

带有大质量刚体圆锥壳的自由振动分析*

唐乾刚 孙世贤

(航天技术系)

摘要 本文针对壳体带有大质量刚体的特点,用有限元离散方法,导出了在不同周向波数下壳元节圆位移与刚体质心位移及转角之间的关系式,并将结果与实际运动进行对比分析,论证了结论的正确性。为带有大质量刚体的壳体结构的动力分析提供了理论依据。

关键词 大质量刚体,回转壳,自由振动

分类号 TU334

回转壳体在航天运载、导弹及战斗部中被广泛采用。由于需要,在壳体中装有仪器、配重及战斗质量等。这些装置与壳体比较往往刚度大、质量大,完全可视为刚体。如何分析刚体的运动以及刚体位移、转角与壳节圆位移间关系,将直接影响对整个结构的动力分析。本文依据刚体一般运动理论,导出了刚体质心位移和转角与壳节圆位移间的关系式,最后通过模态(实际运动情况)的分析和算例的验证,说明了方法和公式的正确性。

1 各周向波数对应的模态

1.1 壳元位移表达式

对于回转壳元,一般采用如下形式的半解析公式^[4]

$$\begin{cases} u' = \bar{u}'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \bar{u}'_n \\ v' = \bar{v}'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \bar{v}'_n \\ w' = \bar{w}'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \bar{w}'_n \end{cases} \quad (1)$$

式中, n 为周向波数, \bar{u}'_n 、 \bar{v}'_n 、 \bar{w}'_n 为圆周上对应周向波数的 u' 、 v' 、 w' 的最大值, u' 、 v' 、 w' 方向如图1所示。

由于正、余弦函数为正交函数。因此,对于线性问题各周向波数不存在联耦问题,可以单独进行计算,(1)式可改写为

* 1992年1月7日收稿

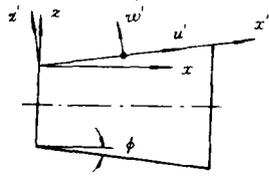


图 1 坐标位移示意图

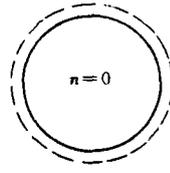


图 2 呼吸模态

$$\begin{cases} u' = \cos n\theta \bar{u}' \\ v' = \sin n\theta \bar{v}' \quad (n = 0, v' = \bar{v}') \\ w' = \cos n\theta \bar{w}' \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

式中 \bar{u}' 、 \bar{v}' 、 \bar{w}' 可根据壳体结构特点进行插值，这里不再赘述。

1.2 局部坐标与总体坐标间的关系

设整体坐标轴为 x 、 y 、 z ，对应的位移分量为 u 、 v 、 w 与局部坐标 x' 、 y' 、 z' 对应的位移分量 u' 、 v' 、 w' 有如下关系

$$\begin{cases} u = u' \cos \phi - w' \sin \phi \\ w = u' \sin \phi + w' \cos \phi \end{cases} \quad (3)$$

这样， u 、 w 可表为

$$\begin{cases} u = \bar{u} \cos n\theta \\ v = \bar{v} \sin n\theta \\ w = \bar{w} \cos n\theta \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

1.3 各周向波数对应的模态

(1) $n=0$ 时，壳截圆上各点的纵向位移相等，即 $u=\bar{u}$ ，这是纵向振动模态；截圆上各点的环向位移 v 也相同，这是扭转模态； w 沿截面圆心是对称的，而且相等，这是呼吸模态，见图 2。各截面圆心保持不动。

(2) $n=1$ 时，以 y 轴为参考轴，从位移表达式(4)可看出，每个截圆在运动中保持圆形，这种模态为幌动模态，亦称之为弯曲模态，见图 3。

(3) $n=2$ ，其截圆上位移 u 、 v 、 w 如图 4 所示，称为卵形模态，各圆心（轴线）保持不动。 $n>2$ 与 $n=2$ 类同。

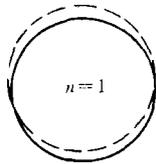


图 3 幌动模态

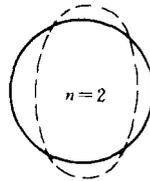


图 4 卵形模态

2 刚体速度与壳节圆速度间关系式

2.1 壳元与刚体的速度关系

设第 k 个壳元的右节圆上固连一质量为 M 、中心转动惯量为 I_{x^*} 、 I_{y^*} 、 I_{z^*} ，其质心离该节圆距离为 b ，如图 5 所示。设 y^* 轴为 θ 参考轴。设壳与刚体连接处节圆上 θ 对应的位移分量为 u 、 v 、 w ，在质心坐标系 $cx^*y^*z^*$ 上的位移分量为 u^* 、 v^* 、 w^* ，它们间的关系如下（见图 6）

$$\begin{cases} u^* = u \\ v^* = w \cos \theta - v \sin \theta \\ w^* = w \sin \theta + v \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

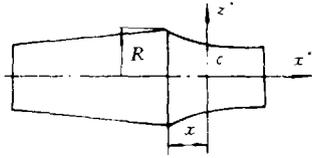


图 5 壳与刚体连接示意图

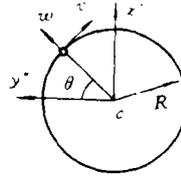


图 6 θ 处位移图

将(4)式代入(5)式有

$$\begin{cases} u^* = \bar{u} \cos \theta \\ v^* = \bar{w} \cos \theta \cos \theta - \bar{v} \sin \theta \sin \theta \\ w^* = \bar{w} \cos \theta \sin \theta + \bar{v} \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (6)$$

其速度关系式为

$$\begin{cases} \dot{u}^* = \dot{\bar{u}} \cos \theta \\ \dot{v}^* = \dot{\bar{w}} \cos \theta \cos \theta - \dot{\bar{v}} \sin \theta \sin \theta \\ \dot{w}^* = \dot{\bar{w}} \cos \theta \sin \theta + \dot{\bar{v}} \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

设刚体的角速度 $\vec{\omega}$ 在质心轴上的投影为 $\dot{\alpha}^*$ 、 $\dot{\beta}^*$ 、 $\dot{\gamma}^*$ ，即

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}^* \vec{i} + \dot{\beta}^* \vec{j} + \dot{\gamma}^* \vec{k} \quad (8)$$

刚体与壳元连接处的位移，就该单元右节圆位移，也是刚体在此处的位移，设质心速度分量为 \dot{u}_c 、 \dot{v}_c 、 \dot{w}_c ，由速度合成定理，得

$$\dot{u}^* \vec{i} + \dot{v}^* \vec{j} + \dot{w}^* \vec{k} = \dot{u}_c \vec{i} + \dot{v}_c \vec{j} + \dot{w}_c \vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (9)$$

而

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\alpha}^* & \dot{\beta}^* & \dot{\gamma}^* \\ b & R \cos \theta & R \sin \theta \end{vmatrix} \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式，有

$$\begin{cases} \dot{u}^* = \dot{u}_c + (\dot{\beta}^* R \sin \theta - \dot{\gamma}^* R \cos \theta) \\ \dot{v}^* = \dot{v}_c + (\dot{\gamma}^* b - \dot{\alpha}^* R \sin \theta) \\ \dot{w}^* = \dot{w}_c + (\dot{\alpha}^* R \cos \theta - \dot{\beta}^* b) \end{cases} \quad (11)$$

再将(7)式代入(11)式,有

$$\begin{cases} \ddot{u} \cos n\theta = \dot{u}_c + (\beta^* R \sin\theta - \dot{\gamma}^* R \cos\theta) \\ \ddot{w} \cos n\theta \cos\theta - \dot{v} \sin n\theta \sin\theta = \dot{v}_c + (\dot{\gamma}^* b - \dot{\alpha}^* R \sin\theta) \\ \ddot{w} \cos n\theta \sin\theta + \dot{v} \sin n\theta \cos\theta = \dot{w}_c + (\dot{\alpha}^* R \cos\theta - \beta^* b) \end{cases} \quad (12)$$

2.2 刚体在各周向波数下的动能

由(12)式可导出不同周向波数下刚体质心速度与角速度,进一步可写出其动能。

(1) $n=0$ 的情况

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \dot{u}, v_c = 0, \dot{\alpha}^* = \dot{v}/R \\ \beta^* = \dot{\gamma}^* = 0, \dot{w} = \dot{w}_c = 0 \end{cases} \quad (13)$$

上式结果与实际运动情况是完全吻合的。因为 $n=0$ 时,刚体只能沿轴线方向运动和绕轴线转动,质心速度只能沿轴线方向,是节圆上速度沿轴线的分量;而刚体绕轴线的角速度应为节圆环向速度除以节圆半径;又因刚体不变形,径向位移(轴对称)应为零。这些与(13)式是相符合的。此时,刚体动能为

$$T_R^{(0)} = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + \frac{1}{2} I_{xc} \left(\frac{\dot{v}}{R} \right)^2 \quad (14)$$

(2) $n=1$ 的情况

$$\begin{cases} \dot{u}_c = 0, \dot{v}_c = \dot{w} - \dot{\gamma}^* b, \dot{w}_c = 0 \\ \dot{\alpha}^* = 0, \beta^* = 0, \dot{\gamma}^* = -\frac{\dot{u}}{R} \end{cases} \quad (15)$$

由于 $n=1$ 为梁式振动或弯曲振动。在实际运动中截圆保持为圆,且圆心在轴线方向的位移分量为零;又因 y^* 轴是 θ 参考轴,横向位移沿 y^* 轴方向;由运动学知, $\dot{w}_c = \dot{w} + \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) |b|$, 而 $\dot{\gamma}^*$ 就是节圆处转角,因此 $\dot{v}_c = \dot{w} - \dot{\gamma}^* b$ (b 在 $cx^*y^*z^*$ 坐标下的坐标为负值);由弯曲振动知,刚体角速度只有沿 z^* 轴的分量。因此(15)式与上述实际运动完全符合。此时刚体动能为

$$T_R^{(1)} = \frac{1}{2} M \dot{v}_c^2 + \frac{1}{2} I_{yc} \dot{\gamma}^{*2} = \frac{1}{2} M (\dot{w} - \dot{\gamma}^* b)^2 + \frac{1}{2} I_{yc} \dot{\gamma}^{*2} \quad (16)$$

(3) $n \geq 2$ 的情况

$$\begin{cases} \dot{u}_c = \dot{v}_c = \dot{w}_c = 0 \\ \dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0 \\ \dot{\alpha}^* = \beta^* = \dot{\gamma}^* = 0 \end{cases} \quad (17)$$

从模态分析知, $n \geq 2$ 时真实运动是壳体轴保持不动,只能是壳体本身变形,因此刚体保持不动;又因刚体不变形,壳体与刚体连接处的位移为零。所以(17)式与上述真实运动完全吻合。

3 壳体固连刚体以后的频率变化分析

(1) $n=0$ 时,由于结构质量增加了惯性,对于纵向和扭转模态,必然会降低频率;对于呼吸模态,刚体制约了壳体变形,频率会升高。

(2) $n=1$ 时, 由于刚体增加了结构转动惯量, 会使频率降低。

(3) $n \geq 2$ 时, 刚体对壳体每种模态对应的变形都有制约, 因而会使频率升高。

4 算例及结果分析

4.1 算例

设锥壳最小半径 $R=5.41(\text{cm})$, 母线长 $L=20.98(\text{cm})$, $\phi=20^\circ$, 壳厚 $0.1016(\text{cm})$, $E=2.067 \times 10^7(\text{N}/\text{cm}^2)$, 泊松比 $\mu=0.3$, $\rho=2.868 \times 10^{-3}(\text{kg}/\text{cm}^3)$, 最小端固定; 在锥壳大端节圆上固连回转刚体, 其质量 $M=20(\text{kg})$, $I_{xx}=1000(\text{kg} \cdot \text{cm}^2)$, $I_{yy}=1500(\text{kg} \cdot \text{cm}^2)$, $b=-8(\text{cm})$.

表 1 为无刚体之结果, 考证单元的合理性。表 2 为本文方法和集中质量法的计算结果。共分为十五个单元

4.2 结果分析

从表 1 可看出, 本文所采用的单元是可靠的, 与其它文献结果吻合。

表 2 中, $n=0$ 时, 第一阶、二阶为扭转和纵向振动; $n=1$ 的三阶都弯曲振动。所得结果与真实运动分析完全相符。集中质量法(将质量均匀分布在节圆上)带来的误差大一些, 因为它未考虑转动惯量和刚体对壳体的约束。

本文的方法在计算机上很容易实现, 对应相应的单元, 只需在质量矩阵中加上刚体所贡献的项及刚体对壳体的位移约束即可。

表 1 频率(Hz)

周向波数	本文方法		文献[4]	
$n=2$	544.0	3140	5718	546.5
$n=3$	336.2	2016	4393	337.5

表 2 频率(Hz)

周向波数	本文方法	集中质量法	无刚体
$n=0$	544.3	233.4	2128
	766.6	312.6	4429
	6865(呼吸)	6093(呼吸)	6302(呼吸)
$n=1$	105.8	143.3	1167
	1167	399.7	4939
	4943	859.8	6378
$n=2$	2982	69.58	544
	5223	564.0	3140
	7110	1121	5718
$n=3$	2010	42.33	336.2
	3860	749.3	2016
	5426	1124	4393

参 考 文 献

- 1 Basdekas N L and Chi M. Response of Oddly-stiffened Circular Cylindrical Shell. J. Sound and Vib., 1971, 17(2): 187~206
- 2 Ramesh R and Sadasiva Roa YVK. Free Vibrations of Multilayered Thick Composite shells. Computers and Structures, 1988, 28(6): 717~722
- 3 Sunder P J and Ramarkrishnan C V. Finite Element Analysis of 3-PLY Laminated Conical Shell. For Flutter, Numerical Methods In Engineering, 1983, 19: 1183~1192
- 4 Subir K S and Philip L G. Free Vibration of shells of Revolution Using FEM, Journal of the Engineering Mechanics Division. 1974, 100(2): 283~302

Analysis of Free Vibration of Conical Shell with Rigid Body of Large Mass

Tang Qiangang Sun Shixian
(Department of Aerospace Technology)

Abstract

In this paper, the characters of a large-mass rigid body fixed to conical shell are considered. The displacement of the centre of mass and angular displacement of the body related to the displacement of nodal circle of finite element are obtained for each circumferential wave number. Comparing the results with those in actual motion, the correctness of the conclusion is demonstrated. This provides a theoretical foundation of dynamic analysis for the shells with rigid body of large mass.

Key words rigid body of large mass, revolutionary shell, free vibration