国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第1期 1993年3月 Vol. 15 No. 1

正扰动下一类 R^N 上临界增长的椭圆型方程的正解的存在性*

周海银
（系统工程与应用数学系）

摘　要　本文讨论了如下方程：$\operatorname{div}(|Du|^{P-2}Du)+k(x)u^{P-1}=K(x)u^{\bar{P}-1}+g(x,u)$，$u\in W^{1,P}(R^N)$，$4\leqslant P^2\leqslant N$，$\bar{P}=NP/N-P$，并得到了它的正解的存在性，其中 $g(x,u)$ 为 $u^{\bar{P}-1}$ 的低阶扰动。它是文[1]的继续。

关键词　椭圆方程，正解，临界增长，正扰动，嵌入，弱收敛

分类号　O175.25

考虑如下拟线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|Du|^{P-2}Du)+k(x)u^{P-1}=K(x)u^{\bar{P}-1}+g(x,u) \\ u\geqslant 0, u\in W^{1,P}(R^N), 4\leqslant P^2\leqslant N \end{cases} \tag{1}$$

在零扰动下，为了得到 $C_0\in(0,A)$ 的存在性，需要假设在 $K(x)$ 的最大值点 x_0 处有 $k(x_0)<0$. 由于有了正扰动，这一条件不必满足。其中常数 A 定义为 $A=S^{\frac{N}{P}}/NK(x_0)^{\frac{N-P}{P}}$.

没有另加说明的记号均如文献[1]。

假设 $k(x)\in C_0(R^N)$，$k(x)>k_0>0$，$g(x,u)$，$K(x)$ 满足；

(F_1)：$g(x,u)$ 局部 Lipschitz 连续，且当 $u\leqslant 0$，$x\in R^N$ 时，$g(x,u)=0$；$u\to 0^+$ 时 $g(x,u)=0(u^{P-1})$ 一致成立。

(F_2)：$0\leqslant g(x,u)\leqslant b(x)(|u|^{P-1}+|u|^{s-1})$，$p<s<\bar{p}$，其中 $b(x)$ 连续且 $0\leqslant\sup\limits_{|x|\geqslant R}b(x)\leqslant\varepsilon(R)$，$\lim\limits_{R\to+\infty}\varepsilon(R)=0$.

(F_3)：存在常数 $\theta\in(0,\frac{1}{p})$，使得对任意 $u\geqslant 0$，下式成立

$$G(x,u)=\int_0^u g(x,s)ds\leqslant\theta g(x,u)\cdot u$$

(F_4)：$K(x)\in C^1(R^N)$，$K(x)\geqslant 0$，存在 $x_0\in R^N$，使得 $0<K(x_0)=\sup\limits_{x\in R}K(x)$，$K(x_0)>\bar{K}=\lim\limits_{R\to+\infty}\sup\limits_{|x|\geqslant R}K(x)$.

令 $E=W^{1,P}(R^N)$，在 E 上定义如下泛函：

$$J(u)=\int_{R^N}\left\{\frac{1}{p}(|Du|^p+k(x)|u|^p)-G(x,u^+)-\frac{1}{\bar{p}}K(x)(u^+)^{\bar{p}}\right\}dx$$

则有 $J(u)\in C^1(E,R^1)$.

* 1991年6月6日收稿

定理 1 设(F_1-F_4)成立，如果存在常数$C_0\in(0,A)$，及序列$\{u_n\}\subset E$，使得$J(u_n)\to C_0, J'(u_n)\to 0$，那么问题(1)存在正解。

证明 由$J(u_n)\to C_o, J'(u_n)\to 0$可以得到

$$\int_{R^N}\left\{\frac{1}{P}(|Du_n|^P+k(x)|u_n|^P)-\frac{1}{\bar{P}}K(x)(u_n^+)^{\bar{P}}-G(x,u_n^+)\right\}=C_0+0(1) \tag{2}$$

$$-\operatorname{div}(|Du_n|^{P-2}Du_n)+k(x)|u_n|^{P-2}u_n-K(x)(u_n^+)^{\bar{P}-1}-g(x,u_n^+)=\varepsilon_n \tag{3}$$

其中$\varepsilon_n\to 0(n\to+\infty)$.

容易证明$\{u_n\}$是$E\cap L^{\bar{P}}(R^N)$中有界序列。从而存在子序列，仍记为$\{u_n\}$及$u\in E$使得

$u_n\xrightarrow[n]{弱}u$, $u_n\to u$ a.e. R^N

$u_n\to u$，在$L^q(B_R(0))$中，$R<+\infty, p\leqslant q<\bar{p}, (u_n^+)^{\bar{p}-1}\xrightarrow{弱}(u^+)^{\bar{p}-1}$ 在$(L^{\bar{p}}(R^N))^*$中。

令$\rho_n=|Du_n|^P+k(x)|u_n|^P$，不失一般性可以假设$\int_{R^N}\rho_n\to\lambda\geqslant 0$. 如果$\lambda=0$，由$(F_2)$及$\{u_n\}$的有界性得$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N}g(x,u_n^+)u_n^+=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{R^N}G(x,u_n^+)=0$，从而由(2)(3)得$C_0=0$. 这与假设矛盾。故$\lambda>0$.

下面根据集中紧引理证明$\{u_n\}$是紧序列。

(i)"消失"不能发生。反证：如果不然，因为$|\int_{R^N}g(x,u_n^+)u_n^+|\leqslant C\int_{|x|\leqslant R}(|u_n|^P+|u_n|^S)+\varepsilon(R)\int_{|x|\geqslant R}(|u_n|^P+|u_n|^S)$，利用"消失性，类似于文[1]的讨论得$C_0\geqslant A$. 这与$C_0$的假设矛盾，$(i)$得证。

(ii)"两分"不能发生。证明同文[1]类似。

所以，由第一集中紧引理，存在序列$\{y_n\}\subset R^N$，使得对所有n，成立$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{R^N|B_R(y_n)}\rho_n(x)dx=0$.

下面证明$\{y_n\}$是R^N中有界序列。

反证：如果$\{y_n\}$无界，不妨设$|y_n|\to+\infty$，对任给$\varepsilon>0$，由已证结果，存在$R>0$，使得$|\int_{|x-y_n|\geqslant R}|Du_n|^P+k(x)|u_n|^P|<\varepsilon$，从而利用嵌入定理得$\int_{|x-y_n|\geqslant R}K(x)(u_n^+)^{\bar{P}}dx\leqslant\mu(\varepsilon)\to 0$, $\int_{|x-y_n|\geqslant R}G(x,u_n^+)dx\leqslant\mu(\varepsilon)$, $\int_{|x-y_n|\geqslant R}g(x,u_n^+)u_n^+\leqslant\mu(\varepsilon)$.

又因$|y_n|\to+\infty$，当$|x-y_n|\leqslant R$时，x随着y_n的增大而增大，从而，$\int_{|x-y_n|\leqslant R}g(x,u_n^+)u_n^+\leqslant\varepsilon(R+|y_n|)\int_{R^N}(|u_n|^P+|u_n|^S)\xrightarrow[n]{}0$, $\int_{|x-y_n|\leqslant R}G(x,u_n^+)\xrightarrow[n]{}0$.

(类似于[1]的讨论得$C_0\geqslant A$，不可，从而$\{y_n\}$有界，所以$\{u_n\}$是紧序列。

完全类似于文[1]引理3的讨论得$Du_n\to Du$ a.e. R^N，在$(L^P(R^N))^*$中，有$|Du_n|^{P-2}Du_n\xrightarrow{弱}|Du|^{P-2}Du$. 从而在(3)式两端取极限，并作用$u^-$得$u^-=0$，即$u\geqslant 0$，且$u$满足方程(1)。下面证明$u\not\equiv 0$.

如果$u\equiv 0$，因为$|\int_{R^N}g(x,u_n)u_ndx|\leqslant(\int_{|x|\leqslant R}+\int_{|x|\leqslant R})b(x)(|u_n|^P+|u_n|^S)\leqslant C\int_{|x|\leqslant R}(|u_n|^P+|u_n|^S)+\varepsilon(R)\int_{|x|\geqslant R}(|u_n|^P+|u_n|^S)$，且$u_n\xrightarrow{弱}u$，$\{u_n\}$在$E\cap L^{\bar{P}}(R^N)$中有界，得$\int_{R^N}g(x,u_n^+)u_n^+\xrightarrow[n]{}0$.

类似地得到$\int_{R^N}G(x,u_n^+)dx\xrightarrow[n]{}0$. 从而，利用第二集中紧引理，类似文[1]讨论得到$C_0\geqslant A$。这与C_0的假设矛盾，故$u\not\equiv 0$，定理得证。

定理 2 假设(F_1-F_4)成立，如果存在$v_0\in E, v_0\not\equiv 0, v_0\geqslant 0$，使得$\sup\limits_{t\geqslant 0}J(tv_0)<A$，则(1)存在正解。

证明 对泛函J，首先证明它满足没有(P·S)条件的山路引理的条件：

对任给$\varepsilon>0$，由$(F_1)(F_2)$，存在常数C使得$|g(x,u)u|\leqslant\varepsilon|u|^P+C|u|^{\bar{P}}$，从而$\int_{R^N}G(x,u^+)dx\leqslant\theta$.

$\int_{R^N}g(x,u^+)u^+\leqslant C\varepsilon\|u\|^P+C\|u\|^{\frac{P}{P}}$(用同一$C$表不同常数,以下同),$\int_{R^N}K(x)(u^+)^P\leqslant K(x_0)\int_{R^N}|u|^P\leqslant C\|u\|^{\frac{P}{P}}$,因此,$J(u)\geqslant\frac{1}{P}\min(1,k_0)\|u\|^P-C\varepsilon\|u\|^P-C\|u\|^{\frac{P}{P}}$. 取$\varepsilon$充分小,如使$C\varepsilon=\frac{1}{2P}\min(1,k_0)$,那么,$J(u)\geqslant C\|u\|^P(1-\|u\|^{\frac{P^2}{N-P}})$. 这样,当$\|u\|=\rho$充分小时,存在正常数$\alpha$使得对任何$u\in\partial B_\rho(0)$,有$J(u)\geqslant\alpha$. 又因对任意固定$u\in E,u\geqslant0$,有$\lim\limits_{t\to+\infty}J(tu)=-\infty$,所以存在$v\in E$. $v\overline{\in}B_\rho(0)$,使得$J(v)<0$。又$J(0)=0$,故山路引理成立。记Γ为所有连接0和v的道路的集合,$C_0=\inf\limits_{r\in\Gamma}\max\limits_{u\in r}J(u)$,则$C_0\geqslant\alpha>0,C_0\leqslant\sup\limits_{t\geqslant0}J(tv_0)<A$,由山路引理,存在$\{u_n\}\subset E$,使得$J(u_n)\to C_0,J'(u_n)\to0$,故由定理1证得定理2.

下面给出$g(x,u)$的一个具体估计,以保证存在$v_0\geqslant0$,使得$\sup\limits_{t\geqslant0}J(tv_0)<A$,从而方程有正解。

(F_5) 存在正常数R及非负连续函数$g(u)$,使得当$u>0$时$g(x,u)>g(u)$,在$B_R(x_0)$中几乎处处成立。x_0由(F_4)定义。记$G(u)=\int_0^u g(s)ds$, $G(u)$满足

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}|\log\varepsilon|^{-1}\varepsilon^{\frac{(N-P)(P-1)}{P}}\int_0^{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}G\left(\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}{1+S^{\frac{P}{P-1}}}\right]^{\frac{N-P}{P}}\right)S^{N-1}ds=+\infty$$

定理3 假设(F_1-F_5)成立,那么问题(1)有正解存在。

证明 根据定理2,只要证明存在$v_0\in E,v_0\geqslant0,v_0\not\equiv0$,使得$\sup\limits_{t\geqslant0}J(tv_0)<A$成立即可。

令$\varphi(x)\in C_0^\infty(R^N)$为截断函数,使得$0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$,在$B_{\frac{R}{2}}(x_0)$中$\varphi(x)\equiv1$,在$R^N\backslash B_R(x_0)$中$\varphi(x)\equiv0$,$x_0$由$(F_4)$给出,$R$由$(F_5)$给出。构造如下函数:

$$u_\varepsilon(x)=\frac{\varphi(x)}{(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}})^{\frac{N-P}{P}}},\ v_\varepsilon(x)=\frac{u_\varepsilon}{\|u_\varepsilon\|_P}\quad(\|v_\varepsilon\|_P=1)$$

则因$v_\varepsilon(x)\geqslant0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}J(tv_\varepsilon)=-\infty$,存在$t_\varepsilon>0$,使得$J(t_\varepsilon v_\varepsilon)=\sup\limits_{t\geqslant0}J(tv_\varepsilon)$,且$t_\varepsilon$满足

$$t_\varepsilon^{P-1}\int_{R^N}(|Dv_\varepsilon|^P+k(x)v_\varepsilon^P)+t_\varepsilon^{P-1}\int_{R^N}K(x)v_\varepsilon^P+\int_{R^N}g(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon=0$$

所以$t_\varepsilon\leqslant(X_\varepsilon/V_\varepsilon)^{\frac{N-P}{P^2}}$,$X_\varepsilon=\int_{R^N}|Dv_\varepsilon|^P-k(x)v_\varepsilon^P$,$V_\varepsilon=\int_{R^N}K(x)v_\varepsilon^P$.

从而

$$J(tv_\varepsilon)\leqslant J(t'_\varepsilon v_\varepsilon)=X_\varepsilon^{\frac{N}{P}}/NV_\varepsilon^{\frac{N-P}{P}}-\int_{R^N}G(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\tag{4}$$

当$t\in[0,t'_\varepsilon]$时恒成立。其中$t'_\varepsilon=(X_\varepsilon/V_\varepsilon)^{\frac{N-P}{P^2}}$. 由直接计算(或参考文[4])得到如下估计:

$$\|Du_\varepsilon\|_P^P=K\varepsilon^{\frac{P-N}{P}}+O(1),\ \|u_\varepsilon\|_{P^*}^P=\frac{K}{S}\varepsilon^{\frac{P-N}{P}}+O(1)\tag{5}$$

$$\|u_\varepsilon\|_P^P=\begin{cases}K_1\varepsilon^{\frac{P^2-N}{P}}+O(1) & 4\leqslant P^2<N\\ K_1|\log\varepsilon|+O(1) & P^2=N\end{cases}\tag{6}$$

其中K、K_1是只依赖于N, P的常数。

因此

$$\|Dv_\varepsilon\|_P^P=S+O(\varepsilon^{\frac{N-P}{P}})\tag{7}$$

$$\int_{R^N}k(x)v_\varepsilon^P\leqslant\begin{cases}\dfrac{CK_1\varepsilon^{\frac{P^2-N}{P}}+O(1)}{\frac{K}{S}\varepsilon^{\frac{P-N}{P}}+O(1)}=O(\varepsilon^{P-1}) & 4\leqslant P^2<N\\[2ex] \dfrac{CK_1|\log\varepsilon|+O(1)}{\frac{K}{S}\varepsilon^{\frac{P-N}{P}}+O(1)}=O(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|) & P^2=N\end{cases}\tag{8}$$

所以

$$X_\varepsilon\leqslant S+O(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|)\qquad 4\leqslant P^2\leqslant N\tag{9}$$

由 t_ε 定义得

$$\frac{X_\varepsilon}{V_\varepsilon} - \int_{R^N} \frac{g(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon}{t_\varepsilon^{P-1}V_\varepsilon} = t_\varepsilon^{\overline{P}-P} \tag{10}$$

由(F_1-F_2)，对任给 $\delta>0$，存在 $C_\delta>0$，使得对任意 $x\in R^N$ 有 $g(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)\leqslant\delta(t_\varepsilon^{P-1}v_\varepsilon^{P-1}+t_\varepsilon^{\overline{P}-1}v_\varepsilon^{\overline{P}-1})+C_\varepsilon t_\varepsilon^S+v_\varepsilon^S$，所以 $\int_{R^N}g(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon/t_\varepsilon^{P-1}\leqslant\delta\int_{R^N}v_\varepsilon^P+\delta t_\varepsilon^{\overline{P}-P}+C_\varepsilon\int_{R^N}t_\varepsilon^{S+1-P}v_\varepsilon^{S+1}$，

而

$$\int_{R^N}v_\varepsilon^P dx = \|u_\varepsilon\|_P^P/\|u\|_{\overline{P}}^P = O(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\int_{R^N}u_\varepsilon^{S+1}dx &= \int_{|x-x_0|\leqslant R}\left(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^{-\frac{(N-P)(S+1)}{P}} \\ &\quad + \int_{(x-x_0|\leqslant R}|\varphi^{S+1}(x)-1)\left(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^{\frac{(P-N)(S+1)}{P}} \\ &\leqslant \varepsilon^{\frac{-(N-P)(S+1)}{P}}\int_{R^N}\frac{\varepsilon^{\frac{(P-1)N}{P}}}{\left(1+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^{\frac{(N-P)(S+1)}{P}}}dx+O(1) \\ &= O\left(\varepsilon^{\frac{(P-N)(S+1)+(P-1)N}{P}}\right)+O(1)\end{aligned}$$

$$\|u_\varepsilon\|_{\overline{P}}^{S+1} = O(\varepsilon^{\frac{(P-N)(S+1)}{P^2}})+O(1)$$

所以

$$\int_{R^N}v_\varepsilon^{S+1}dx\leqslant\frac{O\left(\varepsilon^{\frac{(P-N)(S+1)+(P-1)N}{P}+\frac{(N-P)(S+1)}{P^2}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{(N-P)(S+1)}{P^2}}\right)}{O\left(\varepsilon^{\frac{(N-P)(S+1)}{P^2}}\right)+O(1)}$$

因为 $S+1<\overline{P}$，故

$$\begin{aligned}&\frac{(P-1)N+(P-N)(S+1)}{P}+\frac{(N-P)(S+1)}{P^2} \\ &= \frac{(P-1)(N-P)}{P^2}-\frac{(P-1)(N-P)(S+1)}{P^2}>0\end{aligned}$$

所以

$$\int_{R^N}v_\varepsilon^{S+1}dx\xrightarrow[\varepsilon]{}0 \tag{12}$$

由 δ 的任意性及(11)(12)，得到

$$\int_{R^N}g(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)v_\varepsilon t_\varepsilon^{1-P}dx\xrightarrow[\varepsilon]{}0 \tag{13}$$

又因为

$$V_\varepsilon\leqslant K(x_0)\int_{R^N}v_\varepsilon^{\overline{P}}dx=K(x_0) \tag{14}$$

另一方面

$$\begin{aligned}V_\varepsilon &= K(x_0)+\int_{R^N}(K(x)-K(x_0)v_\varepsilon^{\overline{P}}dx \\ &\geqslant K(x_0)-\max_{\xi\in B_R(x_0)}K'(\xi)\frac{1}{\|u_\varepsilon\|_{\overline{P}}^{\overline{P}}}\int_{|x-x_0|\leqslant R}\frac{|x-x_0|\varphi^{\overline{P}}(x)dx}{\left(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^N} \\ &\geqslant K(x_0)-O\left(\varepsilon^{1-\frac{1}{P}}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

由(14)、(15)得 $$\lim_{\varepsilon\to0^+}V_\varepsilon=K(x_0) \tag{16}$$

又由(7)、(8)得 $$\lim_{\varepsilon\to0^+}X_\varepsilon=S \tag{17}$$

从而由(10)(13)(16)(17)得 $t_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon]{}\left(\frac{S}{K(x_0)}\right)^{\frac{N-P}{P^2}}$

从而由(4)、(9)、(15)得

$$J(tv_\varepsilon)\leqslant A-O(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|)-\int_{R^N}G(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx$$

因此只要证明 $(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|)^{-1}\int_{R^N}G(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx \xrightarrow[\varepsilon]{} +\infty$,则定理 3 得证,因为此时有 $\sup J(tv_0) < A$.

因为 $G(u)$ 关于 u 非降，对任给 $\varepsilon>0$，存在常数 $B>0$，使得

$$\int_{R^N}G(x,t_\varepsilon v_\varepsilon)dx = \int_{R^N}G\left(x,\frac{O\left(\varepsilon^{\frac{N-P}{P^2}}\right)\varphi(x)t_\varepsilon}{\left(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^{\frac{N-P}{P}}}\right)$$

$$\geqslant \int_{B_R(x_0)}G\left(\frac{B\varepsilon^{\frac{N-P}{P^2}}}{\left(\varepsilon+|x-x_0|^{\frac{P}{P-1}}\right)^{\frac{N-P}{P}}}\right) \triangleq I,$$

因此只要证明

$$(\varepsilon^{P-1}|\log\varepsilon|)^{-1}I \xrightarrow[\varepsilon]{} +\infty \tag{18}$$

记 ω_{n-1} 为 R^N 中单位球体的表面积，则有

$$\varepsilon^{1-P}|\log\varepsilon|^{-1}I = \varepsilon^{1-P}|\log\varepsilon|^{-1}\omega_{n-1}\int_0^R G\left(\frac{B\varepsilon^{\frac{N-P}{P^2}}}{\left(\varepsilon+r^{\frac{P}{P-1}}\right)^{\frac{N-P}{P}}}\right)r^{N-1}dr$$

$$= \varepsilon^{\frac{(N-P)(P-1)}{P}}|\log\varepsilon|^{-1}\omega_{n-1}\int_0^{R'\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}} G\left(\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}{1+S^{\frac{P}{P-1}}}\right]^{\frac{N-P}{P}}\right)S^{N-1}ds$$

其中 R' 为正常数。

如果 $R'\geqslant1$,由 (F_5) 直接得(18)，定理得证。

如果 $R'<1$，考虑下式：

$$Z_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{(N-P)(P-1)}{P}}|\log\varepsilon|^{-1}\omega_{n-1}\int_{R'\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}^{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}} G\left(\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}{1+S^{\frac{P}{P-1}}}\right]^{\frac{N-P}{P}}\right)S^{N-1}ds$$

由积分中值定理，存在常数 $\theta_0\in(R',1)$,使得

$$|Z_\varepsilon| = \varepsilon^{\frac{(N-P)(P-1)}{P}}|\log\varepsilon|^{-1}\omega_{n-1}G\left(\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}{1+\left(\theta_0\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}\right)^{\frac{P}{P-1}}}\right]^{\frac{N-P}{P}}\right)\left(\theta_0\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}\right)^{N-1}$$

$$(1-R')\varepsilon^{\frac{1-P}{P}} \leqslant C\varepsilon^{1-P}|\log\varepsilon|^{-1}G\left(C'\varepsilon^{\frac{N-P}{P^2}}\right) \tag{19}$$

由 (F_1)、(F_5),对任给 $\delta>0$,存在 $\rho>0$,当 $|u|<\rho$ 时,$G(u)\leqslant\int_0^u g(x,s)ds<\delta|u|^P$,从而由(19)可知当 ε 充分小时,$|Z_\varepsilon|\leqslant C\varepsilon^{1-P}|\log\varepsilon|^{-1}\varepsilon^{\frac{N-P}{P}} \xrightarrow[\varepsilon]{} 0$. 由 (F_5),当 $R'<1$ 时亦得(18),从而定理 3 得证。

几点说明:(Ⅰ)当有正的 $u^{\bar{P}-1}$ 的低阶扰动以后,在比零扰动更弱的条件下仍有得到问题的正解。这表现在:只要假设 $k(x)\in C_0(R^N)\cap L^{\frac{N}{P}}(R^N)$,存在常数 $\beta>0$,使得 $\int_{R^N}(|Du|^P+k(x)|u|^P)dx\geqslant\beta\int_{R^N}|Du|^Pdx$,那么在假设 (F_1-F_5) 下问题(1)有正解。这只要将本文的证明过程作少许的修改即可。

(Ⅱ):条件 (F_5) 是一般性的。下面通过两个例子和推论加以说明。

例 1 考虑如下方程：

$$-\operatorname{div}(|Du|^{P-2}Du)+k(x)u^{P-1} = K(x)u^{\bar{P}-1}+\sum_{i=1}^m\theta_i(x)u^{q_i} \tag{20}$$

其中 $4\leqslant P^2\leqslant N$, $P-1<q_i<\bar{P}-1$, $k(x)\in C_0(R^N)$, $k(x)\geqslant k_0>0$, $K(x)\in C_0'(R^N)$，且满足

(F_5') $\theta_i(x)$ 连续非负, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\theta_i(x)=0, i=1,2,\cdots,m$,存在 $i_0:1\leqslant i_0\leqslant m$, 及 $K(x)$ 的最大值点 x_0 的某非空邻域 ω,正常数 θ_0 使得对任意 $x\in\omega,\theta_{i_0}(x)\geqslant\theta_0$.

推论 1 假设 $K(x)$ 满足 F_4),在 (F_5') 的假设下问题(20)有正解存在。

证明 令 $g(u)=\theta_0u^{q_{i_0}}$,那么当 $u\geqslant0,x\in\omega$ 时,$g(x,u)\geqslant g(u)$. 容易验证 $g(x,u)$ 满足 (F_1-F_3),且经直接计算有如下极限成立：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{\frac{(N-P)(P-1)}{P}} |\log\varepsilon|^{-1} \int_0^{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}} G\left\{\left[\frac{\varepsilon^{\frac{1-P}{P}}}{1+S^{\frac{P}{P-1}}}\right]^{\frac{N-P}{P}}\right\} S^{N-1} ds = +\infty$$

其中 $G(u)=\int_0^u g(s)ds$. 从而推论1得证。

如果用 $\theta_i(x)\in L^{\sigma_i}(\mathrm{R}^N)$ $\lim_{|x|\to+\infty}\theta_i(x)=0$,其中 $\sigma_i=\dfrac{NP}{NP-q_i(N-P)}$,那么(20)仍有正解。

例 2 考虑如下问题:

$$-\operatorname{div}(|Du|^{P-2}Du)+k(x)u^{P-1}=K(x)u^{P-1}+\mu g(x,u) \tag{21}$$

那么有

推论 2 假设(F_1-F_4)成立,ω 是 x_0 的某非空邻域。当 $u>0$,$x\in\omega$ 时 $g(x,u)>0$,那么存在正常数 μ_0,使得当 $\mu>\mu_0$ 时(21)存在正解。

证明 给定 $v_0\in E$, $v_0\geqslant 0$, $v_0\not\equiv 0$, 令

$$X=\int_{\mathrm{R}^N}|Dv_0|^P+k(x)v_0^P,\quad V=\int_{\mathrm{R}^N}K(x)v_0^P dx$$

$$J_\mu(tv_0)=\frac{1}{P}t^P X-\frac{1}{P}t^P V-\mu\int_{\mathrm{R}^N}G(x,tv_0)dx$$

如果能证明:

$$\lim_{\mu\to+\infty}\sup_{t\geqslant 0}J_\mu(tv_0)=0 \tag{22}$$

那么当 μ 充分大时($\mu>\mu_0$),有 $\sup\limits_{t\geqslant 0}J_\mu(tv_0)<A$. 由定理2,推论2即得证。下面证明(22).

给定 μ,因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}J_\mu(tv_0)=-\infty$,所以,$\sup\limits_{t\geqslant 0}J_\mu(tv_0)$在某点 t_μ 达到,且 t_μ 满足:

$$Xt_\mu^{P-1}-Vt_\mu^{P-1}-\mu\int_{\mathrm{R}^N}g(x,t_\mu v_0)v_0=0 \tag{23}$$

且 $t_\mu\leqslant X/V)^{\frac{N-P}{P^2}}$.

下面证明:

$$\lim_{\mu\to+\infty}t_\mu=0 \tag{24}$$

如果(24)不成立,则因 t_μ 关于 μ 有界,那么存在序列$\{\mu_j\}$,$\mu_j\xrightarrow[j]{}+\infty$,使得 $\lim\limits_{j\to+\infty}t_{\mu_j}=l>0$. 选取 v_0,使得 $x\in\omega$ 时 $v_0(x)>0$,则由假设有:

$$\int_{\mathrm{R}^N}g(x,t_{\mu_j}v_0)v_0\to\int_{\mathrm{R}^N}g(x,lv_0)v_0dx>0 \tag{25}$$

另一方面,由(23)得到

$\int_{\mathrm{R}^N}g(x,lv_0)v_0dx=\lim\limits_{j\to+\infty}\dfrac{1}{\mu_j}(Xt_{\mu_j}^{P-1}-Vt_{\mu_j}^{P-1})=0$. 这与(25)矛盾,从而(24)得证。

因为 $\mu\int_{\mathrm{R}^N}G(x,t_\mu v_0)dx=\mu\int_{\mathrm{R}^N}g(x,\theta t_\mu v_0)t_\mu v_0dx(0<\theta<1)$,由(23),$\mu\int_{\mathrm{R}^N}g(x,\theta t_\mu v_0)t_\mu v_0dx\xrightarrow[\mu]{}0$,从而 $\mu\int_{\mathrm{R}^N}G(x,t_\mu,v_0)dx\xrightarrow[\mu]{}0$. 结合(24),证明了(22)式,从而推论2得证。

致谢 本文及文[1]得到了方爱农教授的指导,王可成研究员,黄允忠副教授审阅了全稿,在此表示感谢。

参 考 文 献

1 周海银. 零扰动下一类 R^N 上临界增长的椭圆型方程正解的存在性. 国防科技大学学报,1992,14(3)

2 Lions P L. Rev. Math. Iber. 1985,(1):145-201

3 Lions P L., Ann I H Anal Nonli., 1984, (1):109—145, 223—283
4 Guedda M, VeronL. Nonli Anal TMA, 1989, 13(8):897—902
5 Cao D M. Act Math Sci, 1990,10(2): 201—216

The Existence of Positive Solutions of a Quasilinear Elliptic Equation on R^N of Critical Increasing with Positive—perturbation

Zhou Haiyin
(Department of Systems Engineering and Applied Mathcmatics)

Abstract

This paper is concerned with the existence of positive solutions for the following problem: $-\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)+k(x)u^{p-1}=K(x)u^{\bar{p}-1}+g(x,u)$, $u\in W^{1,p}(R^N)$ 4, $\leqslant P^2\leqslant N$, $\bar{P}=NP/N-p$, where $g(x,u)$ is a lower-order perturbation of $u^{\bar{p}-1}$. It is the continuation of the zero—perturbation case

Key words elliptic differential equations, positive solution, critical increasing. positive—perturbation, embedding, weak—convergent

(上接第 104 页)

thors try to use the dynamical mechanics of nonholonomic systems as the analytical instruments. The data of the model are obtained by experiment and checked by real vehicle driving, and several parameters are inspected by simulation testing. It is revealed that the satisfactory result of simulation with dynamic model consists with that of driving experiments of vehicle inside the room. The paper has presented a useful way for other vehicle carrying mobile robot to build up he mathematical model.

Key words dynamics, mathematical model, mobile vehicle simulation testing, incomplete system