

多自由度系统及结构非线性 自由振动的摄动谐波平衡法*

唐乾刚 孙世贤

(航天技术系)

摘 要 本文在谐波平衡法的基础上,引入摄动的思想,得出了解多自由度系统及结构的非线性自由振动的新方法。其解的形式为小参数和谐波的级数形式,因此,其解不会遗漏任何项,方程为线性的代数方程;利用线性变换,将系数矩阵变换为对角阵,一旦求出线性模态,就可得其解,比线性化迭代法优越得多。算例表明,本文方法对于小振幅有较高的精度,对于较大振幅其结果也是令人满意的。

关键词 摄动, 谐波平衡, 多自由度系统与结构, 非线性, 自由振动

分类号 O322

随着生产技术的发展,结构非线性问题也愈来愈突出,但研究多自由度系统及结构非线性振动的理论方法并不多,数值方法仅有线性化迭代法^[1]和时空有限条法^[2],但普遍使用的是线性化迭代法。线性化迭代法存在两个问题。一是遗漏平方非线性项;二是对每个给定振幅都要进行迭代计算,且为特征值的迭代,因而工作量相当大,其计算时间要比线性问题高出一个数量级。其原因是利用谐波平衡法时只取一个谐波,这样就遗漏了平方非线性项,而且特征方程是非线性的。时空有限条法虽然克服了遗漏平方非线性项的问题,但要假设诸阶谐波,或者对解有先验的了解,否则会忽略低阶谐波项而保留高阶项;随之而来的问题是矩阵阶数增大,假如取两个谐波项,则矩阵阶数扩大一倍,计算也是迭代计算,需要大量的计算机时,计算时间多于线性化迭代法。

本文提出的方法是单自由度摄动谐波平衡法^[3]的推广,将解展开为小参数和谐波的级数形式,代入微分方程组并比较各阶谐波的系数,可得含待定系数及小参数 ϵ 的方程组,再比较 ϵ 同次幂系数,可得含待定系数的代数方程组。由于将谐波平衡法和摄动法并用,且对每一个 ϵ 的量级都取无穷个谐波项,因此,其解不会遗漏任何项,且代数方程为线性的;再利用线性变换,其系数矩阵为对角阵。求解时,只需求出线性模态,然后代入本文公式进行简单的运算,立即可得结果。

1 基本公式

本文以离散形式推导计算公式,对结构可采用有限元法及其它方法变为离散形式。

* 1991年5月26日收稿

1.1 平方非线性

设平方非线性的控制方程为

$$[M]\{\dot{x}\} + [K]_0\{x\} + [K]_1\{x\} = 0 \quad (1)$$

式中 $[K]_0$ 为线性刚度矩阵, $[K]_1$ 为 $\{x\}$ 的一次函数, 即 $[K]_1 = [K(\{x\})]$, 其解的形式为

$$\begin{cases} \{x\} = \{A\}_k \cos \varphi + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \{B\}_i \cos i \varphi + \varepsilon^3 \sum_{i=0}^{\infty} \{D\}_i \cos i \varphi + O(\varepsilon^4) \\ \dot{\varphi} = \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + O(\varepsilon^3) \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\{A\}_k$ 为相应的第 k 个线性振型(设线性振型按质量矩阵归1约化, 且按特征值大小顺序排列), 是(1)式的派生解, ω 为相应振型的频率。将(2)式第一式代入(1)式, 可得

$$\begin{aligned} & \varepsilon([K]_0 - \omega^2[M])\{A\}_k \cos \varphi + \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} ([K]_0 - i^2 \omega^2[M])\{B\}_i \cos i \varphi \\ & + \varepsilon^3 \sum_{i=0}^{\infty} ([K]_0 - i^2 \omega^2[M])\{D\}_i \cos i \varphi + \varepsilon^2 \{F\}_0 \cos^2 \varphi \\ & + \varepsilon^3 \sum_{i=0}^{\infty} \{F\}_{1i} \cos \varphi \cos i \varphi + O(\varepsilon^4) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\begin{cases} \{F\}_0 = [K(\{A\}_k)]\{A\}_k \\ \{F\}_{1i} = [K(\{A\}_k)]\{B\}_i + [K(\{B\}_i)]\{A\}_k \end{cases} \quad (4)$$

比较(3)式中的各项谐波系数, 可得

$$\varepsilon^2 [K]_0 \{B\}_0 + \varepsilon^3 [K]_0 \{D\}_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{F\}_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \{F\}_{11} = 0 \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon([K]_0 - \omega^2[M])\{A\}_k + \varepsilon^2([K]_0 - \omega^2[M])\{B\}_1 + \varepsilon^3([K]_0 \\ & - \omega^2[M])\{D\}_1 + \varepsilon^3 \{F\}_{10} + \frac{1}{2} \varepsilon^3 \{F\}_{12} = 0 \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2([K]_0 - 4\omega^2[M])\{B\}_2 + \varepsilon^3([K]_0 - 4\omega^2[M])\{D\}_2 \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{F\}_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^3 (\{F\}_{11} + \{F\}_{13}) = 0 \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2([K]_0 - i^2 \omega^2[M])\{B\}_i + \varepsilon^3([K]_0 - i^2 \omega^2[M])\{D\}_i \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^3 (\{F\}_{1, i-1} + \{F\}_{1, i+1}) = 0 \quad (i \geq 3) \end{aligned} \quad (5d)$$

设 $[\Phi]$ 为线性模态, 利用 $[\Phi]$ 进行线性变换

$$\begin{cases} \{x\} = [\Phi]\{q\}; & [\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \\ [\Phi]^T [K]_0 [\Phi] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{cases} \quad (6)$$

式中 $[I]$ 为单位阵, λ_i 为第 i 个线性特征值, 令

$$\begin{cases} \{A\}_k = [\Phi]\{a\}_k; & \{B\}_i = [\Phi]\{b\}_i \\ \{D\}_i = [\Phi]\{d\}_i; & (i = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (7)$$

因为 $\{A\}_k$ 为第 k 个线性振型, 因此 $\{a\}_k$ 中, 只有第 k 个元素为非零, 其余的都为零。这样可将 $\{b\}_1$ 与 $\{d\}_1$ 中对应的第 k 个线性模态归入 $\{a\}_k$ 中, 即

$$\begin{cases} \{a\}_k^T = [0 \cdots \bar{a}_k \cdots 0] \\ \{b\}_1^T = [b_{11} \ b_{21} \ \cdots \ b_{k-1,1} \ 0 \ b_{k+1,1} \ \cdots \ b_{n1}] \\ \{d\}_1^T = [d_{11} \ d_{21} \ \cdots \ d_{k-1,1} \ 0 \ d_{k+1,1} \ \cdots \ d_{n1}] \end{cases} \quad (8)$$

式中, \bar{a}_k 由相应的振幅决定。

将(5a)式到(5d)式前乘 $[\Phi]^T$, 并将(7)式代入, 可得

$$\varepsilon^2[\lambda]\{b\}_0 + \varepsilon^2[\lambda]\{d\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{f\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{f\}_{11} = 0 \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon([\lambda] - \omega^2[I])\{a\}_k + \varepsilon^3([\lambda] - \omega^2[I])\{b\}_1 + \varepsilon^3([\lambda] - \omega^2[I])\{d\}_1 \\ + \varepsilon^3\{f\}_{10} + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{f\}_{12} = 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2([\lambda] - 4\omega^2[I])\{b\}_2 + \varepsilon^3([\lambda] - 4\omega^2[I])\{d\}_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{f\}_0 \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{f\}_{11} + \{f\}_{13}) = 0 \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2([\lambda] - i^2\omega^2[I])\{b\}_i + \varepsilon^3([\lambda] - i^2\omega^2[I])\{d\}_i \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{f\}_{1,i-1} + \{f\}_{1,i+1}) = 0 \quad (i \geq 3) \end{aligned} \quad (9d)$$

式中

$$\begin{cases} [\lambda] = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n]; \quad \{f\}_0 = [\Phi]\{F\}_0 \\ \{f\}_{1j} = [\Phi]\{F\}_{1j} \quad (j = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases} \quad (10)$$

由(9a)式, 可得

$$\{b\}_0 = -\frac{1}{2}[\lambda]^{-1}\{f\}_0; \{d\}_0 = -\frac{1}{2}[\lambda]^{-1}\{f\}_{11}$$

由第(2)式的第二个等式, 可得

$$\begin{aligned} [\lambda] - \omega^2[I] &= [\lambda] - [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)][I] \\ &= [\bar{\lambda}] - 2\varepsilon\omega_0\omega_1[I] - \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_2)[I] + 0(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [\lambda] - i^2\omega^2[I] &= [\lambda] - i^2\lambda_k[I] - \varepsilon(2i^2\omega_0\omega_1)[I] + 0(\varepsilon^2) \\ &(i = 2, 3, \cdots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $[\bar{\lambda}] = \text{diag}[\lambda_1 - \lambda_k \ \lambda_2 - \lambda_k \ \cdots \ \lambda_{k-1} - \lambda_k \ 0 \ \lambda_{k+1} - \lambda_k \ \cdots \ \lambda_n - \lambda_k]; \omega_0^2 = \lambda_k$

令(9b)式中 ε 同次幂系数为零, 可得

$$\begin{aligned} [\bar{\lambda}]\{a\}_k &\equiv 0; \quad -2\omega_0\omega_1[I]\{a\}_k + [\bar{\lambda}]\{b\}_1 = 0 \\ -(\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1)[I]\{a\}_k + [\bar{\lambda}]\{d\}_1 + \{f\}_{10} + \frac{1}{2}\{f\}_{12} &= 0 \end{aligned}$$

由上三式可得

$$\omega_1 = 0; \{b\}_1 = 0; \omega_2 = \frac{1}{2\omega_0\bar{a}_k}(f_{10}^{(k)} + \frac{1}{2}f_{12}^{(k)}); [\bar{\lambda}]\{d\}_1 = -(\{f\}_{10} + \frac{1}{2}\{f\}_{12})$$

其中, $\{f\}_{10}$ 表示将 $\{f\}_{10}$ 中的第 k 个元素变为零, 其余类同。

如果不考虑内共振情况, 即线性特征值中, 无特征值 λ_p 近似等于 $4\lambda_k$ 或 $9\lambda_k$, 由(9c)式和(9d)式可得

$$\{b\}_2 = \frac{1}{2}(4\lambda_k[I] - [\lambda]^{-1}\{f\}_0); \quad \{d\}_2 = \frac{1}{2}(4\lambda_k[I] - [\lambda]^{-1}\{f\}_{13}); \quad \{b\}_i = 0 \quad (i \geq 3);$$

$$\{d\}_3 = \frac{1}{2}(9\lambda_k[I] - [\lambda]^{-1}(\{f\}_{12} + \{f\}_{14})); \quad \{d\}_m = 0 \quad (m \geq 4)$$

式(1)的近似解为

$$\left\{ \begin{array}{l} \{b\}_0 = -\frac{1}{2}[\lambda]^{-1}\{f\}_0; \quad \{b\}_1 = 0; \\ \{b\}_2 = \frac{1}{2}(4\lambda_k[I] - [\lambda]^{-1}\{f\}_0); \quad b_i = 0 (i \geq 3); \quad \{d\}_0 = 0; \\ \{d\}_1 = [Q](\{f\}_{10} + \frac{1}{2}\{f\}_{12}); \quad \{d\}_2 = 0; \\ d_3 = \frac{1}{2}(9\lambda_k[I] - [\lambda]^{-1}(\{f\}_{12} + \{f\}_{13})); \quad \{d\}_m = 0 \quad (m \geq 4); \\ \omega_2 = \frac{1}{2\omega_0 a_k}(f_{10}^{(k)} + f_{12}^{(k)}); \\ \{x\} = \varepsilon\{A\}_k \cos\varphi + \varepsilon^2\{B\}_0 + \varepsilon^2\{B\}_2 \cos\varphi + \varepsilon^3\{D\}_1 \cos\varphi + \varepsilon^3\{D\}_3 \cos 3\varphi + 0(\varepsilon) \end{array} \right. \quad (*)$$

$$\text{式中 } [Q] = -\text{diag} \left[\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_k} \quad \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_k} \quad \cdots \quad \frac{1}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \quad 0 \quad \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \quad \cdots \quad \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} \right]$$

(*)式为多自由度系统平方非线性自由振动的计算公式,精确到三阶小量。

如果采用线性化迭代法,即设 $\{x\} = \{A\} \cos\varphi$,代入(1)式并比较一阶谐波的系数,得

$$([K]_0 - \omega^2[M])\{A\} = 0$$

特征方程仅含线性项,遗漏平方非线性项。

1.2 平方与立方非线性问题

设平方与立方非线性问题的控制方程为

$$[M]\ddot{\{x\}} + [K]_0\{x\} + [K]_1\{x\} + [K]_2\{x\} = 0 \quad (13)$$

式中 $[K]_0$ 与 $[K]_1$ 如上所述, $[K]_2$ 为 $\{x\}$ 的二次函数。将解的形式(2)式代入,并比较各阶谐波系数,可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2[K]_0\{B\}_0 + \varepsilon^3[K]_0\{D\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{F\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{F\}_{11} = 0 \\ \varepsilon([K]_0 - \omega^2[M])\{A\}_k + \varepsilon^2([K]_0 - \omega^2[M])\{B\}_1 + \\ \varepsilon^3([K]_0 - \omega^2[M])\{D\}_1 + \varepsilon^3\{F\}_{10} + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{F\}_{12} + \frac{3}{4}\varepsilon^3\{G\}_0 = 0 \\ \varepsilon^2([K]_0 - 4\omega^2[M])\{B\}_2 + \varepsilon^3([K]_0 - 4\omega^2[M])\{D\}_2 \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{F\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{F\}_{11} + \{F\}_{13}) = 0 \\ \varepsilon^2([K]_0 - 9\omega^2[M])\{B\}_3 + \varepsilon^3([K]_0 - 9\omega^2[M])\{D\}_3 \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{F\}_{12} + \{F\}_{14}) + \frac{1}{4}\varepsilon^3\{G\}_0 = 0 \\ \varepsilon^2([K]_0 - i^2\omega^2[M])\{B\}_i + \varepsilon^3([K]_0 - i^2\omega^2[M])\{D\}_i \\ + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{F\}_{1,i-1} + \{F\}_{1,i+1}) = 0 \quad (i > 3) \end{array} \right. \quad (14)$$

式中, $\{F\}_0, \{F\}_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 见第(4)式, $\{G\}_0 = [K\{A\}_k, \{A\}_k] \{A\}_k$, 采用(6)、(7)式的变换, 并将(14) $[\Phi]^T$, 可得

$$\varepsilon^2[\lambda]\{b\}_0 + \varepsilon^2[\lambda]\{d\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{f\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{f\}_{11} = 0 \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon([\lambda] - \omega^2[I])\{a\}_k + \varepsilon^2([\lambda] - \omega^2[I])\{b\}_1 \\ & + \varepsilon^3([\lambda] - \omega^2[I])\{d\}_1 + \varepsilon^3\{f\}_{10} + \frac{1}{2}\varepsilon^3\{f\}_{12} + \frac{3}{4}\varepsilon^3\{g\}_0 = 0 \end{aligned} \quad (15b)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2([\lambda] - 4\omega^2[I])\{b\}_2 + \varepsilon^3([\lambda] - 4\omega^2[I])\{d\}_2 \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{f\}_0 + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{f\}_{11} + \{f\}_{13}) = 0 \end{aligned} \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2([\lambda] - 9\omega^2[I])\{b\}_3 + \varepsilon^3([\lambda] - 9\omega^2[I])\{d\}_3 \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{f\}_{12} + \{f\}_{14} + \frac{1}{4}\varepsilon^3\{g\}_0) = 0 \end{aligned} \quad (15d)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2([\lambda] - i^2\omega^2[I])\{b\}_i + \varepsilon^3([\lambda] - i^2\omega^2[I])\{d\}_i \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^3(\{f\}_{1,i-1} + \{f\}_{1,i+1}) = 0 \quad (i > 3) \end{aligned} \quad (15e)$$

式中, $\{g\}_0 = [\Phi]^T \{G\}_0$, 其余如前所述。不考虑内共振时, 比较以上各式 ε 同次幂系数, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} & \{b\}_0 = -\frac{1}{2}[\lambda]^{-1}\{f\}_0; \quad \{b\}_1 = 0 \\ & \{b\}_2 = \frac{1}{2}(4\lambda_k[I] - [\lambda])^{-1}\{f\}_0 \\ & \{b\}_i = 0 \quad (i \geq 3); \quad \{d\}_0 = 0 \\ & \{d\}_1 = [Q](\{f\}_{10} + \frac{1}{2}\{f\}_{12} + \frac{3}{4}\{g\}_0); \quad \{d\}_2 = 0 \\ & \{d\}_3 = \frac{1}{2}(9\lambda_k[I] - [\lambda])^{-1}(\{f\}_{12} + \frac{1}{2}\{g\}_0); \quad \{d\}_j = 0 \quad (j \geq 4) \\ & \omega_2 = \frac{1}{2\omega_0 \bar{a}_k} \left(f_{10}^{(k)} + \frac{1}{2}f_{12}^{(k)} + \frac{3}{4}g_0^{(k)} \right) \\ & \{x\} = \varepsilon\{A\}_k \cos\varphi + \varepsilon^2(\{B\}_0 + \{B\}_2 \cos\varphi) + \varepsilon^3(\{D\}_1 \cos\varphi \\ & \quad + \{D\}_3 \cos 3\varphi + 0(\varepsilon^4)) \end{aligned} \right. \quad (16)$$

式中, $\{\bar{g}\}_0$ 是将 $\{g\}_0$ 的第 k 元素变为零, $g_0^{(k)}$ 是 $\{g\}_0$ 中的第 k 个元素, 其余如前所述。

(16)式是含平方与立方非线性的多自由度系统的自由振动计算公式(不考虑内共振)。对于立方非线性问题, 即(13)式中 $[K]_1 = 0$, 则式(16)中 $\{f\}_{ij} (i, j=0, 1, 2, \dots)$ 和 $\{f\}$ 为零。

如果采用线性化迭代法, 可得

$$-\omega^2[M]\{A\} + [K]\{A\} + \frac{3}{4}[K(\{A\}, \{A\})]\{A\} = 0$$

这个特征方程不但是非线性的, 而且遗漏了平方非线性项。

2 求解步骤

- (1) 求出线性模态 $[\Phi]$,按质量矩阵归1约化,并按特征值大小排列;
- (2) 在给定振幅下,利用(7)式求 $\{A\}_k$,并求出 $\{f\}_0$ 和 $\{g\}_0$;
- (3) 按(*)式或(16)式求出相应的 $\{b\}_i$ 、 $\{d\}_i$ 和 ω_2 ;
- (4) 代入(7)式和(2)式可得其三阶近似解。

3 算例与结果分析

3.1 两自由度质量弹簧系统

图1所示系统中, $k_1 = \alpha + \beta\delta_1^2$, $k_2 = \alpha + \beta\delta_2^2$, $\alpha = 5\text{kg/cm}$, $\beta = 1\text{kg/cm}^3$, $m_2 = 2m_1 = 0.04\text{kg}$, δ_1 、 δ_2 分别为弹簧1、2的伸长度。其自由振动的微分方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]_0\{x\} + [K]_2\{x\} = 0$$

式中

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [K] = \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

$$[K_2] = \beta \begin{bmatrix} x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 & -(x_1 - x_2)^2 \\ -(x_1 - x_2)^2 & (x_1 - x_2)^2 \end{bmatrix}$$

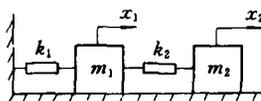


图 1

表1中列出其第一阶频率的计算结果,其中振幅单位为厘米,且为质量1的振幅。

表 1

振幅	本文方法(ω)	线性化迭代法(ω)
0.1	7.4078	7.4078
0.2	7.4220	7.4220
0.3	7.4457	7.4457
0.4	7.4788	7.4788
0.5	7.5214	7.5213
0.6	7.5731	7.5734
0.7	7.6349	7.6352
0.8	7.7059	7.7053

3.2 等截面细长梁

设梁的长度为 l ,横截面面积为 S 。忽略梁的中面惯性力,以轴向为 x 轴,则拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\rho S \int_0^l \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l w_{,xx}^2 dx - \frac{ES}{8l} \left(\int_0^l w_{,xx}^2 dx \right)^2$$

用三次 B 样条^[5]进行离散,可得其微分方程

$$\rho S [B]\{\ddot{\delta}\} + EI [A]\{\delta\} + \frac{ES}{2l} \{\delta\}^T [C]\{\delta\} [C]\{\delta\} = 0$$

表2、表3分别给出了两端简支梁、两端固支梁的一阶频率与一阶线性频率之比值, $\gamma = \sqrt{l/S}$, W_c 为梁中点的幅值。将梁分成八等分。

3.3 等厚度周边固支板

设板为各向同性,边长为 a 的方板,其厚度为 h ,中面单位面积的质量为 ρ ,在Berger假设下^[4],其应变能和动能为

$$V = \frac{1}{2}D \iint_s [W_{,xx}^2 + 2W_{,xy}^2 + W_{,yy}^2] dxdy + \frac{1}{2} \frac{12D}{h^2 a^2} \left[\frac{1}{2} \iint_s [W_{,x}^2 + W_{,y}^2] dxdy \right]^2$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_s W^2 dxdy$$

表 2 两端简支梁

本文方法	线性化迭代法	时空有限条 ^[5]	
W_c/r	ω_N/ω_L	ω_N/ω_L	ω_N/ω_L
0.1	1.0009	1.0009	—
0.2	1.0037	1.0037	1.0038
0.3	1.0084	1.0084	—
0.4	1.0150	1.0150	1.0149
0.5	1.0233	1.0232	—
0.6	1.0336	1.0333	1.0333
0.7	1.0459	1.0452	—
0.8	1.0594	1.0586	1.0586
0.9	1.0750	1.0734	—
1.0	1.0923	1.0897	1.0903

表 3 两端固支梁

本文方法	线性化迭代法	伽辽金法	
W_c/r	ω_N/ω_L	ω_N/ω_L	ω_N/ω_L
0.1	1.0002	1.0002	1.0002
0.2	1.0009	1.0009	1.0009
0.3	1.0020	1.0020	1.0021
0.4	1.0036	1.0036	1.0038
0.5	1.0056	1.0056	1.0058
0.6	1.0081	1.0081	1.0084
0.7	1.0111	1.0111	1.0115
0.8	1.0145	1.0146	1.0150
0.9	1.0182	1.0183	1.0190
1.0	1.0224	1.0222	1.0232

采用样条有限条法^[6]进行离散, 试函数取2项, 共分为8条。其计算结果见表4, ω 为第一阶频率, ω_0 为线性基频, W_c 为板中心幅值。

3.4 结果分析

为了验证该方法的收敛性, 所举的例子都是立方非线性问题, 因为线性化迭代法对于立方非线性问题是有效的。从算例

可看出, 对于小振幅, 该方法的精度较高。这是由于利用了摄动方法, 而 ϵ 是由振幅决定, 振幅越小, 精度越高。对于较大振幅, 也有一定精度, 这是因为方法中涉及了起主要作用的基波项, 其它项为修正项。

表 4 周边固支方板

本文方法	线性化迭代法 ^[6]	
W_c/h	ω/ω_0	ω/ω_0
0.2	1.0066	1.0066
0.4	1.0260	1.0260
0.6	1.0577	1.0577
0.8	1.1004	1.1007
1.0	1.1531	1.1538

4 方法的评论

(1) 该方法计算工作量比线性化迭代法小得多。从公式可看出, 该方法只需计算一次线性特征值问题, 不需要进行迭代; 而代数方程的系数矩阵为对角阵, 因此大大地节约了计算时间。对于结构的非线性特性分析, 该方法可显示出极大的优越性。

(2) 该方法适用于任何平方与立方非线性多自由度系统和结构。本文所得公式是一般公式, 除了内共振外, 没有任何特殊规定。

(3) 该方法的计算过程简单, 易于掌握和在计算机上实现。

(4) 该方法适用于振幅较小的情况,对于较大振幅也有参考价值。

总之,该方法是一种经济有效的、有实用价值的方法。

另外需指出,本文公式仅适用于非内共振情况,对于有内共振情况,将在另文发表。

参 考 文 献

- 1 Yang T Y and Han A D. Buckled Plate Vibration and Large Amplitude Vibration Using High-Order Triangular Element. AIAA, 1983, 21 (5): 758-766
- 2 Cheung Y K and Laut S L. Incremental Time-Space Finite Strip Method For Nonlinear Structure Vibrations, Earthquake Eng and Struc Dynamics. 1982, 10: 239-253
- 3 孙世贤,唐乾刚.解非线性振动问题的摄动谐波平衡法.国防科技大学学报,1989,11(3):89-96
- 4 Nayfeh A H and Mook D T. Nonlinear Oscillation, New York. A Wiley-Interscience Publication, 1979: 506-507
- 5 秦荣.结构力学的样条函数方法.广西人民出版社,1985,142-143
- 6 唐乾刚,张仁述,孙世贤.样条有限条法分析板的几何非线性振动特性.振动工程学报,1989,2(4):1-11

The Method of Perturbation—Harmonic Balance for Analysing Nonlinear Free Vibration of MDOF Systems and Structures

Tang Qiangang · Sun Shixian

(Department of Aerospace Technology)

Abstract

In this paper, the perturbation technique is introduced into the method of harmonic balance. A new method used for analysing nonlinear free vibration of multidegree-of-freedom systems and structures is obtained. The form of solution is expanded into a series of Small parameters and harmonics, so no term will be lost in the solution and the algebraic equations are linear. With the linear transformations, the matrices of the equations become diagonal. As soon as the modes related to linear vibration are found, the solution can be obtained. This method is superior to the method of linearized iteration. The examples show that the method has high accuracy for small amplitude problems and the results for rather large amplitude are satisfactory.

Key words perturbation, harmonic balance, multidegree-of-freedom systems and structures, nonlinear, free vibration