国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第1期　1993年3月　Vol. 15 No. 1

计算机"二一十"进制数据转换算法*

钟志新

（电子计算机系）

摘　要　"二一十"转换是计算机中经常用到的，将二进制浮点数 $0.B_1B_2\cdots B_n*2^B$ 转换成十进制数 $0.D_1D_2\cdots D_n*10^D$ 的关键是首先求出 D。本文通过全面研制二进制浮点数的性质，推导出了一个关于精确求 D 的重要结论，并由此构造出一个实际应用时总误差最小的高效求 D 公式。

关键词　数据，转换，浮点数，二进制，十进制，变指尾数点，下确界，最小值

分类号　TP301.6

数据输出是用户获取程序运行结果的重要手段之一。从系统软件角度看，数据输出就是将数据的内部形式转换成为外部形式。在诸多转换中，使用频度最高、实现难度最大的是将二进制浮点数转换成十进制数，即完成形如：$0.B_1B_2\cdots B_n*2^B\Rightarrow 0.D_1D_2\cdots D_m*10^D$ 的数据转换。通常，这种转换（记为BTD）需经历如下三个步骤：

（1）由给定的规格化二进制浮点数 $0.B_1B_2\cdots B_n*2^B$ 计算出十进制数的指数 D.

其中，$0.B_1B_2\cdots B_n=\sum_{i=1}^{n}B_i*2^{-i}$ 称为尾数，$B_i=0$ 或 1，规格化指 $B_1\neq 0$，n 是硬件能精确表示的位数。显然，$0.B_1B_2\cdots B_n\in[0.5\quad 1.0)$，$B$ 是二进制数的阶码。

（2）接着计算十进制数的规格化小数 $0.D_1D_2\cdots D_m=0.B_1B_2\cdots B_n*2^B*10^{-D}$。

其中，$0.D_1D_2\cdots D_m=\sum_{i=1}^{m}D_i*10^{-i}$ 称为小数，$D_i=0\sim 9$，规格化指 $D_1\neq 0$，m 是用户要求的输出位数，显然，$0.D_1D_2\cdots D_m\in[0.1\quad 1.0)$。

（3）将 $0.D_1D_2\cdots D_m$ 和 D 按ASCII码以适当形式输出。

可见，第一步求出的 D 是贯穿BTD的全过程，特别是对第二步计算小数至关重要，因为小数 $0.D_1D_2\cdots D_m$ 是通过 K（$\geqslant 1$）次调用"双精度乘法子程序"按算式（…（（$0.B_1B_2\cdots B_n*2^B*10^{D1}$）$*10^{D2}$）$*\cdots$）$*10^{DK}$ 求出来的，其中，$D1+D2\cdots+DK=-D$，10^{Di}（$i=1, 2, \cdots, K$）查表取得。如果第一步求出的 D 有误，那么第二步求出的小数就不能满足规格化要求，故需修正，即再调用一次"双精乘"。这显然会增加BTD的运行时间，所以，寻找快速可靠的求 D 公式，避免或减少修正，是BTD算法的核心问题。

传统BTD算法中的求 D 公式是：

* 1992年4月27日收稿

$$D = \lfloor B * \log_{10} 2 \rfloor + 1 \quad (1)$$

式（1）中没有引入尾数，是不是它对求 D 过程没有影响呢？考查 $B=4$ 的情况，由式（1）可求得 $D=2$。但分析表明，对于 $B=4$，存在一个特殊的尾数点 $t_B=0.625$，若给定的尾数 $\geqslant t_B$，式(1)总是对的；若给定的尾数 $<t_B$，式(1)总是错的(计算值比实际值大 1)。可见，t_B 在求 D 过程中有"门限"的作用。

考查规格化二进制浮点数 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B$，其值域为 $[2^{B-1} \quad 2^B)$。若令 $2^{B-1}=0.D'_1D'_2\cdots D'_m * 10^{D'}$，$2^B=0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D$，且 D'_1 和 D_1 均不为 0，显然，D' 与 D 可能相等，也可能不相等(差 1)。由此引出了二个定义：

定义 1　对任意给定的规格化二进制浮点数，若阶码 B 使得 2^{B-1} 和 2^B 用规格化十进制数表示时，有指数 $D'=D$，则称 B 是稳定阶；若有指数 $D'+1=D$，则称 B 是不稳定阶。

根据定义，$B=4$ 是一个不稳定阶。

定义 2　设 B 是不稳定阶，称 t_B 是关于 B 的变指尾数点。如果尾数 $\geqslant t_B$ 时，有 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B=0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D$；如果尾数 $<t_B$ 时，有 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B=0.D'_1D'_2\cdots D'_m * 10^{D-1}$。

根据定义，对所有不稳定阶 B，因尾数的不同，十进制数的指数 D 有两个可能的取值，但式(1)忽略尾数在求 D 过程中的影响，只能求出其中之一，因而正确性受到损失。

我们关心的问题是：

(1)对于一个给定的计算机系统，在二进制浮点数阶码的取值范围内究竟有多少个是不稳定阶？这个数可以帮助我们了解式(1)出错的严重程度。

(2)对于一个给定的二进制浮点数，如何断定其阶码是不稳定阶？

(3)对所有不稳定阶，如何求出相应的变指尾 数点？

下面我们将逐一回答这些问题，并推导出一个理论上的精确求 D 公式。

1　精确求 D 公式

对于一个给定的计算机系统，从二进制浮点数阶码 B 的取值范围，可以导出十进制数指数 D 的取值范围。下面的定理将告诉我们：D 有多少个可能的取值，B 的取值范围中就会有多少个不稳定阶。

引理　对任意给定的指数 D，存在唯一一组阶码 B_D 和相应的规格化小数 $0.D_1D_2\cdots D_m$，使得 $2^{B_D}=0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D$。

证明　记 $\mathrm{Dom}(B_D)=[\frac{D-1}{\log_{10}2} \quad \frac{D}{\log_{10}2})$，它有如下性质：

(1)$\mathrm{Dom}(B_D)$ 与 D 是一一对应的；

(2)$\mathrm{Dom}(B_D)$ 中的元素(即阶码值)个数至少 3 个，至多 4 个；

(3)任意两个不同的 Dom，交集为空，因而任意阶码 B 只能属于某一个 Dom。上述性质不难验证，故证明略去。

任取 $B\in \mathrm{Dom}(B_D)$，因为

$$\frac{D-1}{\log_{10}2} \leqslant B < \frac{D}{\log_{10}2}$$

故 $$D-1 \leqslant B * \log_{10}2 < D$$

设 $2^B=X$,取对数得 $B*\log_{10}2=\log_{10}X$

从而有:$D-1\leqslant\log_{10}X<D$,即有:$10^{D-1}\leqslant X<10^D$

故可令 $X=0.D_1D_2\cdots D_m*10^D$,且 $D_1\neq 0$

即有:$2^B=0.D_1D_2\cdots D_m*10^D$,且 $D_1\neq 0$ (2)

由 B 的取法和 $\mathrm{Dom}(B_D)$的性质知引理得证。

定理 1 对于任意给定的指数 D,存在唯一一个不稳定阶 B。

证明 令 $B=\min\{B' \mid B'\in\mathrm{Dom}(B_D)\}$

则 $$B=\begin{cases}0 & 若 D=1\\ \lfloor\dfrac{D-1}{\log_{10}2}\rfloor+1 & 若 D\neq 1\end{cases}$$

对于 $D=1$ 的情况,$B=0$ 是不稳定阶容易检证。

假设 $D\neq 1$,由引理知有:

$$2^B=2^{\lfloor\frac{D-1}{\log_{10}2}\rfloor+1}=0.D_1D_2\cdots D_m*10^D,且 D_1\neq 0$$

下面证有 $2^{B-1}=0.D'_1D'_2\cdots D'_m*10^{D-1}$,且 $D'_1\neq 0$,我们从考查 $0.D_1D_2\cdots D_m$ 的大小着手:

因 $$\lfloor\frac{D-1}{\log_{10}2}\rfloor<\frac{D-1}{\log_{10}2}$$

故 $$0.D_1D_2\cdots D_m*10^D,<2^{\frac{D-1}{\log_{10}2}+1}=2^{\frac{D-1+\log_{10}2}{\log_{10}2}}$$

故有 $$D+\log_{10}0.D_1D_2\cdots D_m<D-1+\log_{10}2$$

即 $$\log_{10}0.D_1D_2\cdots D_m<\log_{10}(2*10^{-1})$$

故有 $$0.1\leqslant 0.D_1D_2\cdots D_m<0.2 \quad (3)$$

由此可得 $2^{B-1}=\dfrac{2^B}{2}=\dfrac{0.D_1D_2\cdots D_m}{2}*10^D=0.0D'_1D'_2\cdots D'_m*10^D=0.D'_1D'_2\cdots D'_m*10^{D-1}$,且 $D'_1\neq 0$

所以,$B\lfloor\dfrac{D-1}{\log_{10}2}\rfloor+1$ ($D\neq 1$) 是不稳定阶。

由 B 的取法知,B 是唯一的,定理 1 得证。

根据定理 1 的结论和 Dom (B_D) 的大小知,在 B 的取值范围内,有近 1/3 的阶码可能导致式 (1) 计算出错。因此,寻找更为可靠的求 D 公式是必要的。下面的定理为这个努力提供了线索。

定理 2 对任意给定的阶码 B,B 是不稳定阶当且仅当 $\lfloor B*\log_{10}2\rfloor=\lfloor(B-1)*\log_{10}2\rfloor+1$;$B$ 是稳定阶当且仅当 $\lfloor B*\log_{10}2\rfloor=\lfloor(B-1)*\log_{10}2\rfloor$。

证明 设 B 是不稳定阶,由定义有: $2^B=0.D_1D_2\cdots D_m*10^D$,$2^{B-1}=0.D'_1D'_2\cdots D'_m*10^{D-1}$,且 D_1,D'_1 不为 0 取对数再取下确界得:

$$\lfloor B*\log_{10}2\rfloor=D-1,\lfloor(B-1)*\log_{10}2\rfloor=D-2 \quad (4)$$

显然有:$\lfloor B*\log_{10}2\rfloor=\lfloor(B-1)*\log_{10}2\rfloor+1$

必要条件得证。

下面证充分条件:设 $\lfloor B*\log_{10}2\rfloor=\lfloor(B-1)*\log_{10}2\rfloor+1$,由引理中的式 (2)

中，可以假定：

$$2^B = 0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D \tag{5}$$

从而有：$\lfloor B * \log_{10}2 \rfloor = D-1$

由充分性假设，有：$\lfloor (B-1) * \log_{10}2 \rfloor = D-2$

即 $(B-1) * \log_{10}2 = D-1+\Delta$，其中 $-1 \leqslant \Delta < 0$

令：$\Delta = \log_{10}0.D'_1D'_2\cdots D'_m$，且 $D'_1 \neq 0$

可得 $2^{B-1} = 0.D'_1D'_2\cdots D'_m * 10^{D-1}$ (6)

由式（5）和（6）知，B 是不稳定阶，充分条件得证。

B 是稳定阶的充要条件证明类似。(证略)

从定理 2 证明过程中导出的式（4）可以看到：$\lfloor B * \log_{10}2 \rfloor + 1 = D$，$\lfloor (B-1) * \log_{10}2 \rfloor + 1 = D-1$，它们有相同的计算模式，若用 B 参与运算可求得 D，若用 $B-1$ 参与运算可求得 $D-1$，这使我们设想：能否引入一种控制，使得式（1）在求 D 时，可根据所给二进制浮点数尾数值的不同，正确选择 B 或 $B-1$ 参与运算，从而获得正确的指数 D. 下面的定理找到了这种控制。

定理 3 若 B 是不稳定阶，则关于 B 的变指尾数点 $t_B = 10^{\lfloor B * \log_{10}2 \rfloor}/2^B$。

证明 因 B 是不稳定阶，易知有：$2^{B-1} < 10^{D-1} \leqslant 2^B$

即有：$2^{-1} < 10^{D-1}/2^B \leqslant 1$

由定理 2 与式（4）知：$t_B = 10^{D-1}/2^B$

因为对所有小于 t_B 的尾数有：

$$0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B < t_B * 2^B = 10^{D-1}$$

且 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B = 0.B_1B_2\cdots B_n * 0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D \geqslant 0.5 * 0.1 * 10^D = 0.5 * 10^{D-1}$

故有 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B = 0.D'_1D'_2\cdots D'_m * 10^{D-1}$，且 $D'_1\ (\geqslant 5) \neq 0$

对所有大于等于 t_B 的尾数有：

$$0.B_1B_2\cdots B_n 2^B \geqslant t_B * 2^B = 10^{D-1} = 0.1 * 10^D$$

且由定理 1 式(3)知，$0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B < 2^B < 0.2 * 10^D$

故有 $0.B_1B_2\cdots B_n * 2^B = 0.D_1D_2\cdots D_m * 10^D$，且 $D_1\ (=1) \neq 0$

所以，t_B 是关于 B 的变指尾数点。定理 3 得证。

若事先求出全部的 t_B 并存于一张表，则可构造如下求 D 公式：

$$D = \lfloor \mathrm{INT}(B.B_1B_2\cdots B_n - t_B) * \log_{10}2 \rfloor + 1 \tag{8}$$

其中，$B.B_1B_2\cdots B_n$ 是分离二进制浮点数的阶码与尾数后组合而成的定点数；INT 是取整操作。

显然，对于不稳定阶 B，式（8）能够根据尾数 $0.B_1B_2\cdots B_n$ 与 t_B 的大小关系正确选择 B 或 $B-1$ 参与运算，得到正确结果。对于稳定阶，式（8）未加判断地也做了同样的选择。由定理 2 知，此举不影响正确性。因此，若不考虑硬件精度位数限制带来的误差，式（8）是一个精确求 D 公式。

下一节我们将从工程的角度评价式（8），进而给出一个可实际应用的最小总误差求 D 公式。

2 最小总误差求 D 公式

将式（8）应用于工程实际时，有如下三个问题：（1）受机器字长限制，二进制浮点数的尾数和 t_B 值存在误差。因此，式（8）的计算结果仍含有误差；（2）t_B 的个数由定理1知是一个不小的数，将 t_B 存于表中会占用一大片主存单元；（3）为得到 t_B 需查表。这会严重地影响算法效率，因此，要找到一个空间比式（8）小，正确性比式（1）高的实用求 D 公式。

方法之一是取一常数 t 来代替表中的全部 t_B，即令：

$$D = \lfloor \mathrm{INT}(B.B_1B_2\cdots B_n - t) * \log_{10}2 \rfloor + 1 \quad (9)$$

显然它没有空间占用，但 t 取何值才能使式（9）具有最小误差呢？

用 t 代替各个 t_B，出错的尾数区间是 $[t_B\ t)$ 或 $[t\ t_B)$。若将所有的 t_B 按大小排序并赋一下标，可得：$t_{B1}<t_{B2}<\cdots<t_{BN}$，其中 N 为变指尾数点的最大个数，$t_{B_N}=1.0, t_{B_1}>0.5$，则 $f(t)=\sum_{i=1}^{N}|t-t_{B_i}|$，$t\in[t_{B_1}\ t_{B_N}]$ 表示用 t 代替各个 t_B 时，出错区间的总和。下面求解使 $f(t)$ 最小的 t 值。

该问题更一般的描述是：

已知：$0.5=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}<\cdots<t_N=1.0$，$N$ 为正整数，函数 $f(t)=\sum_{i=0}^{N}|t-t_i|$，$t\in[t_0\ \ t_N]$，试求使 $f(t)$ 在 $[t_0\ \ t_N]$ 上取小值的点 t'.

解 函数 $f(t)$ 在 $[t_0\,t_N]$ 上是连续的。（易证，略）

由连续函数在闭区间上的性质知，在 $[t_0\,t_N]$ 上至少存在一点 t' 使 $f(t')$ 是函数 $f(t)$ 在该区间上的最小值。

将闭区间 $[t_0\,t_N]$ 分割成 N 个子区间 $[t_m\,t_{m+1}]$，$m=0,1,\cdots N-1$. 设 $t\in[t_m\,t_{m+1}]$，则有

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=0}^{N}|t-t_i| = \sum_{i=0}^{m}(t-t_i)+\sum_{i=m+1}^{N}(t_i-t) \\ &= (2m-N+1)t+C, C=\sum_{i=m+1}^{N}t_i-\sum_{i=0}^{m}t_i \end{aligned}$$

可见，函数 $f(t)$ 在各子区间上表现为线性函数，故其极小值必在端点处取得，所以使函数 $f(t)$ 在 $[t_0\,t_N]$ 上取最小值的点必在 t_i 中找到。

因为对于所有的 $m<\lceil\frac{N-1}{2}\rceil$，函数 $f(t)$ 在 $[t_m\,t_{m+1}]$ 上均是递减的，对于所有的 $m>\lceil\frac{N-1}{2}\rceil$，$f(t)$ 在 $[t_m\,t_{m+1}]$ 上均是递增的；对于 $m=\lceil\frac{N-1}{2}\rceil$，若 N 为偶数，$f(t)$ 在 $[t_m\,t_{m+1}]$ 上是递增的，若 N 为奇数，$f(t)$ 在 $[t_m\,t_{m+1}]$ 上恒取 C，所以 $t'=t_{\lceil\frac{N-1}{2}\rceil}$ 必使函数 $f(t)$ 在 $[t_0\,t_N]$ 上取得最小值。（解毕）

式（1）是式（9）的一个特例，即取 $t'=0.5$. 由函数 $f(t)$ 在区间 $[t_0\,t_{\lceil\frac{N-1}{2}\rceil}]$ 上的递减性知：$f(0.5)>f(t_{\lceil\frac{N-1}{2}\rceil})$，就是说式（9）的误差区间总和比式（1）要小，因此正确性更高。

3 结束语

式（9）中取 $t=t_{\lceil\frac{N}{2}-1\rceil}$是基于公式可能遇到系统允许的全部二进制浮点数而推导出来的。如果一个计算机系统是应用于某个专门领域的，公式遇到的浮点数中，t_B 有聚类性，例如偏向基本区间[0.5　1.0)的某个部分，那么 t 的取值可以在一个更小的范围考虑，方法与结论形式均同上，但公式更具针对性，效率也将更高。

本文的研究曾得到李晓梅教授、蔡放讲师的帮助，在此表示感谢。

参考文献

1　国防科技大学六系．YHIO 运行系统设计说明．1983

2　国防科技大学六系．YFT77 设计说明书．1988

The Reseach on BTD Algorithm of Data Conversion in Computer

Zhong Zhixin

(Department of Computer science)

Abstract

The binary－to－decimal (BTD) conversion is often used in computer. It is the key problem to calculate D first for converting the binary floating point number (BFPN) 0. $B_1B_2\cdots B_n * 2^B$ into the decimal 0. $D_1D_2\cdots D_m * 10^D$. In this paper, we comprehensively studied the nature of BFPNand inferred an important conclusion for calculating D precisely. Based on the conclusion we constructed a high efficient formula which can not only calculate D but also keep the total error minimum in application.

Key words　date, conversion, floating point number, binary system, decimal system.