsilon/V_\varepsilon)^{\frac{N-P}{P^2}}$，其中 $X_\varepsilon=\int_{\mathrm{R}^N}(|Dv_\varepsilon|^P+k(x)v_\varepsilon^P)dx$. 由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}J(tv_\varepsilon)=-\infty$，故 $\max\limits_{t\geqslant0}J(tv_\varepsilon)$ 在 t_ε 处达到，即

$$J(t_\varepsilon v_\varepsilon)=\max_{t\geqslant0}J(tv_\varepsilon)=\frac{1}{p}t_\varepsilon^PX_\varepsilon-\frac{1}{\bar p}t_\varepsilon^{\bar P}V_\varepsilon$$

$$=\frac{\frac{1}{N}X_\varepsilon^{\frac{N}{P}}}{V_\varepsilon^{\frac{N-P}{P}}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{S^{\frac{N}{P}}(1+k(x_0)K_1\varepsilon^{P-1}/K+0(\varepsilon^{P-\frac{1}{P}})+0(\varepsilon^{\frac{N-P}{P}}))^{\frac{N}{P}}}{NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}}(1+0(\varepsilon^{2-\frac{2}{P}}))^{\frac{N-P}{P}}}, & 4\leqslant p^2<N\\ \dfrac{S^{\frac{N}{P}}(1+k(x_0)K_1\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|/K+0(\varepsilon^{P-1}))^{\frac{N}{P}}}{NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}}(1+0(\varepsilon^{2-\frac{2}{P}}))^{\frac{N-P}{P}}}, & p^2=N\end{cases}$$

因 $k(x_0)<0$，当 ε 充分小时，$J(t_\varepsilon v_\varepsilon)<B(x_0,N,p)$，$4\leqslant p^2\leqslant N$. 取 ε_0 充分小，使得 $J(t_{\varepsilon_0}v_{\varepsilon_0})<B(x_0,N,P)$，取 $v_0=v_{\varepsilon_0}$，即为我们所求。（证毕）

定理 2 假设（$\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_2$）成立，$4\leqslant p^2\leqslant N$，那么问题（1）（2）存在正解。

证明 由定理 1，存在 $C_0\in(0,B(x_0,N,P)$，及序列 $\{un\}\subset E$，使得 $J'(u_n)\to0$，$J(u_n)\to$

C_0.

由引理 1—2，$\{u_n\}$ 在 $E\cap L^p$ (R^N) 有界紧。由引理 3，存在子序列，仍记为 $\{u_n\}$ 使得：

$$Du_n \underset{n}{\to} Du \text{ a.e. } R^N, |Du_n|^{p-2}Du_n \xrightarrow{弱} |Du|^{p-2}Du, (u_n^+)^{p-1} \xrightarrow{弱} (u^+)^{p-1}。$$

因此，由 $J'(u_n) \to 0$，得到

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) + r(x)|u|^{p-2}u - K(x)(u^+)^{p-1} - \bar{k}(x)(u^+)^{p-1} = 0$$

在上式两端作用 u^-，得到：$\int_{R^N}|Du^-|^p + r(x)|u^-|^p = 0$，从而 $u^- \equiv 0$ 即 $u \geqslant 0$，且满足

$$-\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) + k(x)u^{p-1} = K(x)u^{p-1}$$

下面证明 $u \not\equiv 0$.

反证 如果 $u \equiv 0$，令 $\rho_n = |Du_n|^p$，由引理 2，ρ_n 是紧序列。由第二集中紧引理得到：

$$(u_n^+)^p \to v = \sum v_j \delta x_j, j \in J$$

$$|Du_n|^p \to \mu \geqslant \sum \mu_j \delta x_j, \mu_j \geqslant S v_j^{\frac{p}{p}}, j \in J$$

其中 J 是最多为可数集。所以

$$C_0 = \lim J(u_n) \geqslant \frac{1}{p}\int_{R^N} d\mu - \frac{1}{p}\sum K(x_j)v_j + \lim \int_{R^N} \frac{1}{p} r(x)|u_n|^p$$

$$-\overline{\lim}\int_{R^N} \frac{1}{p}\bar{k}(x)(u_n^+)^p$$

对任给 $R < +\infty$，由于 $k(x) \in C'_0(R^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(R^N)$ 得

$$\int_{R^N}\bar{k}(x)(u_n^+)^p \leqslant C\int_{B_R(0)}|un|^p + \left(\int_{R^N|B_R(0)}|\bar{k}(x)|^{\frac{N}{p}}\right)^{\frac{p}{N}}\left(\int_{R^N}|u_n|^p\right)^{\frac{p}{p}}$$

由 $u \equiv 0$，由 Sobolev 不等式，有 $\int_{B_R(0)}|u_n|^p \to 0$，而 $\int_{R^N}|u_n|^p$ 有界，在上式中先令 $n \to \infty$，再令 $R \to +\infty$ 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N}\bar{k}(x)(u_n^+)^p = 0$.

类似地得到 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N} r(x)|u_n|^p = 0$. 从而由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle J'(u_n), u_n\rangle = 0$ 得到

$$\int_{R^N} d\mu = \int_{R^N} K(x)dv, \text{即} \sum_{j\in J}\mu_j \leqslant \sum_{j\in J}K(x_j)v_j \tag{18}$$

由 (H) 及式(18)得到

$$S\sum K(x_j)^{\frac{p}{p}} v^{\frac{p}{p}}/K(x_0)^{\frac{p}{p}} \leqslant S\sum_j v_j^{\frac{p}{p}} \leqslant \sum_j \mu_j \leqslant \sum_{j\in J}K(x_j)v_j$$

又 $\left(\sum\limits_{j\in J}K(x_j)v_j\right)^{\frac{p}{p}} \leqslant \sum\limits_{j\in J}K(x_j)^{\frac{p}{p}}v_j^{\frac{p}{p}}$ 得到

$$\sum_{j\in J}K(x_j)v_j \geqslant S^{\frac{N}{p}}/K(x_0)^{\frac{N-p}{p}}$$

所以 $C_0 \geqslant \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\right)\sum K(x_j)v_j \geqslant B(x_0, N, p)$. 这与 C_0 的定义矛盾，从而 $u \not\equiv 0$。(证毕)

参 考 文 献

1 Lions P L Ann, I H. Anal Nonli, 1984, 1: 109～145

2 Lions P L. Rev Math Iber. 1985, 1: 145～201

3 Brezis H, Coren J M. Nirenberg L. Comm Pure Appl Math, 1980(33): 667～689

4 Yang J F Zhu X P Act Math Sci 1987, 7(3): 341～359

5 Straussw. Comm Math Phys 1977, 55: 149～163

6 Guedda M, Veron L. Nonli Anal T MA 1989, (318): 897～902

The Exisitence of Positive Solutions of a Quasilinear Elliptic Equation on R^N of Critical Increase with Zero-perturbation

Zhou Haiyin

(Department of System Engineering

and Applied Mathematics)

Abstract

This Paper is concerned with the existence of positive solutions. The Yamabe problem which is very important in the fields of differential geometry, physics, etc is a special example. In this paper, the author has obtained the existence of positive solutions of the above problem by applying the concentrain-compactness lemmas.

Key words elliptic equation, soltion of equation, existence

我国高校基础性研究发展迅速

近年来，国家教委利用国家投资和世界银行贷款建立起了近百个国家重点实验室和 57 个专业实验室，有 400 多个国家重点学科点及 1800 个博士学科点，并配以博士学科点专项基金，使基础性研究获得迅速发展。在国家授予的自然科学奖中，高校获奖数占全国的 47.4%。在《科学引文索引》等四大国际检索系统上收录的我国学者论文报告中，高校占 50%。高校荣获国家授予的自然科学奖、科技进步奖和国家发明奖中所占比例在 20%以上。