

适定的跨音速翼型反设计方法研究*

夏智勋

朱自强

(国防科学技术大学) (北京航空航天大学)

摘要 从不可压流反问题的 Lighthill 准确解中可知,翼面压强分布和自由来流速度两者不能同时独立地给定。这意味着对于给定的压强分布存在着一个约束条件,否则,反设计问题就是不适定的。对于可压缩流动,同样应该存在类似的约束条件。本文在这方面做了初步探索,给出了一种满足这种约束条件的跨音速翼型反设计方法。在此方法中,目标压强分布包含一个自由参数,在计算中可调整此参数使压强分布满足本文推导出的正则化条件。

关键词 空气动力学,跨音速翼型,反设计

分类号 V211.412

近年来,人们提出了很多可用于设计跨音速翼型和机翼的方法,其中反方法为工业界用得最多。目前跨音速翼型反设计方法有两类:(1)采用从目标压强分布导出 Dirichlet 型边界条件的方法;(2)采用 Neumann 型边界条件并与某种几何修正方法相结合的方法(残值——修正法)。第一种方法将目标压强分布作为 Dirichlet 边界条件加到初始翼型上,然后根据积分的表面穿透速度导出新的翼型再迭代计算,直到 Neumann 型边界条件得到满足,迭代结束。第二类方法则用一个分析程序来确定初始翼型上的压强分布,然后根据目标的和计算的压强分布之间的差值——残值,利用某些简单的、近似的反方法确定几何修正量,再迭代计算直到 Dirichlet 型边界条件得到满足。

残值——修正型方法具有下列优点:(1)只要编制一个基于某种合适方法的简单的近似的反方法程序,并将其与分析程序耦合起来。(2)所用的分析程序可以很容易地以更先进的程序替代。

Lighthill^[1]证明了要使二维不可压缩流动反问题有唯一的准确解,则给定的压强分布必须满足正则条件——根据自由来流速度必须为1(或其它特定值)的要求而推出的某种约束条件。到目前为止,在跨音速流中尚未见到这类正则条件的给出。本文中给出了一种能满足正则条件的跨音速翼型设计方法。该方法属残值——修正型,其中几何修正量的计算方法类似于 Takanashi^[2]所用的方法。我们推导出了一种封闭形式的积分约束条件(正则条件),在目标压强分布中引入了一个自由参数,作为解的一部分,此参数由正则条件确定。

* 1992年2月13日收稿

1 反问题的计算方法

用扰动速度位写出的全位势方程为：

$$(1 - M_\infty^2)\bar{\varphi}_{x\bar{x}} + \bar{\varphi}_{z\bar{z}} = K \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{1}{2} \bar{\varphi}_x^2 \right) + \bar{H} \quad (1)$$

式中， M_∞ 为自由来流马赫数， $K(\gamma, M_\infty)$ 为跨音速相似因子， γ 是比热比， \bar{H} 代表所有高阶项。

翼型表面的相切条件和压强系数分别为：

$$\bar{\varphi}_z(\bar{x}, \pm 0) = \bar{f}'_{\pm}(\bar{x}) + \bar{Q} \quad (2)$$

$$C_{p\pm}(\bar{x}) = -2\bar{\varphi}_x(\bar{x}, \pm 0) + \bar{S} \quad (3)$$

式中， \bar{f}_+ 和 \bar{f}_- 分别为翼型上、下表面方程， \bar{Q} 和 \bar{S} 代表高阶项。

在残值修正法中，用已有的分析程序计算初始翼型 $f_{\pm}(x)$ ，求得方程(1)的解 $\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ 。为了由给定的和计算所得的压强分布之差值确定几何修正量 $\Delta f_{\pm}(\bar{x})$ ，我们进一步引入小扰动 $\Delta\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ ，由跨音速小扰动理论可得 $\Delta\varphi(\bar{x}, \bar{z})$ 的位势方程：

$$\Delta\varphi_{xx} + \Delta\varphi_{zz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(\varphi_x + \Delta\varphi_x)^2 - \frac{1}{2}\varphi_x^2 \right] \quad (4)$$

$$\Delta\varphi_z(x, \pm 0) = \Delta f'_{\pm}(x) \quad (5)$$

$$\Delta C_{p\pm}(x) = -2\frac{\beta^2}{K}\Delta\varphi_x(x, \pm 0) \quad (6)$$

这里 $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ ，并引入了新变量。

$$x = \bar{x}, z = \beta\bar{z}, \varphi(x, z) = (K/\beta^2)\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{z})$$

$$f_{\pm}(x) = (K/\beta^3)\bar{f}'_{\pm}(\bar{x}) \quad (7)$$

对方程(4)应用格林定理并引入类似于Nörstrud使用过的递减函数^[3]，可得到积分方程：

$$\begin{aligned} \Delta u_x(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \Psi_x(x, 0; \xi, 0) \Delta W_x(\xi) d\xi + G_x(x) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^1 [I_x(x, \xi, +0)G(\xi, +0) + I_x(x, \xi, -0)G(x, -0)] d\xi \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta W_a(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Delta u_x(\xi)}{\xi - x} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^1 [I_a(x, \xi; +0)G(\xi, +0) - I_a(x, \xi, -0)G(x, -0)] d\xi \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{式中} \quad \Delta u_x(x) = \Delta\varphi_x(x, +0) + \Delta\varphi_x(x, -0) \quad (10)$$

$$\Delta u_a(x) = \Delta\varphi_x(x, +0) - \Delta\varphi_x(x, -0) \quad (11)$$

$$\Delta W_x(x) = \Delta\varphi_x(x, +0) - \Delta\varphi_x(x, -0) \quad (12)$$

$$\Delta W_a(x) = \Delta\varphi_x(x, +0) + \Delta\varphi_x(x, -0) \quad (13)$$

$$\psi(x, z, \xi, \zeta) = \ln[(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

$$G(x, z) = \frac{1}{2} [(\varphi_x + \Delta\varphi_x)^2 - \varphi_x^2] \quad (15)$$

$$I_s(x, \xi, \pm 0) = \int_0^\infty \Psi_{\xi x}(x, 0; \xi, \zeta) \exp[-2R_\pm(\xi)\zeta] d\xi \quad (16)$$

$$I_a(x, \xi, \pm 0) = \int_0^\infty \Psi_{\xi z}(x, 0; \xi, \zeta) \exp[-2R_\pm(\xi)\zeta] d\xi \quad (17)$$

$$R_\pm(x) = f_\pm(x)/\varphi_x(x, \pm 0) \quad (18)$$

于是几何修正量 $\Delta f_\pm(x)$ 可以通过分别积分 $\Delta W_s(x)$ 和 $\Delta W_a(x)$ 而获得。

2 反问题的约束条件

在不可压流中, Lighthill^[1]利用保角变换方法证明了对于一个给定的速度分布可确定与其对应的翼型外形的条件是该速度分布满足下列三个积分约束条件:

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{q_0}{q_\infty} \right| d\omega = 0 \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{q_0}{q_\infty} \right| \cos\omega d\omega = 0 \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{q_0}{q_\infty} \right| \sin\omega d\omega = 0 \quad (21)$$

式中, q_0 是给定的翼型表面上的速度分布, q_∞ 是无穷远处的来流速度, ω 是变换平面中的极角。

第一个约束条件即所谓的正则条件, 是要求无穷远的速度为 q_∞ 的必然结果。方程 (20) 和 (21) 表明翼型必须具有封闭的外形, 且迎角为零 (或为其它给定值)。

为了确定跨音速流中的正则条件, 我们将方程 (4) 对 x 求导得:

$$\nabla^2 V(x, z) = \frac{\partial^2 G(x, z)}{\partial x^2} \quad (22)$$

$$\text{式中} \quad V(x, z) = \Delta\varphi_x(x, z) \quad (23)$$

Dirichlet 型边界条件为

$$V_x(x, \pm 0) = V_0(x) = -\frac{K}{2\beta^2} \Delta C_{p\pm}(x) \quad (24)$$

无穷远处的约束为

$$\Delta\varphi_x(x, z) \rightarrow 0 \quad (x^2 + \frac{z^2}{\beta^2} \rightarrow \infty) \quad (25)$$

现引入下述变换

$$T(x) = x + iz = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \left(r e^{i\omega} + \frac{e^{-i\omega}}{r} \right) + \frac{1}{2} \quad (26)$$

式中, $x = r e^{i\omega}$ 是在变换平面的复变量。整个物理平面被变换到单位圆外, 翼型的弦长 ($z=0, 0 \leq x \leq 1$) 对应于变换平面中的单位圆 ($r=1, 0 \leq \omega \leq 2\pi$)。

对变换后的方程应用格林定理, 可得积分关系式:

$$V(r_1, \omega_1) = \frac{r_1^2 - 1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V_0(\omega)}{r_1 - 2r_1 \cos(\omega - \omega_1) + 1} d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \log \left[\frac{r_1 - 2rr_1 \cos(\omega - \omega_1) + r^2}{r_1^2 r - 2rr_1 \cos(\omega - \omega_1) + 1} \right] \frac{L(r, \omega)}{|T'(x)|^2} r dr d\omega \quad (27)$$

若 $r_1 \rightarrow \infty$, 上述方程变为

$$\int_0^{2\pi} V_0(\omega) d\omega = \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{L(r, \omega) \log r}{|T'(x)|^2} r dr d\omega \quad (28)$$

在物理平面上, 上式变为

$$\int_0^1 [\Delta\varphi_x(x, +0) - \Delta\varphi_x(x, -0)] \omega_x dx = \iint_{-\infty}^{\infty} \log r \frac{\partial^2 G(x, z)}{\partial x^2} dx dz \quad (29)$$

进一步引入递减函数并经整理, 可得正则条件的最后形式为

$$\int_0^1 \Delta u_x(x) \omega_x dx = \int_0^1 [I_v(x, +0)G(x, +0) + I_v(x, -0)G(x, -0)] dx \quad (30)$$

$$I_v(x, \pm 0) = \int_0^{\infty} \frac{rr_{xz} - r_z^2}{r} \exp[-2R_{\pm}(x)z] dz \quad (31)$$

上述讨论表明, 给定的目标压强分布必须包含一个可调整的参数, 以保证正则条件得到满足。因而目标压强分布可写为

$$C_{p\pm}(x) = \sigma F_{\pm}(x) \quad (32)$$

为了保证所得翼型具有给定的后缘厚度, 解还必须满足封闭条件:

$$\int_0^1 \Delta W_s(x) dx = 0 \quad (33)$$

3 数值计算方法及算例

为了离散方程(16)和(17)中的积分域, 我们将 ζ 的积分域分为若干子域, 假定在每个子域中 $R_{\pm}(\xi)\zeta$ 是常值, 则方程(16)和(17)可表示为:

$$I_s(x, \xi, \pm 0) = \sum_{n=0}^N \exp[-2R_{\pm}(\xi)\zeta_n] \int_{\zeta_n - \frac{1}{2}\Delta\zeta_n}^{\zeta_n + \frac{1}{2}\Delta\zeta_n} \psi_{\xi s}(x, 0; \xi, \zeta) d\zeta \quad (34)$$

$$I_a(x', \xi, \pm 0) = \sum_{n=0}^N \exp[-2R_{\pm}(\xi)\zeta_n] \int_{\zeta_n - \frac{1}{2}\Delta\zeta_n}^{\zeta_n + \frac{1}{2}\Delta\zeta_n} \psi_{\xi a}(x, 0; \xi, \zeta) d\zeta \quad (35)$$

对 x 的积分域同样可分割成若干个小域, 并在每个小域中假定 $\Delta u_s(x)$, $\Delta u_a(x)$, $G(x, \pm 0)$ 和 $W_s(x)$ 为常数, 而 $\Delta W_s(x)$ 呈线性变化。方程(8)和(9)的最后离散形式为:

$$\Delta u_s(x_i) = \sum_{k=1}^{i+1} \mu_{ik}^s \Delta W_s(x_{k-\frac{1}{2}}) + G_s(x_i) - \sum_{k=1}^i [\nu_{ik}^s G(x_k, +0) + \tilde{\nu}_{ik}^s G(x_k, -0)] \quad (36)$$

$$\Delta W_a(x_i) = \sum_{k=1}^i \mu_{ik}^a \Delta u_a(x_k) - \sum_{k=1}^i [\nu_{ik}^a G(x_k, +0) - \tilde{\nu}_{ik}^a G(x_k, -0)] \quad (37)$$

方程(30)和(33)的离散形式为:

$$\sum_{i=1}^I \Delta u_a(x_i) (\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}) = \sum_{i=1}^I [\nu_{ik}^a G(x_i, +0) + \tilde{\nu}_{ik}^a G(x_i, -0)] \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^I [\Delta W_s(x_{i-\frac{1}{2}}) + \Delta W_s(x_{i+\frac{1}{2}})] (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (39)$$

式中, 系数 $\mu_{ik}^1, \mu_{ik}^0, \nu_{ik}^1, \nu_{ik}^0, \nu_{ik}^1, \nu_{ik}^0, \nu_i^1, \nu_i^0$ 为每个子域中的一些积分表达式, 具体表达式可见文献[4].

反问题的迭代求解过程为:

(1)用分析程序求解初始翼型 $f_{\pm}(x)$ 的流场。根据计算所得的压强分布 $C_{p\pm}(x)$ 和目标压强分布 $C_{p\pm}(x)$ 可得残值: $\Delta C_{p\pm}(x) = \sigma C_{p\pm}(x) - C_{p\pm}(x)$

(2)由正则条件(38)确定自由参数 σ .

(3)求解方程(36)和(37)得几何修正量 $\Delta f_{\pm}(x)$.

重复上述过程直到计算压强分布与目标压强分布一致为止。

本文采用二维非等熵全位势方法^[5]作为分析计算流场的方法, 并给出了两个算例以表明方法的可用性。

在第一个算例中, 目标压强分布取 RAE2822 翼型在来流 $M_{\infty}=0.73$ 和迎角 $\alpha=2.5^{\circ}$ 时的压强分布, 初始翼型取 NACA0012, 初始迎角 $\alpha=0^{\circ}$ 。经过 12 次迭代计算, 取得了 RAE2822 的几何外形, 设计所得的翼型相对于初始翼型沿顺时针方向转了 2.05° 。这是因为初始迎角取为 0° , 而在迭代过程中自由来流和 x 轴的夹角始终保持为 0° 。图 1 表明了目标的、初始的和设计翼型上的压强分布。图 2 表明了压强分布的收敛过程。

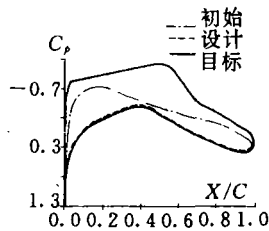


图 1 算例 1 的初始、目标和设计压强分布

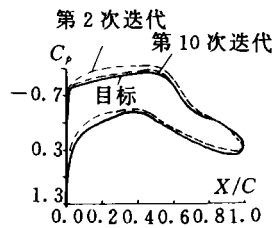


图 2 算例 1 压强分布的收敛过程

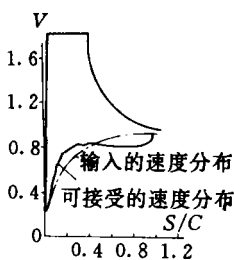


图 3 Strand 给出的算例

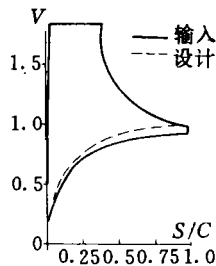


图 4 本文的输入和设计速度分布

第二个算例是用来表明正则条件的作用的。文献[6]中, Strand 给出了一种速度分布, 它不满足 Lighthill 的三个积分关系式, 因而不存在与此速度分布对应的翼型。Strand 按 Lighthill 的约束条件修改了速度分布, 并设计出对应于修正后的速度分布的翼型。其结果在图 3 给出。我们用本文的方法对此例子作了设计计算。为方便计, 只对下翼面的速度分布乘以自由参数 σ , 经过 7 次迭代计算, 得到了收敛解。图 4 给出了速度分布。这表明, 本文方法可以自动调整给定的速度分布 (若它是不合理的) 使之变为可接受的速

度分布,并可设计出对应于修改后的速度分布的翼型。

4 结束语

本文给出了跨音速流反问题的一种封闭形式的正则条件及满足正则条件的跨音速翼型的一种空气动力反设计方法。算例结果表明,方法是可靠的和有效的。当目标压强分布不合理时,本文方法可以自动调整目标压强分布中的自由参数,并设计出对应于修改后的压强分布的跨音速翼型。

参 考 文 献

- 1 Lighthill M J. A New Method of Two-Dimensional Aerodynamic Design. 1945;ARC RM 2112
- 2 Takanashi S. Journal of Aircraft. 1985;22(8);655-660
- 3 Nostrud H. High Speed Flow Past Wings. 1973;NASA CR-2246
- 4 夏智勋. 跨音速翼型和机翼的反设计计算方法. 北京航空航天大学博士学位论文,1991
- 5 Strand T. Journal of Aircraft, 1973. 10(11);652-659

A Well-posed Inversed Design Method for Transonic Airfoil

Xia Zhixun

(National University of Defence Technology)

Zhu Ziqiang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

From the Lighthill's exact solution for the incompressible inverse problem it is known that in the inverse design problem, the surface pressure distribution and the free stream speed can not be both prescribed independently. This suggests the existence of a constraint (regularity condition) on the pressure distribution. The same constraint exists at compressible speeds. In this paper, a well-posed inverse design method for transonic airfoil is presented. In the method, the target pressure distribution contains a free parameter that can be adjusted during the computation to satisfy the regularity condition derived in this paper.

Key words aerodynamics, transonic airfoil, inverse design