国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第2期 1993年6月 Vol. 15 No. 2

带费用的校对问题的最优停止*

罗建书

（系统工程与应用数学系）

摘要 本文用逼近的方法给出了校对问题中 Poisson 模型与二项模型的最优停止规则，并得出了二项模型中参数 π 具有先验分布 $\beta(a,b)$，$a>0$，$b>0$ 时报酬序列的结构。

关键词 最优停止，单调性，渐近规则

分类号 O212. 1

下面的模型可用于带费用的金属探伤的最优停止问题。

设一篇打印稿有 N 个错误，N 是一个非负随机变量，且 $EN<\infty$. 现通过相继的 n 次校对来发现并改正这些错误。设每次校对的费用为 $c>0$，通过 k 次校对后仍未发现的每个错误具有损失费用 d_k，设 $\{d_k,k=1,2,\cdots\}$ 为有界序列。记 X_k 为第 k 次校对中发现的前 $k-1$ 次校对中没发现过的错误。设在给定 N，X_1，…，X_{k-1}时，X_k 的条件分布为二项分布 $B(N_{k-1},p_k)$，其中 $N_{k-1}=N-\sum_{i=1}^{k-1}X_i$，$p_k$ 为第 k 次校对中发现每个错误的概率。第 k 次校对后的报酬函数为

$$y_k=-kc-d_kE(N_k|X_1,\cdots,X_k),k=1,2,\cdots \tag{1}$$

记概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mathscr{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$，一个$(\mathscr{F}_n)$停时 τ 是满足$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$，$n=1,2,\cdots$的随机变量，记 $\mathscr{T}=\{\tau$ 为$(\mathscr{F}n)$停时，$p\{\tau<\infty\}=1$ 且 $Ey_\tau^-<\infty\}$. 要求停时 $\tau^*\in\mathscr{T}$，使得

$$\mathrm{E}y_{\tau^*}=\sup_{\tau\in\mathscr{T}}Ey_\tau \tag{2}$$

T. S. Ferguson 和 J. P. Hardwick 证明了当 N 服从二项分布 $B(W,\pi)(W>0,0\leqslant\pi\leqslant 1)$或 Poisson 分布(参数为 $\lambda>0$)且满足一定条件时，一步向前看规则[1]

$$\sigma_1=\inf\{n\geqslant 0,y_n\geqslant E\{y_{n+1}|X_1,\cdots,X_n\}\} \tag{3}$$

是最优的。本文利用 Snell 包的极限性质，证明了有限序列$\{y_1,\cdots,y_k\}$的最优停止规则 λ^K 渐近于$\{y_1,\cdots,y_n,\cdots\}$的最优停止。并证明了当 $EN<\infty$且$(d_n-d_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E(N_n|\mathscr{F}n)$非增时，$\sigma_1$ 是最优停止规则。最后，用逼近的方法给出了当 N 服从 Poisson 分布与二项分布时的最优停止规则，且讨论了当二项模型中参数 π 具有先验分布 $\beta(a,b)$时，报酬序列$\{y_n,1\leqslant n<\infty\}$的结构。

* 1992年1月10日收稿

1 问题的一般解与单调情形

对于报酬序列(1),记 $\mathscr{T}n=\{\tau\in\mathscr{T},\tau\geqslant n\}$,$\gamma_n=\underset{\tau\in\mathscr{T}_n}{\operatorname{esssup}}E\{y_\tau|\mathscr{F}_n\}$,$V_n=\sup\limits_{\tau\in\mathscr{T}_n}Ey_\tau$,$V=V_1$.

对于有限情形$\{y_1,\cdots,y_k\}$,即最多校对 K 次停止,记 $\mathscr{T}_n^k=\{\tau\in\mathscr{T}_n,\tau\leqslant k\}$,$\gamma_n^k=\underset{\in\mathscr{T}_n^k}{\operatorname{ess-sup}}E\{y_\tau|\mathscr{F}_n\}$,$V_k^n=\sup\limits_{\tau\in\mathscr{T}_n^k}Ey_\tau$,$V_0^k=V^k$,则由[2],$\gamma_n^k=y_n\vee E\{\gamma_{n+1}^k|\mathscr{F}_n\}$,$n=1,2,\cdots,k-1$,$\gamma_k^k=y_k$,$V_n^k=E\gamma_n^k$. 令

$$\sigma^k=\inf\{n\geqslant 1,\gamma_n^k=y_n\}$$

易知 $Ey_\sigma k=V^k$. 因 γ_n^k,V_n^k 关于 K 单调上升,故 $\lim\limits_{k\to\infty}\gamma_n^k$ 存在,记为 γ_n',同理可知 $\lim\limits_{k\to\infty}V_n^k\triangleq V_n'$ 存在。

引理 1 设$\{d_n\}$为有界序列,则 $\gamma_n'=\gamma_n$,$V_n'=V_n$.

证明 令 $x_n'=-d_nE\{N_n|\mathscr{F}_n\}$,$x_n''=nc$,则 $(x_n')^-=d_nE\{N_n|\mathscr{F}n\}\leqslant d_nE\{N|\mathscr{F}_n\}$,由 $EN<\infty$及$\{d_n\}$的有界性知$\{(x_n')^-\}$一致可积,而对一切 $\tau\in\mathscr{T}$,$Ex_\tau''=cE\tau<\infty$,此因 $CE\tau\leqslant Ey_\tau^-<\infty$. 由[2]中定理 4.4 知 $\gamma_n'=\gamma_n$. 由单调收敛定理,$V_n'=\lim\limits_{k\to\infty}V_n^k=\lim\limits_{k\to\infty}E\gamma_n^k=E\gamma_n'=E\gamma_n=V_n$. 证毕。

因为当 $y_n=\gamma_n^{k+1}$ 时,$y_n=\gamma_n^{k+1}\geqslant\gamma_n^k\geqslant y_n$,从而 $y_n=\gamma_n^k$,所以 $\sigma^k=\inf\{1\leqslant n\leqslant k,y_n=\gamma_n^k\}\leqslant\inf\{1\leqslant n\leqslant k+1,y_n=\gamma_n^{k+1}\}=\sigma^{k+1}$,$\{\sigma^k\}$关于 k 非降。

定理 1 令 $\sigma=\inf\{n\geqslant1,y_n=\gamma_n\}$,设$\{dn\}$有界,则 σ 是最优停时,且 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$.

证明 记 $\tilde{\sigma}=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$. 由引理 1 得 $\gamma_n^k\leqslant\gamma_n'=\gamma_n$,从而 $\tilde{\sigma}\leqslant\sigma$. 另一方面,在 $A_m=\{\tilde{\sigma}=m\}$上,对 $w\in A_m$,存在 N_w,使得当 $k>N_w$ 时,$\sigma^k(w)=m$,$y_m(w)=r_m^k(w)$,从而 $y_m(w)=\gamma_m'(w)=\gamma_m(w)$. 在 A_m 上,$\sigma\leqslant\tilde{\sigma}$. 因此,$\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$. 往证 σ 的最优性。

由于 $V=\sup\limits_{\tau\in\mathscr{T}}Ey_\tau$,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\sigma_\varepsilon\in\mathscr{T}$,使得 $Ey_{\sigma_\varepsilon}\geqslant V-\varepsilon$. 而 $\sigma_\varepsilon\wedge K\in\mathscr{T}^k\triangleq\{\tau\in\mathscr{T},\tau\leqslant k\}$,且 $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_\varepsilon\wedge k=\sigma_\varepsilon$,从而 $\lim y_{\lambda_\varepsilon\wedge k}=y_{\sigma_\varepsilon}$. 根据引理 1 的记号,$y_n=x_n'-x_n''$,$n=1,2,\cdots$,$\{x_n'\}$一致可积,$\{x_n''\}$单调增加,故 $\lim y_{\lambda_\varepsilon\wedge k}\geqslant E\{\lim\limits_{k\to\infty}y_{\sigma_\varepsilon\wedge k}\}=Ey_{\sigma_\varepsilon}$,于是存在 $K_0>0$,使得 $Ey_{\sigma_\varepsilon\wedge k}\geqslant Ey_{\sigma_\varepsilon}-\varepsilon\geqslant V-2\varepsilon$,$(k\geqslant K_0)$. 由于 $\sigma_\varepsilon\wedge k\in\mathscr{T}^k$,故 $Ey_{\sigma^k}\geqslant Ey_{\lambda_\varepsilon\wedge k}\geqslant V-2\varepsilon(k\geqslant k_0)$,因此,$\lim\limits_{k\to\infty}Ey_{\sigma^k}\geqslant V-2\varepsilon$,令 $\varepsilon\to0$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}Ey_{\sigma^k}\geqslant V$. 另一方面,显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}Ey_{\sigma^k}\leqslant V$. 由$\{\sigma^k\}$关于 K 非降知 $Ey_\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}Ey_{\sigma^k}=V$. 证毕。

引理 2 $E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=p_{n+1}E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$.

证明 记 $A=\{X_k=a_k,k=1,2,\cdots,n\}$,$B_m=\{N=m\}\cap A$,$t_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k$,则在 A 上,

$$E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=E\{X_{n+1}|A\}=\frac{1}{p\{A\}}\int_A X_{n+1}dp$$
$$=\frac{1}{p\{A\}}\sum_{m=t_n}^{\infty}\int_{B_m}X_{n+1}dp=\sum_{m=t_n}^{\infty}\frac{P\{Bm\}}{P\{A\}}E\{X_{n+1}|B_m\},$$

而 $$E\{X_{n+1}|B_m\}=p_{n+1}(m-t_n),$$所以

$$E\{X_{n+1}|A\} = p_{n+1}\sum_{m=t_n}^{\infty} m\frac{P\{Bm\}}{P\{A\}} - p_{n+1}t_n$$
$$= p_{n+1}\{E\{N|A\} - t_n\}$$

另一方面，在 A 上，$E\{N_n|A\}=\frac{1}{p\{A\}}\int_A Ndp-\frac{1}{p\{A\}}\sum_{k=1}^{n}\int_A X_k dp=E\{N|A\}-t_n$，因此 $E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=p_{n+1}E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$. 引理得证。

记 $A_n=\{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}, n=1,2,\cdots$. 若 $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq A_{n+1}\subseteq\cdots$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$，则称 $\{y_n,\mathscr{F}n,n\geqslant1\}$ 属于单调情形。由引理 2，$A_n=\{(d_n-d_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant c\}$. 令 $\sigma_1=\inf\{n\geqslant1,E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}=\inf\{n\geqslant1,(d_n-d_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E\{N_n|\mathscr{F}_n\}\leqslant c\}$，若 $N_n\xrightarrow{a.c.}0$，因为 $E(N_n|\mathscr{F}_n)$ 是非负上鞅，由上鞅收敛定理，$E\{N_n|\mathscr{F}_n\}\xrightarrow{a.c.}0$，从而 $\sigma_1<\infty\ a.c.$

定理 2 设 $N_n\xrightarrow{a.c.}0$，$\{d_n\}$ 有界，$(d_n-d_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$ 非增且 $E\sigma_1<\infty$，则 σ_1 是最优停止规则。

证明 由 $(d_n-d_{n+1}+d_{n+1}p_{n+1})E\{N_n|\mathscr{F}_n\}$ 非增知 $A_n\triangleq\{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}\subseteq A_{n+1}\triangleq\{E\{y_{n+2}|\mathscr{F}_{n+1}\}\leqslant y_{n+1}\}, n=1,2,\cdots$. 又因 $N_n\xrightarrow{a.c.}0$，由前所述，$\sigma_1<\infty\ a.c.$，从而 $P\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\}=1$，故 $\{y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 属于单调情形。又 $Ey_{\sigma}^{-}=cE\sigma_1+E\{d_{\sigma_1}N_{\sigma_1}\}\leqslant cE\sigma_1+dEN<\infty$，$(d=\sup_{n\geqslant1}d_n<\infty)$，故 $\sigma_1\in\mathscr{T}$. 由[2]定理 3.3，只需证明对每个 $\tau\in\mathscr{T}$，且 $E\tau<\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}y_n^{-}dp = 0 \tag{4}$$

因为

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}y_n^{-}dp \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}ncdp + \varlimsup_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}d\cdot Ndp$$
$$= c\varliminf_{n\to\infty}np\{\tau>n\} + \varlimsup_{n\to\infty}d\cdot\int_{\{\tau>n\}}Ndp$$
$$= c\varliminf_{n\to\infty}np\{\tau>n\}.$$

而

$$0\leqslant E\tau = \sum_{n=1}^{\infty}np\{\tau=n\} = \sum_{n=1}^{\infty}P\{\tau\geqslant n\} < \infty \tag{5}$$

从而 $\sum_{n=m}^{\infty}P\{\tau\geqslant n\}=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m+1)p\{\tau=n\}\to0\quad(m\to\infty)$

又 $\sum_{n=m}^{\infty}(n-m+1)p\{\tau=n\}=\sum_{n=m}^{\infty}(n+1)p\{\tau=n\}-mp\{\tau\geqslant m\}$，由(5)式得 $mp\{\tau\geqslant m\}\to0(m\to\infty)$，所以(4)式成立。因此 σ_1 是最优的。证毕。

2 Poisson 模型与二项模型

设打印稿的错误数 N 服从 Poisson 分布 $\mathscr{F}(\lambda)$，$p_n=p, d_n=d, n=1,2,\cdots$. 对于有限情形 $\{y_n,1\leqslant n\leqslant k\}$ 有

定理 3 设$(X_{n+1}|X_1,\cdots,X_n,N)\sim B(N_n,p)$，则

当 $K\geqslant n_0=\inf\left\{n\geqslant 1, p(1-p)^n\leqslant\frac{c}{\lambda d}\right\}$时

$$\gamma_n^k=\begin{cases}y_n+d\lambda p(1-p)^n(k-n-p)-(k-n)c, n<n_0\\ y_n, n_0\leqslant n\leqslant k\end{cases}$$

$\sigma^k=n_0$，从而最优停止规则 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k=n\supset\supset$.

证明 记 $A=\{N_n=j\}, B_n=\{X_i=a_i, 1\leqslant i\leqslant n\}, t_n=\sum\limits_{i=1}^{n}ai$，注意到$(X_{n+1}|X_1,\cdots,X_n,N)\sim B(N_n,p)$，则

$$p\{AB_n\}=p\{X_n=a_n|X_i=a_i,1\leqslant i\leqslant n-1,N_{n-1}=j+a_n\}$$
$$\cdots p\{X_1=a_1|N=j+t_n\}\cdot p\{N=j+t_n\}$$
$$=\frac{\lambda^{j+t_n}}{j!a_1!\cdots a_n!}e^{-\lambda}p^{tn}(1-p)^{nj+\sum\limits_{k=1}^{n}(t_n-t_k)}$$
$$P\{B_n\}=\sum_{i=t_n}^{\infty}P\{\{N=i\}B_n\}$$
$$=\frac{e^{-\lambda}}{a_1!\cdots a_n!}p^{t_n}\lambda^{t_n}(1-p)^{\sum\limits_{k=1}^{n}(t_n-t_k)}e^{\lambda(1-p)^n}$$

因此，$P\{N_n=j|X_i=a_i,1\leqslant i\leqslant n\}=\frac{\{\lambda(1-p)^n\}^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)^n}$，故 $E\{N_n|X_i=a_i,1\leqslant i\leqslant n\}=\sum\limits_{j=0}^{m}jp\{N_n=j|X_i=a_i,1\leqslant i\leqslant n\}=\lambda(1-p)^n$. $\gamma_k^k=y_k$，由引理 2 知 $E\{X_k|\mathscr{F}_{k-1}\}=y_{k-1}+(p\lambda d(1-p)^{k-1}-c)^+$. 易知，当 $n\geqslant n_0$ 时，$\gamma_n^k=y_n$；当 $n<n_0$ 时，$\gamma_n^k=y_n+\lambda pd(1-p)^n(k-n-p)-(k-n)c$. 故 $\sigma^k=n_0$. 由定理 1 知 $\sigma=\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^k$ 是最优停止规则。定理得证。

当 N 服从二项分布 $B(M,\pi)$时，其中 M 为打印稿的总字数，π 为每个字出错的概率，则称为二项模型。[1]中给出了$(N_n|X_1,\cdots,X_n)\sim B(M_n,\pi_n)$，其中 $M_n=M-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\pi_n=\pi\prod\limits_{j=1}^{n}(1-p_j)/[(1-\pi)+\pi\prod\limits_{j=1}^{n}(1-p_j)]$. 设 $p_j=p$，$d_j=d$，$j=1, 2, \cdots$，记 $q=1-p$，$s=1-\pi$，则报酬函数 (1) 成为

$$y_n=-nc-d\frac{\pi q^n}{s+\pi q^n}M_n, n=1,2,\cdots \tag{6}$$

定理 4 设 N 服从二项分布 $B(M,\pi)$，则报酬序列(6)的最优停止规则存在，且 $\sigma_1=\inf\left\{n\geqslant 1, \frac{\pi q^n}{s+\pi q^n}M_n\leqslant\frac{c}{pd}\right\}$是最优停止规则。

证明 由于 $y_{n+1}-y_n=-c-d(\pi_{n+1}-\pi_n)M_n+d\pi_{n+1}X_{n+1}$，$E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=pE\{N_n|\mathscr{F}_n\}$，因此

$E\{y_{n+1}-y_n|\mathscr{F}_n\}=-c-d(\pi_{n+1}-\pi_n)M_n+d\pi_{n+1}E\{X_{n+1}|\mathscr{F}_n\}=-c+pd\pi_nM_n$，

从而$\{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}=\{\pi_nM_n\leqslant\frac{c}{pd}\}$. 因 $\pi_n-\pi_{n+1}=\frac{sp}{s+\pi q^{n+1}}\pi_n>0$，$M_{n+1}\leqslant M_n$，故$\{E\{y_{n+2}|\mathscr{F}_{n+1}\}\leqslant y_{n+1}\}\subseteq\{E\{y_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\leqslant y_n\}, n=1,2,\cdots, \{y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$属于单调情形。因为 $\pi_n=\frac{\pi q^n}{s+\pi q^n}\to 0, (n\to\infty), 0\leqslant M_n\leqslant M$，故 $\sigma_1<\infty$ a. c. 且 $E\sigma_1<\infty$，由定理 2 知 σ_1 是最

优停止规则。证毕。

设 π 具有先验分布密度

$$\beta_{a,b}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, 0<x<1; \\ 0, \qquad x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant 1,\end{cases} \quad a>0, b>0 \tag{7}$$

式中 $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$

引理 3 设 π 具有(7)式中先验分布密度 $\beta_{a,b}(x)$，记 $B_n=\{X_i=a_i, 1\leqslant i\leqslant n\}, t_n=\sum_{i=1}^{n} ai$，则

$$E\{N_n|B_n\}=\frac{\sum_{j=1}^{M-t_n} j\binom{M-t_n}{j}(1-p)^{nj}B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}{\sum_{j=0}^{M-t_n}\binom{M-t_n}{j}(1-p)^{nj}B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}$$

证明 由“更新技巧”，

$$\begin{aligned}P\{N=j\}&=\int_0^1 P\{N=j|\pi=x\}\beta_{a,b}(x)dx \\ &=\frac{\binom{M}{j}}{B(a,b)}\int_0^1 x^{j+a-1}(1-x)^{M-j+b-1}dx \\ &=\binom{M}{j}B(j+a, M-j+b)/B(a,b).\end{aligned}$$

因 $P\{N_n=j, B_n\}=\dfrac{p^{t_n}(1-p)^{nj+\sum_{i=1}^{n}(t_n-t_i)}}{a_1!\cdots a_n!\ B(a,b)}\cdot\dfrac{M!\ B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}{j!\ (M-t_n-j)!}$,

$P(B_n)=\sum_{j=0}^{M-t_n}P\{N_n=j, B_n\}=\dfrac{p^{t_n}(1-p)\sum_{i=1}^{n}(t_n-t_i)}{a_1!\cdots a_n!\ B(a,b)}\sum_{j=0}^{M-t_n}\dfrac{M!\ B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}{j!\ (M-t_n-j)!}(1-p)^{nj}$,

故 $P\{N_n=j|B_n\}=\dfrac{\binom{M-t_n}{j}B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)(1-p)^{nj}}{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{M-t_n}{k}(1-p)^{nk}B(k+t_n+a, M-t_n-k+b)}$.

所以，

$$\begin{aligned}E\{N_n|B_n\}&=\sum_{j=0}^{M-t_n} jp\{N_n=j|B\} \\ &=\frac{\sum_{j=1}^{M-t_n} j\binom{M-t_n}{j}(1-p)^{nj}B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}{\sum_{j=0}^{M-t_n}\binom{M-t_n}{j}(1-p)^{nj}B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}.\end{aligned}$$

引理得证。

由引理 3 及定理 2 易知

定理 5 当 $E\{N_n|B_n\}$关于 n 非增时，

$$\sigma_1 = \inf\left\{ n \geqslant 1, \frac{\sum_{j=1}^{M-t_n} j \binom{M-t_n}{j} (1-p)^{nj} B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)}{\sum_{j=0}^{M-t_n} \binom{M-t_n}{j} (1-p)^{nj} B(j+t_n+a, M-t_n-j+b)} \leqslant \frac{c}{pd} \right\}$$

是最优停止规则。

证明从略。

参 考 文 献

1 Ferguson T S adn Hardwick J P. Stopping rules for proofreading. J. Appl. Prob, 1989, 26: 304～313

2 Chow V S, Robbins H and Siegmund D. Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton Mifflin, Boston, 1972

Optimal Stopping of Proofreading Problems with Costs

Luo Jianshu

(Department of System Engineering and Applied Mathematics)

Abstract

In this paper, the general solutions of proofreading problems with costs is obtained by approximation methods. The optimal stopping rule of binomial model with detecting probability p and over look costs d is provided. The construction of the payoff functions in the binomial model B(M, π) is obtained, where the parameter π is possessed of the prior distribution β(a, b).

Key words optimal stopping, monotonousness, asymptomatic rules