

再入机动弹头的速度控制

赵汉元 陈克俊

(自动控制系)

摘要 本文详细地讨论了再入机动弹头的速度控制问题。根据优化原理找到了对固定目标进行攻击的最优制导规律,讨论了理想速度曲线的设计方法,以及具体实施减速控制的方法。仿真计算表明,对落速控制的精度是较高的。

关键词 再入机动, 最优制导规律, 速度控制

分类号 V448.15

再入机动弹头从要求上看可以分成两类,一类是以突防为主,要求设计的弹道避开对方防御系统,落速最大,对落角不作要求^{[1]~[3]}。另一类以提高命中精度为主。而为了提高精度必须采用末制导系统,例如潘兴-Ⅱ导弹采用了雷达区域相关末制导系统。而为了使末制导系统的雷达正常工作,必须减小弹的速度,否则弹头将被严重的气动加热所产生的等离子体所包围,信号无法传输,所以说再入减速是实施再入机动弹头末制导的前提之一。而为了更好的发挥不同类型弹头的威力,不仅要求减速,而且对落速的大小有具体要求。同时为了使末制导系统更好的工作,对弹头落速的方向也有要求,例如潘兴-Ⅱ导弹要求落速方向垂直于地面。以便雷达正常工作。因此,以提高精度为主有末制导系统的再入机动弹头必须解决好速度方向和大小的控制问题。

由于再入机动弹头不能用推力来减速,只能用增加空气阻力的方法进行。用空气阻力来减速的方法有许多种,文献[4]介绍了很多方案,本文只讨论用攻角来控制减速方案。

1 再入机动弹头落速方向的控制

再入机动弹头的弹道设计须同时完成两个任务,一个是机动后仍要命中目标,另一个是要使落速方向满足要求。如果单纯是前者,可采用一般的比例导引方法进行导引,但目标是固定的。如果同时对落速方向有要求,则采用一般的比例导引方法是不行的。

1.1 运动学方程

为了简化,以目标和再入机动弹头质心为基准,将运动分解为俯冲平面和转弯平面内的运动,如图1所示。其中俯冲平面定义为弹头质心 M 和目标 O 及地心 O_E 所确定的平面,其转弯平面定义为过目标和弹头质心而垂直于俯冲平面的平面。基于再入机动弹

头运动和控制的特点, 转弯平面内的运动可视为小量, 所以在确定再入机动弹头再入机动导引规律时, 可将俯冲平面与转弯平面分开研究。文献[5]已推导出俯冲平面和转弯平面内的运动学方程

$$\dot{\lambda}_D = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho} \right) \lambda_D - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \gamma_D \quad (1)$$

$$\dot{\lambda}_T = \left(\frac{\dot{v}}{v} - \frac{2\dot{\rho}}{\rho} \right) \lambda_T + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \gamma_T \quad (2)$$

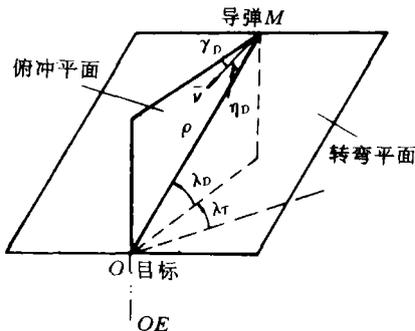


图1 导弹再入飞行俯冲平面和转弯平面示意图

如图1所示, \vec{v} 为速度向量, γ_D 为速度在俯冲平面内的方向角, λ_D 为视线角, ρ 为视线距离, γ_T 为速度在转弯平面内的方位角, λ_T 为视线的方位角。

1.2 最优导引律

因为运动可分成俯冲平面和转弯平面, 先研究俯冲平面内的导引律。

1.2.1 俯冲平面内的最优导引律

所谓最优导引律就是不仅要求弹头落角满足给定的要求, 而且有某种性能指标最佳。为讨论方便, 下面以要求落角等于 90° 为例进行讨论。所谓落角为 90° , 即要求 $\gamma_{DF} = -90^\circ$ 从图1看出当

$$\begin{cases} \lambda_{DF} = -\gamma_{DF} \\ \dot{\lambda}_{DF} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

的条件满足时, 落角将等于 90° , 因为 $\dot{\lambda}_{DF} = 0$, 且 $\lambda_{DF} = -\gamma_{DF} = 90^\circ$, 则表示当命中目标时 $\gamma_{DF} = -90^\circ$ 。因此只要求解运动学方程(1), 且以式(3)为终端条件, 便可以既保证命中, 又保证落角等于 90° 。

为满足末制导系统的要求, 再入机动弹头需要减速, 但要满足不同类型弹头的要求, 所以在研究最佳导引律时, 应该使诱导阻力产生的损失愈小愈好, 即弹道摆动要小一些, γ_D 不要过大, 这样才有富余的速度以适应不同弹头的要求。为此性能指标可以定义

$$J = \mathbf{X}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \dot{\gamma}_D^2 dt \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2)^T, \quad x_1 = \lambda_D + \gamma_{DF}, \quad x_2 = \dot{\lambda}_D$$

故

$$x_1(t_f) = \lambda_{DF} + \gamma_{DF} = 0, \quad x_2(t_f) = 0$$

\mathbf{F} 为非负定阵, 由式(3)知 $\mathbf{F} \rightarrow \infty, \mathbf{F}^{-1} = 0$ 。

如果取式(4)定义的 J 为性能指标, 式(3)所要求的为终端约束, 通过解逆 Riccati 微分方程, 可以得最优导引律^[5]。

$$\dot{\gamma}_D = -4\dot{\lambda}_D - 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}(\lambda_D + \gamma_{DF}) \quad (5)$$

即按式(5)进行控制时, 弹道既可以保证 $\gamma_{DF} = -90^\circ$, 又能使诱导阻力损失最小。

1.2.2 转弯平面内的最优导引律

转弯平面内的最优导引律可以类似于俯冲平面的方法求得, 所不同的是其终端约束条件不一样, 即 λ_{TF} 是自由的, 仅要求 $\dot{\lambda}_{TF} = 0$ 。这是因为仅要求再入机动弹头垂直落地,

但沿什么方向垂直落地并没有要求,所以 λ_{TF} 是任意的。当性能指标类似俯冲平面,则转弯平面最优导引律为

$$\dot{\gamma}_T = 3\dot{\lambda}_T \quad (6)$$

2 再入机动弹头落速大小的控制

按式(5)和式(6)进行导引,其落速大小不能满足不同任务的要求,所以减速是必须的。而根据什么来进行减速呢?为此需要设计一条理想速度曲线、如果按此曲线变化,或者接近此曲线变化,则可以保证落速大小满足要求。当理想速度曲线设计好,如何把实际速度减小到理想速度曲线上,就是速度控制问题。

2.1 理想速度曲线的设计

设计一条理想速度曲线,必须满足在落点的速度近似等于要求的速度。理想速度曲线在接近目标段应该与实际情况差别较小,而高空段允许有大一些的偏差。理想速度曲线要便于计算,最好用解析表达式。

根据弹道导弹弹道学的知识,对不机动弹头,除去弹道开始段及终了段,可以忽略重力且 γ_D 为常数,此时再入段速度与高度的关系应满足

$$v = v_0 \left[e^{\frac{K_0}{2}(e^{-\beta h_0} - e^{-\beta h})} \right]^{-\frac{1}{\sin^2 \gamma_D}} \quad (7)$$

式中, $K_0 = c_x \rho_0 S / \beta m$,而 c_x 为零攻角阻力系数, m 为弹头质量, β 为 $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$ 中的常数。对垂直降落 $\gamma_D = -90^\circ$,设 $h_0 = h_F = 0$, $v_0 = v_F$ 则

$$v = v_F \left[e^{\frac{K_0}{2}(1 - e^{-\beta h})} \right] \quad (8)$$

将式(8)按台劳级数展开,且只取第一项,则式(8)可近似成

$$v = v_F [1 + \alpha(1 - e^{-\beta h})] \quad (9)$$

若只取台劳级数展开第一项,则 $\alpha = K_0/2$,但实际式(9)中的 α 是可以调整的,以便更符合实际情况。

实际上再入机动弹道 γ_D 既不恒等于 -90° ,也不为常数,而是一个变数。它的变化规律由导引规律决定。目前可以有几种方法设计理想速度曲线。

(1) 将 γ_D 逐段取常数,用式(7)进行计算。这显然很繁,不满足理想速度曲线设计要简单的要求。

(2) 取 $\gamma_D = -90^\circ$ 即用垂直段的近似公式作为理想速度曲线。通过调整 α 及 β 来满足其它要求。

(3) 考虑 γ_D 的变化,且垂直段要准,但不是以 γ_D 为自变量而是以 λ_D 为计算量,国外文献有如下经验公式

$$v_c = v_F [1 + \alpha(1 - e^{-\beta h})]^K \quad (10)$$

式(10)中的 K 表示对 $\gamma_D \neq -90^\circ$ 时的修正。

$$\begin{cases} K = 1 / [\sin \lambda_D \cdot \cos^2(\lambda_D + \gamma_{DF})] & \text{当 } K < 2 \\ K = 2 & \text{当 } K \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

上述方案第三方案较接近实际情况,下面仿真取这一方案。

不管何方案, 由于图形匹配开始时要对位置误差进行修正, 为了保证有剩余的速度用于修正位置误差, 所以实际的理想速度曲线如下

$$v^*(h) = \begin{cases} v_c + \Delta v, & h \geq h_c \\ v_c, & h < h_c \end{cases} \quad (12)$$

其中 h_c 为匹配开始高度, Δv_c 根据实际情况事先选定, 仿真结果的 $h \sim v$ 曲线变化规律如图 2 所示。

2.2 速度控制问题

速度控制就是如何把实际速度控制到理想速度曲线上去。如果单纯从减速的角度出发, 可以有很多的方法, 因为只要增大攻角, 产生附加的诱导阻力, 使速度减下来, 从原则上讲都是可以的, 但如何增加攻角有不同的方法。本文介绍一种在垂直方向增加攻角的方法, 仿真结果较理想, 满足设计要求。

2.2.1 附加的诱导阻力加速度

设从某一时刻开始, 以后无减速运动, 而由导引规律确定该时刻总攻角为 $\eta = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}$, 则此时阻力加速度为

$$mA_{x_c} = -\frac{1}{2}\rho_c v_c^2 S(c_{x_0} + c_{x_c}) = -\frac{1}{2}\rho_c v_c^2 S(c_{x_0} + c_N^* \eta^2) \quad (13)$$

其中 c_{x_0} 为 $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\eta} = 0$ 时的阻力系数, c_{x_c} 为 $\bar{\eta}$ 引起的诱导阻力系数。

若从同一时刻开始有减速运动, 设其总攻角为 η , 且 $\eta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 但 α, β, η 均是未知的。则此时阻力加速度为

$$mA_x = -\frac{1}{2}\rho v^2 S(c_{x_0} + c_N^* \eta^2) \quad (14)$$

显然 $\eta > \bar{\eta}$, 否则不能称减速运动。由于 $\eta > \bar{\eta}$ 会引起附加的切向加速度, 如近似认为 $v_c \approx v$, $\rho_c \approx \rho$

$$\text{则} \quad m(A_x - A_{x_c}) = -\frac{1}{2}\rho v^2 S(\eta^2 - \bar{\eta}^2)c_N^* \quad (15)$$

$A_x - A_{x_c}$ 表示由附加攻角引起的附加的诱导阻力加速度, 它的大小由 $\eta^2 - \bar{\eta}^2$ 决定, 而 $\eta^2 - \bar{\eta}^2$ 如何计算是与减速运动如何加到不减速运动有关, 这将放在后面讨论, 下面先讨论一个近似关系。

2.2.2 α, β 与 $\dot{\gamma}_D, \dot{\gamma}_T$ 的近似关系

如果没有附加的减速运动, $\dot{\gamma}_D, \dot{\gamma}_T$ 可由导引规律确定, 再通过坐标变换, 可以求出 $\theta, \dot{\sigma}$ 。再根据 $\theta, \dot{\sigma}$ 与 α 和 β 的关系可以求出所需的 α, β 。为了下面讨论方便, 认为转弯运动与俯冲平面运动分开, 可近似认为

$$\dot{\gamma}_D \approx \theta \quad \text{而} \quad \theta \approx \frac{\rho v' S}{2m} c_N^* \alpha \quad \text{故} \quad \dot{\gamma}_D \approx K_2 \alpha$$

$$\text{而} \quad \dot{\gamma}_T \approx \dot{\sigma} \cos \lambda_D, \quad \dot{\sigma} \approx -\frac{\rho v S c_N^* \beta}{2m \cos \theta}, \quad \text{故} \quad \dot{\gamma}_T \approx K_2 \beta$$

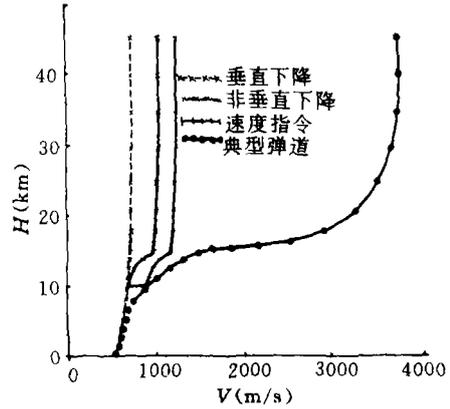


图 2 $H \sim v$ 变化规律曲线

总之近似地可以说 $\dot{\gamma}_D \approx K_2 \alpha$ (16)

$\dot{\gamma}_T \approx K_2 \beta$ (17)

2.2.3 附加攻角的计算

从式(15)看出,若已知 $(A_x - A_{xx})$ 和 $\bar{\eta}$ 是可以求出 η ,但 $\bar{\eta}$ 和 η 与附加攻角 α_N 是什么关系尚未确定,下面从角速度关系入手,找其关系。

按导引要求的速度方向的转率为 $\dot{\gamma}_T$ 、 $\dot{\gamma}_D$ 和 $\dot{\gamma}_g$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_g = \dot{\gamma}_D + \dot{\gamma}_T \\ \dot{\gamma}_g = \sqrt{\dot{\gamma}_D^2 + \dot{\gamma}_T^2} \end{cases} \quad (18)$$

而由附加总攻角 α_N 产生的 $\Delta\dot{\gamma}$ 是沿 $\dot{\gamma}_g$ 的垂直方向加上去,如图3所示。

由图3知

$$\begin{cases} \Delta\dot{\gamma}_D = \frac{\dot{\gamma}_T}{\dot{\gamma}_g} \Delta\dot{\gamma} \\ \Delta\dot{\gamma}_T = -\frac{\dot{\gamma}_D}{\dot{\gamma}_g} \Delta\dot{\gamma} \end{cases} \quad (19)$$

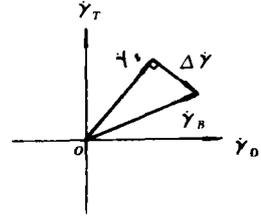


图3 $\dot{\gamma}_B$ 与 $\dot{\gamma}_g$ 、 $\Delta\dot{\gamma}$ 的关系示意图

故加上附加总攻角后总的速度方向转率为

$$\dot{\gamma}_B = \sqrt{\dot{\gamma}_g^2 + \Delta\dot{\gamma}^2} \quad (20)$$

故

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_{BD} = \dot{\gamma}_D + \dot{\gamma}_T/\dot{\gamma}_g \Delta\dot{\gamma} \\ \dot{\gamma}_{BT} = \dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}_D/\dot{\gamma}_g \Delta\dot{\gamma} \end{cases} \quad (21)$$

如果按近似表达式(16)和(17),则由(21)式可得

$$\begin{cases} \alpha = \bar{\alpha} + \Delta\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}} \alpha_N \\ \beta = \bar{\beta} + \Delta\beta = \bar{\beta} - \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}} \alpha_N \end{cases} \quad (22)$$

故 $\eta^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \alpha_N^2 = \bar{\eta}^2 + \alpha_N^2$ (23)

而 $\alpha_N^2 = \eta^2 - \bar{\eta}^2$ (24)

即不太严格的说法, α_N 是在垂直于 $\bar{\eta}$ 的方向加上去的。

2.2.4 $\dot{\gamma}_B$ 公式的推导

因为

$$\dot{\gamma}_g = \frac{\rho v S}{2m} c_y^* \bar{\eta}; \quad \Delta\dot{\gamma} = \frac{\rho v S}{2m} c_y^* \alpha_N$$

故

$$\dot{\gamma}_B = \frac{\rho v S}{2m} c_y^* [\bar{\eta}^2 + \alpha_N^2]^{1/2}$$

下面分析如何求 $\bar{\eta}$ 和 α_N 。

设某一时刻实际速度 v 与理想速度 v^* 的差别为 $v - v^*$,如果认为在 $T_g = -\rho/\dot{\rho}$ 时间内完成,则此时刻所需的平均加速度为 $(v - v^*)/T_g$ 。但实际上并不是要求在 T_g 的时间内完成,所以应加一修正系数 K ,故可以认为附加的切向加速度为

$$-K \frac{(v-v^*)}{T_g} = A_x - A_{x0} \quad (25)$$

代上式入式(15), 可得

$$-K \frac{(v-v^*)}{T_g} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S c_N^2 a_N$$

故由上式可得

$$a_N = \left[\frac{2m}{c_N^2 S} K \frac{v-v^*}{v} \frac{1}{T_g} \frac{1}{\rho v} \right]^{1/2} \quad (26)$$

$\tilde{\eta}$ 为无附加减速运动时按导引规律确定的总攻角, 当然可以由导引规律算出, 但也可以采用下法:

设无附加减速运动则

$$mA_{x0} = -c_{x0} \frac{\rho v^2}{2} S - \frac{\rho v^2}{2} S c_N^2 \tilde{\eta}^2 = mA_{x0} + mA_{xi} \quad (27)$$

式中 A_{x0} 为 $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$ 时阻力加速度, A_{xi} 为无减速运动, 由总攻角产生的诱导阻力加速度

$$\text{即} \quad mA_{xi} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S c_N^2 \tilde{\eta}^2 \quad (28)$$

故由式 (28) 可得

$$\tilde{\eta} = \left[\frac{2m}{c_N^2 S} \frac{1}{\rho v} \frac{|A_{xi}|}{v} \right]^{1/2} \quad (29)$$

其中 $|A_{xi}|$ 为 A_{xi} 的绝对值。

代式 (26) 和式 (29) 入式 (25) 可得

$$\dot{\gamma}_B = \sqrt{\frac{(c_y^2)^2 S}{2mc_N^2}} \left\{ \rho v \left[\left(\frac{v-v^*}{v} \right) K \left(-\frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) + \frac{|A_{xi}|}{v} \right] \right\}^{1/2} \quad (30)$$

3 仿真计算结果

根据上面推导出的控制速度方向和大小的公式可进行数字仿真计算。

假设再入机动弹头再入点运动参数如下:

$$v = 3680 \text{m/s}, \theta = -44.3^\circ, H = 70 \text{km}$$

其质量和横截面积、空气动力系数均已知。

$$\dot{\gamma} \text{ 控制参数: } \dot{\gamma}_D = -4\lambda_D - 2 \frac{\dot{\rho}}{\rho} (\lambda_D + \gamma_{DF}), \dot{\gamma}_T = 4\lambda_T$$

$$\text{终端约束条件: } \gamma_{DF} = -90^\circ, v_F = 520 \text{m/s}$$

$$\text{过程约束条件: } \alpha \leq \alpha_{\max}, n_y \leq n_{y\max}$$

$$\text{速度控制参数: } \alpha = 0.4126, K_1 = 0.0225, K = 6.27$$

数字仿真计算结果如图 4、图 5 所示。图 4 表示了高度 H 和射程 L 的关系, 同时画出了 α 和过载 N_y 随时间的变化曲线。图 5 画出了 $\dot{\gamma}_g, \dot{\gamma}_B$ 的变化过程。

最终落速误差在 1m/s 左右, 而落点速度方向误差 0.1° 左右, 落点位置误差 1m 左右。

计算表明: 按本文提出的 $\dot{\gamma}$ 控制、速度控制方法, 在按 $\dot{\gamma}$ 导引规律进行导引的同时, 进行了速度控制, 导引过程中较好地满足终端约束条件和过程约束条件, 确保了再入机动弹头以要求的速度和角度准确命中目标。对不同射程落速的仿真结果令人满意。

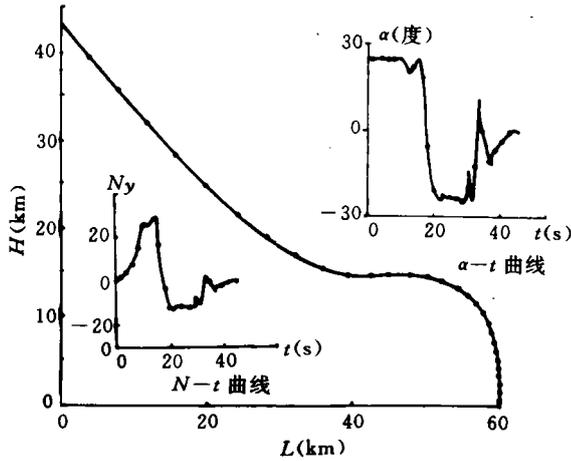


图4 $H \sim L$ 关系曲线

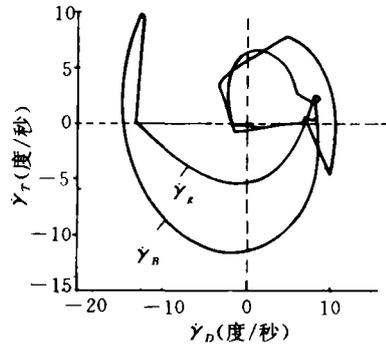


图5 $\bar{\gamma}_y, \bar{\gamma}_B$ 变化规律曲线

参 考 文 献

- 1 赵汉元. 再入机动弹道的设计. 国防科技大学学报 1980, (4): 73~105
- 2 赵汉元. 再入飞行器机动弹道的设计. 宇航学报 1985, (1): 1~10
- 3 赵汉元. 最佳的再入机动弹道. 国际弹道学学术交流会议论文集 1988. 南京
- 4 徐景方. 国外弹道导弹被动段控制技术. 航天控制 1991, (3): 18~25
- 5 陈克俊, 赵汉元. 一种适用于攻击地面固定目标的最优再入机动制导律. 中国宇航学会返回与再入专业委员会学术年会, 1991

Velocity Control of Maneuvering Reentry Vehicle

Zhao Hanyuan Chen Kejun
(Department of Automatic Control)

Abstract

In this paper, the problem of velocity control of maneuvering reentry vehicle is described in detail. First, an optimal guidance law applied to attacking the fixed target is derived with the velocity directing to the ground. Second, the design methods of the ideal velocity curve design and the detailed ways of controlling the falling velocity value are discussed. And it is proved by means of simulating computation that a considerable accuracy of falling velocity control has been obtained.

Key words optimal guidance law, reentry maneuver, velocity control