国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第14卷第4期 1992年12月 Vol. 14 No. 4

单调光滑函数的保形插值算法*

方 逵 张新建

（系统工程与应用数学系）

摘 要 对于给定的单调数组，本文描述了一种保形二次插值样条函数。插值函数结构简单、计算方便。最后估计了插值函数的误差。

关键词 插值样条，单调性，保凸性

分类号 O241.5

单调型值点的保形样条插值方法，在实验数据处理和计算几何中是一种十分重要的方法。关于这种插值方法的研究已有不少文献[1-4]。比较典型的有：J. A. GREGORY 等人[1]用分段有理二次函数插值得到一条保单调的曲线，但曲线不具有保凸性，即拐点个数与型值点凸凹性不一致；文涛[2]用积分磨光法导出了一种保形插值方法，但每个子区间上的曲线由多段直线和抛物线组成，所以计算较繁，且对计算几何来说曲线缺乏造型优美性。

本文用较少的抛物线段连接，构造了既保单调又保凸的二次样条函数，且构造方法具有统一性，便于编程计算。

1 单调保凸二次样条与 Hermite 插值多项式

设区间[a,b]上的分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$$

$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$、$\{d_i\}_{i=0}^{n+1}$分别表示型值点处相应的函数值与导数值。$s_i=(y_{i+1}-y_i)/(x_{i+1}-x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，$D^2y_i=(s_i-s_{i-1})/(x_{i+1}-x_{i-1})$ $(i=1,2,\cdots,n)$，分别表示型值点处相应的一、二阶差商。

定义 设型值点$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$是单调数组，若存在单调函数 $s(x)$满足下列条件。

(1) $s(x)$在每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$上是二次多项式或光滑连接的分段二次多项式，记为 $s_i(x)(i=0,1,2,\cdots,n)$；

(2) $s(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n+1)$，$s_i'(x_i-)=s_{i+1}'(x_i+)$ $(i=1,2,\cdots,n)$；

(3) $s(x)$的拐点个数与二阶差商量的变号数相同，则称 $s(x)$为$[a,b]$上的单调保凸二次插值样条函数。

我们知道，子区间$[x_i,x_{i+1}]$上的三次 Hermite 插值多项式为

---

* 1991年7月2日收稿

$$H_i(x)=y_i\left(1-2\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2+y_{i+1}\left(1-2\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$+d_i(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2+d_{i+1}(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$=\left(y_i-2y_i\frac{x-x_i}{x_i-x_{i+1}}+d_i(x-x_i)\right)\left(\frac{(x-x_i)+(x_i-x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$+\left(y_{i+1}-2y_{i+1}\frac{(x-x_i)+(x_i-x_{i+1})}{x_{i+1}-x_i}\right.$$

$$\left.+d_{i+1}((x-x_i)+(x_i-x_{i+1}))\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$=\left(d_i+d_{i+1}-2\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\frac{(x-x_i)^3}{(x_{i+1}-x_i)^2}+d_i(x-x_i)+y_i$$

$$+\left(3\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-2d_i-d_{i+1}\right)\frac{(x-x_i)^2}{x_{i+1}-x_i}$$

$$=(d_i+d_{i+1}-2s_i)\frac{(x-x_i)^3}{(x_{i+1}-x_i)^2}+\frac{3}{2}(2s_i-d_i-d_{i+1})\frac{(x-x_i)^2}{x_{i+1}-x_i}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(x-x_{i+1})^2}{x_{i+1}-x_i}d_i+\frac{1}{2}\frac{(x-x_i)^2}{x_{i+1}-x_i}d_{i+1}+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)d_i+y_i$$

当 $d_{i+1}+d_i=2s_i$ 时，$H_i(x)$退化为二次多项式

$$s_i(x)=-\frac{1}{2}\frac{(x-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_i)}d_i+\frac{1}{2}\frac{(x-x_i)^2}{x_{i+1}-x_i}d_{i+1}+\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)d_i+y_i \quad (1)$$

由式(1)可直接得到下面的引理。

引理 1 $s_i(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上单调增（减）的充要条件是 d_i、$d_{i+1}\geqslant 0$（d_i、$d_{i+1}\leqslant 0$）。

引理 2 当 $d_{i+1}-d_i\geqslant 0$ 时，$s_i(x)$是下凸的；当 $d_{i+1}-d_i\leqslant 0$ 时，$s_i(x)$是上凸的。

2 单调保凸的二次样条插值方法

下面我们就$\{y_i\}_{i=0}^{n+1}$为单调增数组的情形给出单调保凸二次插值样条函数 $s(x)$的构造方法。

2.1 确定 $s(x)$在各节点处的导数值

对于区间$[a,b]$的内节点，令

$$d_i=s'(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n \quad (2)$$

对边界点 x_0、x_{n+1}，可以按插值条件指定 $s'(x_0)=d_0$，$s'(x_{n+1})=d_{n+1}$，其选取方式为

$$\begin{cases}当\ D^2y_1>0\ 时, d_0=\lambda s_1, 0<\lambda<1;\\ 当\ D^2y_1<0\ 时, d_0=\lambda s_1, \lambda>1;\\ 当\ D^2y_n>0\ 时, d_{n+1}=\lambda s_{n+1}, \lambda>1;\\ 当\ D^2y_n<0\ 时, d_{n+1}=\lambda s_{n+1}, 0<\lambda<1.\end{cases} \quad (3)$$

2.2 无拐点子区间上的插值函数 $s(x)$

设 D^2y_i 与 D^2y_{i+1}同号，则 $s(x)$在区间$[x_i,x_{i+1}]$内无拐点，过点(x_i,y_i)与(x_{i+1},y_{i+1})分别作斜率为 d_i 与 d_{i+1}的直线 l_i 与 l_{i+1}，记两直线的交点为(x_M,y_M)，则

$$\begin{cases} x_M = (d_{i+1}x_{i+1} - d_ix_i - y_{i+1} + y_i)/(d_{i+1} - d_i) \\ y_M = y_i + d_i(x_M - x_i) \end{cases} \tag{4}$$

不妨设 $D^2y_i>0$，$D^2y_{i+1}>0$，于是有 $s_i-s_{i-1}>0$，$s_{i+1}-s_i>0$，即

$$s_{i-1} < s_i < s_{i+1} \tag{5}$$

再由

$$d_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = s_i\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} + s_{i-1}\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

知 $d_i<s_i$. 同理可知 $d_{i+1}>s_i$. 从而得到

$$0 < d_i < s_i < d_{i+1} \tag{6}$$

且由此可保证 $x_i<x_M<x_{i+1}$.

$[x_i,x_{i+1}]$上由 l_i，l_{i+1}组成的折线函数记为 $L(x)$，则

$$L(x) = \begin{cases} l_i(x), & x \in [x_i,x_M] \\ l_{i+1}(x), & x \in [x_M,x_{i+1}] \end{cases} \tag{7}$$

式中，$\qquad l_i(x) = y_i + d_i(x - x_i);l_{i+1}(x) = y_{i+1} + d_{i+1}(x - x_{i+1})$

以下我们分两种情况构造 $s_i(x)$。

(1) 若 $d_i+d_{i+1}=2s_i$，则由式(1)直接得到$[x_i,x_{i+1}]$上的 $s_i(x)$，且由引理 1、2 和式(6)知 $s_i(x)$是单调增下凸的。

(2) 若 $d_i+d_{i+1}\neq 2s_i$，则令

$$\begin{cases} x_i^+ = \dfrac{x_i + x_M}{2}, & y_i^+ = \dfrac{y_i + y_M}{2} \\ x_{i+1}^- = \dfrac{x_M + x_{i+1}}{2}, & y_{i+1}^- = \dfrac{y_M + y_{i+1}}{2} \end{cases} \tag{8}$$

设连接(x_i^+,y_i^+)与(x_{i+1}^-,y_{i+1}^-)的线性函数为 $l(x)$，

即 $\qquad l(x) = y_i^+ + s_i(x - x_i^+)$

插入新的型值点$(x_p,y_p)=(x_M,l(x_M))$

$=\left(x_M,y_i^+ + s_i\dfrac{x_M-x_i}{2}\right)$，并取该型值点处的导数为 s_i(见图 1)。

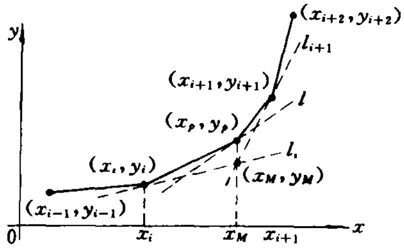

图 1 新的型值点处的导数

由式(6)知 $d_i<s_i$，且

$$2\frac{y_p - y_i}{x_p - x_i} = \frac{2}{x_p - x_i}\left(\frac{y_M - y_i}{2} + s_i\frac{x_M - x_i}{2}\right) = s_i + d_i$$

同样 $s_i<d_{i+1}$且 $2\dfrac{y_{i+1}-y_p}{x_{i+1}-x_p}=s_i+d_{i+1}$。于是由式(1)得到 $s_i(x)$：

$$s_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{(x_M - x)^2}{x_M - x_i}d_i + \dfrac{1}{2}\dfrac{(x - x_i)^2}{x_M - x_i}s_i + \dfrac{1}{2}(x_M - x_i)d_i + y_i, \\ \qquad x \in [x_i,x_M] \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{(x_{i+1} - x)^2}{x_{i+1} - x_M}s_i + \dfrac{1}{2}\dfrac{(x - x_M)^2}{x_{i+1} - x_M}d_{i+1} + \dfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_M)s_i + y_p, \\ \qquad x \in [x_M,x_{i+1}] \end{cases} \tag{9}$$

由上面的构造知 $s_i(x)\in C^1[x_i,x_{i+1}]$，且 $s_i(x)$是单调增下凸的。

2.3 有拐点子区间上的插值函数

当 D^2y_i 与 D^2y_{i+2}异号时，则插值函数在$[x_i,x_{i+1}]$上有一拐点，记

$$\overline{x}_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2},\quad \overline{y}_i=s(\overline{x}_i)=\frac{y_i+y_{i+1}}{2},\quad s'(\overline{x}_i)=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\lambda$$

式中，当 $D^2y_i>0$，$D^2y_{i+1}<0$，即 $s_i>s_{i-1}$，$s_i>s_{i+1}$时，取 $\lambda>1$，如图 2(a)；当 $D^2y_i<0$，$D^2y_{i+1}>0$，即 $s_i<s_{i-1}$，$s_i<s_{i+1}$时，取 $\lambda<1$，如图 2(b)。

由无拐子区间上插值函数的构造方法，我们可以在$[x_i,\overline{x}_i]$、$[\overline{x}_i,\overline{x}_{i+1}]$上分别构造单调凸的 C^1 二次多项式，它们的单调性相同而凸性正好相反，所以，$(\overline{x}_i,\overline{y}_i)$是$[x_i,x_{i+1}]$上的唯一拐点。

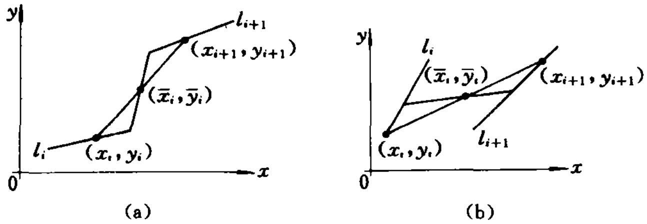

图 2 各拐点的插值函数

从上述插值函数 $s(x)$ 的构造过程，我们可以得到下面的保单调性和保凸性定理。

定理 1 （保单调性定理）设$\{y_i\}_{i=1}^n$是$[a,b]$的分划 Δ 上的单调增数组，则$[a,b]$上的插值函数 $s(x)$具有一阶连续导数，且 $s'(x)>0$.

定理 2 （保凸性定理）当二阶差商 D^2y_i 与 D^2y_{i+1}同号时，则 $s''(x)$在子区间$[x_i,x_{i+1}]$上与 D^2y_i 同号，即有相同的凸性；当二阶差商 D^2y_i 与 D^2y_{i+1}异号时，则 $s''(x)$在$[x_i,\overline{x}_i]$上与 D^2y_i 同号，在$[\overline{x}_i,x_{i+1}]$上与 D^2y_i 异号，即 $s(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上有一拐点。

3 误差分析

设 $L(x)$表示过点(x_i,y_i)与(x_{i+1},y_{i+1})的折线函数，$s(x)$为插值函数，$x_M\in(x_i,x_{i+1})$为 $L(x)$的角点坐标。

引理 3 设$[x_i,x_{i+1}]$为无拐点子区间，则有下述误差估计：

$$|s(x)-L(x)|\leqslant|s(x_M)-L(x_M)|\quad(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

证明 令 $e(x)=s(x)-L(x)$。若$[x_i,x_{i+1}]$为无拐点子区间的情形(1)，则

$$e'(x)=s'(x)-L'(x)=-\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i}d_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}d_{i+1}-d_i$$

$$=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}(d_{i+1}-d_i)>0\qquad(x_i\leqslant x\leqslant x_M)$$

若$[x_i,x_{i+1}]$为无拐点子区间的情形(2)，则

$$e'(x)=\frac{x-x_i}{x_M-x_i}(s_i-d_i)>0\qquad(x_i\leqslant x\leqslant x_M)$$

又因 $e(x_i)=0$,故

$$|e(x)|=|s(x)-L(x)|\leqslant|e(x_M)|=|s(x_M)-L(x_M)|\qquad(x_i\leqslant x\leqslant x_M)$$

同理可证 $$|s(x)-L(x)|\leqslant|s(x_M)-L(x_M)|\qquad(x_M\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

综上引理得证。

定理 3 （逼近定理）设单调函数 $f(x)\in C^2[a,b]$，则 $f(x)$的 C^1 二次样条插值函数 $s(x)$满足：
$$|s(x)-f(x)|=O(h^2)$$
式中，$h=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}|x_{i+1}-x_i|$。即 $s(x)$有二阶逼近精度。

证明 因 $f(x)$可微，由 Lagrange 中值定理知，存在 $\phi\in(x_{i-1},x_{i+1})$，$\eta\in(x_i,x_{i+2})$，$\phi_0\in(x_i,x_{i+1})$，使
$$f'(\phi)=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}=s'(x_i)=d_i$$
$$f'(\eta)=\frac{y_{i+2}-y_i}{x_{i+2}-x_i}=s'(x_{i+1})=d_{i+1};\quad f'(\phi_0)=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}=s_i$$
首先考虑折线函数 $L(x)$与 $f(X)$的误差。

若$[x_i,x_{i+1}]$是无拐点子区间，当 $x\in[x_i,x_M]$时，$f(x)$在 x_i 处的泰勒展开式为
$$f(x)=f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)+\frac{1}{2}f''(\theta)(x-x_i)^2\quad(x_i<\theta<x_{i+1})$$
于是由折线函数式(7)知，当 $x\in[x_i,x_M]$时
$$\begin{aligned}|f(x)-L(x)|&=|f(x)-f(x_i)-s'(s_i)(x-x_i)|\\&\leqslant|f'(x_i)-s'(x_i)||x-x_i|+\frac{1}{2}|f''(\theta)||x-x_i|^2\\&=|f'(x_i)-f'(\phi)||x-x_i|+\frac{1}{2}|f''(\theta)||x-x_i|^2\\&=|f''(\theta_0)||x-x_i||x_i-\phi|+\frac{1}{2}|f''(\theta)||x-x_i|^2\\&\leqslant\left(M+\frac{1}{2}M\right)h^2=\frac{3}{2}Mh^2\end{aligned}$$
式中 θ_0 位于 x_i 与 ϕ 之间，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$。

同理，当 $x\in[x_M,x_{i+1}]$时，由 $f(x)$在 x_{i+1}处的泰勒展开式得 $|f(x)-L(x)|\leqslant\frac{3}{2}Mh^2$，从而知，当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时，有 $|f(x)-L(x)|\leqslant\frac{3}{2}MH^2$.

现考虑 $s(x)$与 $L(x)$的误差。

由引理 3、式(7)和式(9)得
$$\begin{aligned}&|s(x)-L(x)|\leqslant|s(x_M)-L(x_M)|\\&=\left|\frac{1}{2}s_i\cdot(x_M-x_i)+\frac{1}{2}(x_M-x_i)d_i+y_i-(y_i+d_i(x_M-x_i))\right|\\&=\left|\frac{1}{2}(x_M-x_i)s_i+\frac{1}{2}(x_M-x_i)d_i-d_i(x_M-x_i)\right|\\&=\frac{1}{2}|s_i-d_i||x_M-x_i|=\frac{1}{2}|f'(\phi_0)-f'(\phi)||x_M-x_i|\leqslant Mh^2\end{aligned}$$
故当 $x\in[x_i,x_{i+1}]$时，有
$$|s(x)-f(x)|\leqslant|f(x)-L(x)|+|L(x)-s(x)|\leqslant\frac{5}{2}Mh^2$$

若$[x_i, x_{i+1}]$是有拐点的子区间，令

$$q(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) = y_i + (x - x_i)s_i = y_i + f'(\phi_0)(x - x_i)$$

由有拐点子区间上 $s(x)$的构造，显然有 $|s(x)-q(x)| \leqslant |L(x)-q(x)|$

当 $x \in [x_i, \bar{x}_i]$时

$$|s(x) - q(x)| \leqslant |l_i(x) - q(x)| \leqslant |s_i - d_i||x - x_i| \leqslant Mh^2$$

同理，当 $x \in [\bar{x}_i, x_{i+1}]$时，有 $|s(x)-q(x)| \leqslant Mh^2$

而当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$时，又有

$$|f(x) - q(x)| = |f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \frac{f''(\theta)}{2}(x - x_i)^2 - y_i - f'(\phi_0)(x - x_i)|$$

$$= |f'(x_i) - f'(\phi_0)||x - x_i| + \frac{1}{2}Mh^2 \leqslant Mh^2 + \frac{1}{2}Mh^2 = \frac{3}{2}Mh^2$$

从而知，对 $x \in [x_i, x_{i+1}]$时，有

$$|f(x) - s(x)| \leqslant |f(x) - q(x)| + |q(x) - s(x)|$$

$$\leqslant \frac{3}{2}Mh^2 + Mh^2 = \frac{5}{2}Mh^2$$

综上得知，当 $x \in [x_i, x_{i+1}]$时，有 $|f(x)-s(x)| \leqslant \frac{5}{2}Mh^2 = O(h^2)$ （证毕）

参 考 文 献

1 Gregory J A and Delbourgo R. IMA Journal of Numerical Analysis，1982，123～130

2 文涛. 计算数学. 1980，2(4)：299～306

3 Randall L，Edelman A and Hyman J M. Computational Mathematics. 1989，52(186)

4 方逵，张新建. 南昌：全国第六届 CAD/CG 会议论文集. 1990

The Interpolation Algorithm of Shape Preserving for Monotonic Functions

Fang Kui　Zhang Xinjian

(Department of Systems Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

For a given sequence of monotonic data，a shape preserving quadric interpolation spline function that is simple to construct and easy to calculate is described in this paper. The error estimates for the interpolation spline functions are given and the approximate precision is O(h^2).

Key words interpolation spline，monotonity，property of convex preserving