

## 非牛顿流体不定常环管流研究\*

朱文辉 刘慈群

(国防科技大学应用物理系, 长沙)

(中科院渗流流体力学所, 河北省廊坊市)

**摘要** 本文采用积分变换的方法, 找到了一类非牛顿流体在环形管道中不定常流动的解析解, 并进行了数值计算, 分析了非牛顿性系数和其他各参数对二阶流体不定常流动的影响, 指出当二阶流体非牛顿系数相同时, 环管流与一般管流比达到稳定的特征时间较短, 并且相应的速度分布、平均速度分布数值均较小。在外半径相同时, 环管流内壁的剪应力较之一般管流, 其大小随内径而改变。环管流外壁剪应力总相应地小于内壁剪应力。

**关键词** 环管, 不定常, 非牛顿流体, 积分变换

**分类号** O357

流体流动的非牛顿性, 已在许多工程问题, 如管道设计、石油运输、高分子化学和聚合物加工等, 受到人们的重视。由于实际过程中影响流动因素很多, 如果不加以适当的简化, 即便是数值计算也遇到很大的困难。韩式方<sup>[1][2]</sup>等曾对二阶非牛顿流体的一般管流和环管流的非定常流动。用变分近似方法进行了探讨; 刘慈群、黄军旗<sup>[3]</sup>曾对二阶非牛顿流体的一般非定常管流进行分析并得到了解析解。本文则对二阶非定常流体在环管中的非定常流动作了分析, 得到了简洁的解析结果。这些结果在特殊情况下包括了上述有关结果, 可为有关的工程问题提供简便可行的分析、比较依据。

## 1 数学模型及其解析结果

## 1.1 基本方程

根据非牛顿流体力学的基本理论, 二阶流体的本构方程为<sup>[4]</sup>:

$$\tau = \eta_0 A_1 + \beta_1 A_1^2 + \beta_2 A_2 \quad (1)$$

这里  $\eta_0$  是特征粘度,  $\tau$  是应力张量,  $A_1$  和  $A_2$  分别是一阶和二阶 Rivlin-Ericksen 张量,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  是二阶非牛顿流体的物质常数。

对于环管非定常流, 在粘性层流流动的情况下, 可以假定只有沿轴向  $z$  的速度分量  $w$  不为零, 且该速度分量只与半径  $r$  有关, 即

$$w = w(r, t) \quad (2)$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

\* 1991年12月12日收稿

从(2)和(3)容易导出运动方程为:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \quad (4)$$

(2)和(3)代入(1)式可以得到如下动量方程组:

$$\tau_{rr} = \beta_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\beta_2 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (5)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (6)$$

$$\tau_{zz} = \beta_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$\tau_{rz} = \eta_0 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (8)$$

将(8)代入运动方程(4)便得到此问题的基本控制方程为:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (9)$$

定解条件为初始时刻速度为零, 内外两壁遵循无滑移条件, 即:

$$w(r_1, t) = 0; w(r_2, t) = 0; w(r, 0) = 0 \quad (10)$$

这里  $r_1$  和  $r_2$  分别是环管的内半径与外半径。

引进下列无量纲参数:

$$x = r/r_1, T = \eta_0 t / \rho r_2^2, \eta = r_1/r_2, H_c = \beta_2 / \rho r_2^2,$$

$$u = \eta_0 w / \left[ r_2^2 \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right], F = \tau_{rz} / \left[ r_2 \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]$$

该问题的数学模型简化为如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + H_c \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} u(1, T) = u(\eta, T) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

## 1.2 问题的求解:

对于上面的定解问题可以找到其核函数为:

$$R_0(\rho_n x) = J_0(\rho_n x) Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n) Y_0(\rho_n x) \quad (14)$$

这里  $J_n(x)$  和  $Y_n(x)$  分别为第一和第二类 Bessel 函数,  $\rho_n$  为下列特征方程的根:

$$J_0(\rho_n \eta) Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n) Y_0(\rho_n \eta) = 0, n = 1, 2, \dots, \infty \quad (15)$$

特征函数  $R_0(\rho_n x)$  在对应边界条件下的范数为:

$$\frac{1}{N(\rho_n)} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{\rho_n^2 J_0^2(\rho_n \eta)}{J_0^2(\rho_n) - J_0^2(\rho_n \eta)} \quad (16)$$

利用核函数  $R_0(\rho_n x)$  对定解问题在区间  $[\eta, 1]$  上施行 Hankel 变换, 并利用关系式(17)及 Bessel 函数的性质:

$$J_n(x) = -J_1(x), Y_n(x) = -Y_1(x) \quad (17)$$

朗斯基关系<sup>[5]</sup>:

$$J_n(\rho_n) Y_1(\rho_n) - Y_n(\rho_n) J_1(\rho_n) = 2/\pi \rho_n \quad (18)$$

可以得到如下简洁的结果:

$$u(x, T) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \right] \cdot R_0(\rho_n x) \quad (19)$$

另外, 若把原问题的解分解成两部分:

$$u(x, T) = u_1(x, T) + u_2(x, T)$$

其中,  $u_1(x, T) = \frac{1}{4}[(1-x^2) - (1-\eta^2) \cdot \ln x / \ln \eta]$  代表非齐次方程的特解,  $u_2(x, T)$  代表齐次初始问题的解, 原问题的解还可以表成:

$$u(x, T) = -\frac{1}{4}[2x + (1 - \eta^2)/(x \ln \eta)] - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^2} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \cdot R_0(\rho_n x) \quad (20)$$

这实际上证明了如下的恒等式:

$$\frac{1}{4}[(1-x^2) - (1-\eta^2) \frac{\ln x}{\ln \eta}] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_0(\rho_n)}{\rho_n^2} \quad (21)$$

依(2)式和(20)式可以导出剪切应力和平均流速分布:

剪切应力分布为:

$$F = \frac{\partial u}{\partial x} + H_c \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n} \left[ 1 - \frac{1}{1 + H_c \rho_n^2} \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \right] \cdot R_1(\rho_n x) \quad (22)$$

这里  $R_1(\rho_n x)$  是下列函数:

$$R_1(\rho_n x) = J_1(\rho_n x) Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n) Y_1(\rho_n x) \quad (23)$$

或者:

$$F = \frac{1}{4} \left[ -2x - (1 - \eta^2) \frac{1}{x \ln \eta} \right] + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_1(\rho_n x)}{\rho_n (1 + H_c \rho_n^2)} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \quad (24)$$

平均流速随时间的变化公式为:

$$u_a = \frac{1}{\pi(1-\eta^2)} \int_h^1 u x dx = \frac{1}{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta) - J_0(\rho_n)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^4} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \right]$$

或者:

$$u_a = \frac{1}{8} [1 + \eta^2 + (1 - \eta^2) / \ln \eta] - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta) - J_0(\rho_n)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^4 (1 - \eta^2)} \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \quad (25)$$

### 1.3 对几种特殊情形的讨论:

(1)  $H_c=0$  的情况

$H_c=0$  表明流体的非牛顿性消失。这时的解可以表达成如下形式:

$$(u, T) = \frac{1}{4}[(1-x^2) - (1-\eta^2)\ln x/\ln \eta] - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_0(\rho_n x)}{\rho_n^2} \cdot \exp(-\rho_n^2 T) \quad (26)$$

可以看出这正是牛顿流体的环管流动解。

(2)  $T \rightarrow \infty$  的情况

由于  $T \rightarrow \infty$  时,  $\exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \rightarrow 0$ , 速度、剪切应力及平均速度分布均趋于定常值, 并且这个定常值不依赖于非牛顿流体的特性而与牛顿流体的结果相一致。

(3)  $\eta \rightarrow 0$  的情形

当  $\eta \rightarrow 0$  时, 由第二类 Bessel 函数的在零点附近的性质可知:

$$J_0(\rho_n \eta) \rightarrow 1, |Y_0(\rho_n \eta)| \gg |Y_0(\rho_n)| \quad (27)$$

于是原特征方程(15)便退化为:

$$Y_0(\rho_n \eta) J_0(\rho_n) = 0 \text{ 或者 } J_0(\rho_n) = 0 \quad (28)$$

特征函数(14)式便退化成为:

$$R_0(\rho_n x) = J_0(\rho_n x) Y_0(\rho_n) \quad (29)$$

另外, 由朗斯基(Rosky)关系(16)及(17)可得:

$$Y_0(\rho_n) = 2/\pi \rho_n J_1(\rho_n) \quad (30)$$

在推导(29)和(30)的过程中均用到了(28)。

于是, (30)代入(29)可将  $R_0(\rho_n x)$  表成:

$$R_0(\rho_n x) = 2J_0(\rho_n x)/\pi \rho_n J_1(\rho_n) \quad (31)$$

$$\eta \rightarrow 0 \text{ 时有 } (1-\eta^2)/\ln \eta \rightarrow 0 \quad (32)$$

$$\text{利用(28)式: } \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \rightarrow 1 \quad (33)$$

(31)、(32)、(33)代入原问题的解便有

$$u(x, T) = \frac{1}{4}(1-x^2) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n^3} \cdot \frac{J_0(\rho_n x)}{J_1(\rho_n)} \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \quad (34)$$

可以看到(30)和(34)正是文献<sup>[3]</sup>中的结果。但同时应当注意, 由于  $\eta \rightarrow 0$  时环管流必须满足内边界, 上述的讨论应排除  $x=0$  这一点。

## 2 数值结果及分析

作者对二阶非牛顿流体环管不定常流动的速度、剪切应力(轴向分量)及平均速度的分布作了数值计算, 并考虑了不同的非牛顿系数  $H_c$  和内外半径之比  $\eta$  的变化对流动的影响。从结果可以看到, 二阶非牛顿流体各物理量的特征与牛顿流体有明显差别。表 1 列出了不同的  $\eta$  值下特征函数  $R_0(\rho_n x)$  的前 10 个特征根。可以看出,  $\eta$  增大时对应的特征根亦随之增大。

表 1 不同  $\eta$  值下特征函数  $R_0(\rho_n\eta)$  的前 10 个根

	$\rho_n$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	$\rho_{10}$
$\eta$	0.1	3.31397	6.85749	10.3774	13.8865	17.3894	20.8894	24.3868	27.8829	31.3779	34.8721
	0.2	3.81588	7.78558	11.7321	15.6702	19.6041	23.5300	27.4667	31.3964	35.3255	39.2542
	0.3	4.41242	8.93270	13.4342	17.9292	22.4217	26.9126	31.4027	35.8924	40.3817	44.8707
	0.8	15.6981	31.4109	47.1206	62.8294	78.5378	94.2461	109.954	125.662	141.370	157.079
	0.9	31.4116	62.8297	94.2463	125.663	157.079	188.495	219.911	251.327	282.743	314.159

表 2  $\eta=1 \times 10^{-3}$  时  $R_0(\rho_n\eta)$  和  $J_0(\rho_n)$  的前 10 个根

$\rho_n$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	$\rho_{10}$
$R_0(\rho_n\eta)$	2.52293	5.64755	8.78635	11.9277	15.0700	18.2125	21.3550	24.4977	27.6404	30.7830
$J_0(\rho_n)$	2.40475	5.52012	8.65377	11.7915	14.9308	18.0710	21.2117	24.3524	27.4934	30.6345

表 2 表明,  $\eta$  很小时  $R_0(\rho_n\eta) = 0$  和  $J_0(\rho_n)$  的根十分接近。

将计算结果绘成图 1~5, 分析有如下结论:

(1) 在相同的环管形状下 ( $\eta$  相同), 随着流体非牛顿系数  $H_c$  的增大, 在起动后同一时刻速度分布趋于平缓, 但最大速度的位置  $x_m$  只与环管形状有关。一般说来, 最大速度的位置  $x_m$  总是较靠近内壁。见图 1。

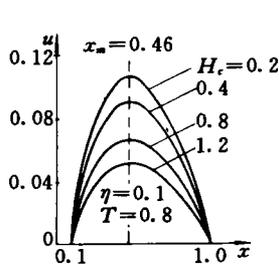


图 1 二阶非牛顿流体环管内速度剖面

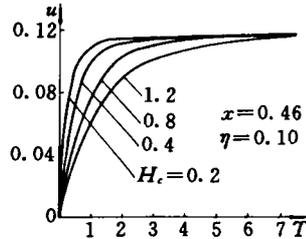


图 2 不同非牛顿系数对流动的影响

(2) 因为所给出的级数解收敛较快, 因此可以认为流动达到稳定的时间只取决于前面一两项。若以特征时间来描述,  $T_{ch} = H_c + 1/\rho_n$ , 由特征值  $\rho_n$  的性质知, 环管流的特征时间小于一般管流的对应值。

(3) 几何形状相同 ( $\eta$  相同) 的环管非定常流动, 任一确定位置的速度趋于定常的时间受到非牛顿系数  $H_c$  的强烈影响,  $H_c$  越大趋于定常的时间越长, 见图 2。

(4) 流体在一定形状的环管内流动时, 对某一确定的无量纲时间  $T$ , 剪应力的空间分布只对  $H_c$  的非常弱的依赖性, 见图 3。而同种非牛顿流体在不同形状环管中流动, 在起动后同一时刻中进行比较, 轴向剪切应力沿着径向的分布极为相似, 几乎可以在对应段通过平移得到 (图 3)。从剪应力为零处到外壁之间的剪应力分布近似为一段直线。

(5) 随着  $\eta$  的增大, 内外两壁轴向剪应力的差别迅速减小, 流动壁面关于内外两壁的对称性增强, 并且内壁剪应力总是相应地比外壁剪应力大。见图 4。

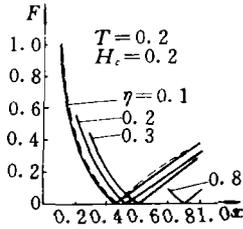


图3 不同形状环管中剪切应力的分布  
虚线对应  $H_c=0.8$  的分布

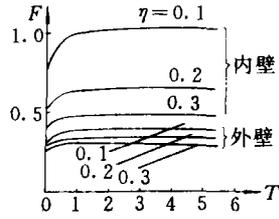


图4 不同环管形状对剪应力变化的影响

(6) 随着  $\eta$  的增加, 平均速度的定常值迅速减小, 见图 5。但当  $\eta$  趋于零时, 环管流速度剖面与一般管流的速度剖面趋于一致, 但零点除外。这也可从(34)式直接得到。

本文得到了一个复杂物理问题的解析解, 既简洁又便于计算, 同时得到用其他复杂方法才能得到的解, 并在几种特殊情况下覆盖了这些结果, 可供工程设计参考。

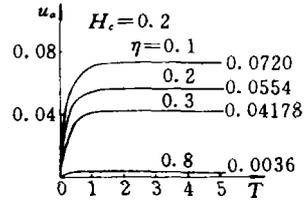


图5 不同环管形状对平均流速变化的影响

### 参 考 文 献

- 1 伍岳庆. 中科院成都分院硕士论文, 1988
- 2 韩飞宇. 中科院成都分院硕士论文, 1989
- 3 刘慈群等. 应用数学和力学学报, 1989, 10 (11): 989~996
- 4 陈文芳. 非牛顿流体力学. 北京: 科学出版社, 1984
- 5 M.N. 奥齐克西. 热传导. 北京: 高等教育出版社, 1984

## Study of Unsteady Flow of Non-Newtonian Fluids in Annular Pipes

Zhu Wenhui

(National University of Defense Technology)

Liu Ciqun

(Institute of Porous flow and fluid Mechanics)

### Abstract

In this paper an analytical solution of the unsteady flow of non-Newtonian fluids in annular pipes was found by using the integral transform method. Numerical simulation was carried out. On the basis of these, a detailed analysis was made to the effects of non-Newtonian coefficient  $H_c$  and the shape factor  $\eta$  on the flow. The obtained conclusions may provide the engineering projection with higher reliability.

**Key words** unsteady flow, annular pipes, Non-Newtonian fluids, integral transform method