

## 任意三角域上的光滑插值法\*

方 遼 刘 杰

(系统工程与应用数学系)

**摘 要** 本文讨论了三角域和多边形域上的光滑函数在边界的法向导数和沿边界的方向导数的关系,得到了三角域和多边形域上  $C^1(C^2)$  插值的简化判别条件。提出了三角域上的一种  $C^2$  插值方法。最后,我们给出了误差估计和计算实例。

**关键词** 几何, 方向导数, 曲面插值

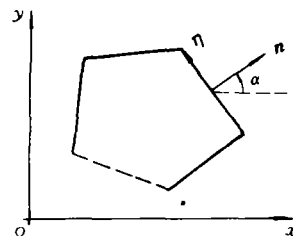
**分类号** O241.5

在多元逼近和曲面造型中,多边形域上的插值与逼近,是一个活跃的研究领域,如三角形域上的插值<sup>[4]</sup>,矩形域上的插值以及 L 型域等。这些插值都有着重要的理论和应用价值。

1 三角(多边形)域上  $C^1(C^2)$  插值的简化判别条件

设多边形区域为  $T$ ,  $F(x, y)$  是  $T$  上的光滑函数,  $T$  的边界为  $\partial T$ , 在  $\partial T$  上插值  $F(x, y)$  及  $F(x, y)$  的 1 到  $N$  阶法向导数的函数  $G(x, y)$  称  $T$  的  $C^N$  插值函数, 即  $G(x, y)$  满足条件

$$\begin{cases} G(x, y)|_{\partial T} = F(x, y)|_{\partial T} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial \vec{n}^i} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial \vec{n}^i} \Big|_{\partial T} \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$



这里  $\vec{n}$  是  $\partial T$  上的法向么矢, 如图 1

在实际研究中,直接验证(1)是很困难的,因而我们往往退一步检验

图 1

$$\begin{cases} G(x, y)|_{\partial T} = F(x, y)|_{\partial T} \\ \frac{\partial^{i+j} G(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial^{i+j} F(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \Big|_{\partial T} \quad 0 \leq i, j \leq N \quad i + j \leq N \end{cases} \quad (2)$$

\* 1992年3月20日收稿

从而(1)得到验证。不过(2)的验证也相当繁杂,我们利用边界线段上的法向导数与沿边界线段的方向导数之间的关系,对  $N=1,2$  的情况,导出了比(1)、(2)更简化的插值条件,当  $N=1$  时,简化的插值条件与(1)等价。 $N=2$  时,更正了文献[5]中插值条件的错误。

下面我们仅就  $\partial T$  中的任一条边讨论,为方便也记为  $\partial T$ 。

显然,当  $\partial T$  平行于  $x$  轴时,(1)与

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \left. \frac{\partial G(x,y)}{\partial y^i} \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F(x,y)}{\partial y^i} \right|_{\partial T} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

等价,而  $\partial T$  平行于  $y$  轴时,(1)与

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \left. \frac{\partial G(x,y)}{\partial x^i} \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F(x,y)}{\partial x^i} \right|_{\partial T} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

等价。

当  $\partial T$  既不平行于  $x$  轴又不平行于  $y$  轴时,我们证明了,当  $N=1$  时,(1)式与

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \left. \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \right|_{\partial T} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

等价。(4)式中  $\partial G(x,y)/\partial x, \partial F(x,y)/\partial x$  换成  $\partial G(x,y)/\partial y, \partial F(x,y)/\partial y$  也成。

当  $N=2$  时,(1)式与

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \left. \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \right|_{\partial T} \\ \left. \left( \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} \right) \right|_{\partial T} = \left. \left( \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2} \right) \right|_{\partial T} \end{cases} \quad (5)$$

等价。

我们固定  $\partial T$  的方向,设这个方向的么矢为  $\vec{\eta}$ ,由方向导数公式知

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial T} = \left. \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \sin \alpha \right) \right|_{\partial T} \\ \left. \frac{\partial F}{\partial \vec{\eta}} \right|_{\partial T} = \left. \left( \mp \frac{\partial F}{\partial x} \sin \alpha \pm \frac{\partial F}{\partial y} \cos \alpha \right) \right|_{\partial T} \end{cases} \quad (6)$$

这里  $\alpha$  为  $\vec{n}$  的方向角。

(6)式中消去  $\partial F/\partial x$  得:

$$\left. \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} \sin \alpha \pm \frac{\partial F}{\partial \vec{\eta}} \cos \alpha \right) \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\partial T} \quad (7)$$

同理消去  $\partial F/\partial y$  得:

$$\left. \left( \frac{\partial F}{\partial \vec{n}} \cos \alpha \mp \frac{\partial F}{\partial \vec{\eta}} \sin \alpha \right) \right|_{\partial T} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\partial T} \quad (8)$$

对  $G(x,y)$  相应可得:

$$\left( \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} \sin \alpha \pm \frac{\partial G}{\partial \bar{\eta}} \cos \alpha \right) \Big|_{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{\partial T} \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} \cos \alpha \mp \frac{\partial G}{\partial \bar{\eta}} \sin \alpha \right) \Big|_{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{\partial T} \quad (10)$$

由于在  $\partial T$  上,  $F(x, y)$  与  $G(x, y)$  相等, 所以在  $\partial T$  上沿边界的方向导数有如下的关系

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\partial T} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha)}{t} \Big|_{\partial T} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha)}{t} \Big|_{\partial T} \\ &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\partial T} \end{aligned}$$

由(7)式与(9)式相减得:

$$\sin \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} \right) \Big|_{\partial T} \quad (11)$$

由(8)式与(10)式相减得:

$$\cos \alpha \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G}{\partial \bar{n}} \right) \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x} \right) \Big|_{\partial T} \quad (12)$$

到此由(11)式或(12)式证明了  $N=1$  的论断。

当  $N=2$  时

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{n}^2} \Big|_{\partial T} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \sin^2 \alpha \right) \Big|_{\partial T} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\eta}^2} \Big|_{\partial T} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \sin^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cos^2 \alpha \right) \Big|_{\partial T} \end{aligned}$$

上面两式相加得:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \bar{n}^2} \Big|_{\partial T} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\eta}^2} \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial T} \quad (13)$$

相应地  $G(x, y)$  有:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{n}^2} \Big|_{\partial T} + \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{\eta}^2} \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial T} \quad (14)$$

由  $\partial G / \partial \bar{\eta} \Big|_{\partial T} = \partial F / \partial \bar{\eta} \Big|_{\partial T}$ , 易知

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{\eta}^2} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{\eta}^2} \Big|_{\partial T}$$

则(13)、(14)两式相减得:

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{n}^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{n}^2} \right) \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \Big|_{\partial T} + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial T} \quad (15)$$

由(15)式我们知道, 若  $\partial^2 F / \partial \bar{n}^2 \Big|_{\partial T} = \partial^2 G / \partial \bar{n}^2 \Big|_{\partial T}$  必可推得:

$$\left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial T}$$

反之亦然。

由此证得, 插值条件(1)式与(5)式等价。文献[5]中指出, 当  $N=2$  时, (1)式与

$$\begin{cases} G(x, y) \Big|_{\partial T} = F(x, y) \Big|_{\partial T} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \Big|_{\partial T} \\ \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \Big|_{\partial T} \end{cases}$$

等价。显然是错误的。

## 2 任意三角域上的 $C^2$ 插值法

### 2.1 问题提出:

三角域上的插值不仅在有限元计算中必不可少,而且常用于几何造型和多元逼近。三角曲面片之间达到  $C^1$  连续的算法已有不少<sup>[1-3]</sup>,但有时要求达到  $C^2$  连续,已有的曲面算法<sup>[4],[5]</sup>计算都比较复杂,我们提出一种三角域上的凸组合插值方法。

设  $T$  是任意三角形  $ABC$ ,要求构造一个插值函数  $G(x,y)$ ,使它在  $T$  的边界  $\partial T$  上插值函数  $F(x,y)$  以及它的一、二阶方向导数,即

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial T} \\ \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial \vec{n}^2} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial \vec{n}^2} \Big|_{\partial T} \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\vec{n}$  表示  $\partial T$  的法线方向,  $\partial/\partial \vec{n}$ ,  $\partial^2/\partial \vec{n}^2$  分别表示沿  $\partial T$  法线方向的一、二阶导数。

由前面一节可知插值条件(16)式可简化为

$$\begin{cases} G(x,y)|_{\partial T} = F(x,y)|_{\partial T} \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \Big|_{\partial T} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \Big|_{\partial T} \\ \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \Big|_{\partial T} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \Big|_{\partial T} \end{cases} \quad (17)$$

### 2.2 构造方法:

设  $BC$  边是三角形三条边的最长边,以  $BC$  边为  $y$  轴,作  $OA$  垂直于  $BC$ ,建立坐标系(如图2)在图2中令

$$x_0 = |OA|, m = x_0 + y \operatorname{ctg} \alpha,$$

其中

$$i = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时} \\ 2, & \text{当 } y < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

文[2]构造了插值函数

$$\begin{aligned} PF(x,y) &= \sum_{i=0}^2 \varphi_i \left( \frac{x}{m} \right) F_{i,0}(0,y) m^i \\ &+ \sum_{i=0}^2 \psi_i \left( \frac{x}{m} \right) F_{i,0}(m,y) m^i, \end{aligned}$$

式中

$$F_{i,j}(x,y) = \frac{\partial^{i+j} F(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$$

$\varphi_i(t), \psi_i(t)$  是区间  $[0,1]$  上的五次 Hermite 插值基函数,令

$$\varphi_0(t) = -(t-1)^3(6t_2+3t+1); \varphi_1(t) = -t(t-1)^3(3t+1),$$

$$\varphi_2(t) = -0.5t^2(t-1)^3; \psi_0(t) = t^3(6t^2-15t+10),$$

$$\psi_1(t) = -t^3(t-1)(3t-4); \psi_2(t) = 0.5t^3(t-1)^2.$$

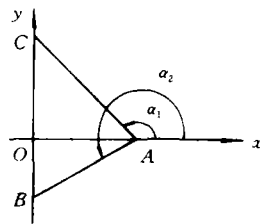


图 2

且具有如下性质:

$$\varphi_i^{(i)}(0) = \psi_i^{(i)}(1) = 1, \varphi_i^{(k)}(1) = \psi_i^{(k)}(0) = 0$$

式中  $i, k = 0, 1, 2$ .

$$\varphi_i^{(k)}(0) = \psi_i^{(k)}(1) = 0$$

式中,  $i \neq k, i = 0, 1, 2$ .

容易验证  $PF(x, y)$  满足插值条件(16)式, 但是  $PF(x, y) \in C^0(7)$ , 因为在  $OA$  上  $\partial PF(x, y)/\partial y$  是间断的. 为了消除间断性, 文[5]增加有理式变为

$$G(x, y) = PF(x, y) + x^3(x-m)^3[A_0 + A_1y + A_2(x+3m+4x_0)]$$

但  $A_0, A_1, A_2$  的计算公式是十分复杂的, 从而使  $G(x, y)$  的计算公式复杂, 计算量较大, 我们引入一个 Taylor 算子

$$LF(x, y) = F(x, 0) + yF_{0,1}(x, 0) + \frac{y^2}{2}F_{0,2}(x, 0) \quad (18)$$

并且定义:  $a_1(x, y) = y^3/[y^3 + (-x+m)^3x^3]$

$$a_2(x, y) = (m-x)^3x^3/[y^3 + (m-x)^3x^3]$$

式中  $(x, y) \in T$ , 显然,  $a_1(x, y) + a_2(x, y) \equiv 1, (x, y) \in T$

于是我们定义  $PF$  与  $LF$  的凸组合插值算法

$$G(x, y) = a_1(x, y)PF(x, y) + a_2(x, y)LF(x, y) \quad (19)$$

下面证明  $G(x, y)$  满足插值条件(17)式, 从而可证得  $G(x, y) \in C^2(T)$ .

$$\begin{aligned} G(x, y) & \Big|_{\partial T \cup OA} \\ &= (a_1(x, y)PF(x, y) + a_2(x, y)LF(x, y)) \Big|_{\partial T \cup OA} \\ &= [a_1(x, y) + a_2(x, y)]PF(x, y) \Big|_{\partial T \cup OA} = F(x, y) \Big|_{\partial T \cup OA} \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} & \Big|_{\partial T \cup OA} \\ &= [a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x}PF(x, y) + a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x}LF(x, y)] \Big|_{\partial T \cup OA} \\ &= (a_1(x, y) + a_2(x, y))\frac{\partial}{\partial x}PF(x, y) \Big|_{\partial T \cup OA} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\partial T \cup OA} \end{aligned}$$

同理可证

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|_{\partial T \cup OA} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Big|_{\partial T \cup OA}, \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Big|_{\partial T \cup OA} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_{\partial T \cup OA}$$

综上所述  $G(x, y)$  在  $\partial T$  上插值  $F$  及  $F$  的一、二阶导数, 而且在  $OA$  上插值  $F$  及  $F$  的一、二阶导数.

从插值式(19)的构造可知  $G(x, y) \in C^2(T)$  从而可得下述定理.

**定理 1** 给定两个有理函数

$$a_1(x, y) = y^3/[y^3 + (x-m)^3x^3]$$

$$a_2(x, y) = (x-m)^3x^3/[y^3 + (x-m)^3x^3]$$

则  $G(x, y) = a_1(x, y)PF(x, y) + a_2(x, y)LF(x, y)$  在  $\partial T$  上插值  $F$  及  $F$  的一、二阶导数, 而且在  $OA$  上也插值  $F$  及  $F$  的一、二阶导数.

### 3 误差估计

**定理 2** 给定一个光滑的二元函数, 设逼近误差

$$E(x, y) = F(x, y) - G(x, y)$$

则

$$|E(x, y)| \leq |x^3(x - x_0 + x_0y/y_i)^3| M$$

$$\text{式中, } M = \max \left( \max_{(x,y) \in T} \left| \frac{\partial^6 F(x, y)}{\partial x^6} \right|, \max_{(x,y) \in T} \left| \frac{\partial^3 F(x, y)}{\partial y^3} \right| \right)$$

$$i = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时} \\ 2, & \text{当 } y < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

**证明** 由  $F$  关于  $y$  的 Taylor 展开有:

$$(I - L)F(x, y) = \int_0^y \frac{\partial^3 F(x, t)}{\partial t^3} \left( \frac{y^2}{2} - yt + \frac{t^2}{2} \right) dt$$

因为  $PF(x, y)$  在  $AB$ 、 $AC$ 、 $BC$  边上插值  $F$  及  $F$  的一、二阶偏导数。对  $[y_2, y_1]$  上任一固定点  $y$ , 插值  $PF(x, y)$  是关于  $x$  的一个五次插值多项式, 并以

$$x' = 0; \quad x'' = x_0 - x_0y/y_i$$

式中,

$$i = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时} \\ 2, & \text{当 } y < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

为插值零点, 且在这两点满足

$$PF = F; \quad \frac{dPF}{dx} = \frac{dF}{dx}; \quad \frac{d^2PF}{dx^2} = \frac{d^2F}{dx^2}$$

由此即得

$$|F - PF| \leq \frac{1}{6!} x^3(x - x_0 + x_0y/y_i)^3 \frac{d^6 F}{dx^6}(x, y).$$

所以

$$|E(x, y)| = |\alpha_1(x, y)(F - PF) + \alpha_2(x, y)(F - LF)|$$

$$\leq |x^3(x - x_0 + x_0y/y_i)^3| M$$

式中,

$$M = \max \left( \max_{(x,y) \in T} \left| \frac{\partial^6 F(x, y)}{\partial x^6} \right|, \max_{(x,y) \in T} \left| \frac{\partial^3 F(x, y)}{\partial y^3} \right| \right)$$

$$i = \begin{cases} 1, & \text{当 } y \geq 0 \text{ 时;} \\ 2, & \text{当 } y < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

证毕。

### 5 数值例子

下面给出一个用本文插值方法插值已知函数的最大偏差的例子。

例: 在以四条直线

表 1

$L$	$G(x,y)$ 的最大偏差
8.0	$2.358 \times 10^{-2}$
6.0	$8.043 \times 10^{-3}$
5.0	$3.418 \times 10^{-3}$
4.0	$3.297 \times 10^{-4}$
3.0	$1.507 \times 10^{-4}$
2.0	$5.755 \times 10^{-6}$
1.0	$5.757 \times 10^{-8}$

$$x + y = \pm L, x - y = \pm L$$

为边的正方形内, 求被插值函数

$$F(x,y) = \sqrt{10^2 - x^2 - y^2}$$

的插值函数, 用正方形的一条对角线( $x=0$ )把正方形分成二个三角形, 在每个三角形上用本文提出的插值法计算。在正方形内等距排列了 81 个点, 在这 81 个点上计算  $G(x,y)$ , 求出这 81 个点上  $G(x,y)$  对  $F(x,y)$  的最大偏差, 结果见表格 1。

### 参 考 文 献

- 1 Wang C Y. CAD. 1983; 15(1): 33~36
- 2 Schumaker L L. In Corentz GG, Chui C R and Schumaker L L eds. Approximation Theory. Vol. 2. Academic press. 1976: 203~268
- 3 方遒. 任意三角域上的  $C^1$  多项式插值方法, 数学的实践与认识. 1989; (2): 47~51
- 4 Barnhill R E, Birkhoff G and Gordon W J. Approximation Theory. 1973; (8): 114~118
- 5 汪嘉业. 一种三角形域上的  $C^2$  插值方法. 计算数学. 1985; 7(2): 156~163

## Smooth Interpolation Over Arbitrary Triangles

Fang Kiu Lui Jie

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

### Abstract

In part one of this paper, we discussed the relation between directional and normal derivatives of smooth functions on boundary of triangle or polygon. Therefore a simplified criteria is obtained for  $C^1$  ( $C^2$ ) interpolating in triangles or polygons. In part two, a method is presented for constructing  $C^2$  interpolating functions in arbitrary triangles. Finally, the error of interpolating function is estimated, and a numerical example is given.

**Key words** geometry, directional derivative, surface interpolation