国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第4期 1993年12月 Vol. 15 No. 4

再入飞行器落点准确度的统计分析*

张金槐

(自动控制系)

摘　要　本文研究再入飞行器的落点准确度(系统性偏差)的检验和估计方法。首先，文中引入了准确度的容许限的概念，在此基础上给出了 Bayes 验后加权概率比检验方法。关于落点系统偏差的估计，讨论了 Bayes 估计方法及带有约束的 Bayes 估计方法。文中注意了充分运用试验前的信息，以便使落点系统偏差的评估能在小子样场合下进行。

关键词　随机落点的准确度和密度度，Bayes 检验和估计

分类号　O212.2

1　问题的提出

再入飞行器随机落点的精度分析，历来是一个重要的问题。对于落点的密集度，目前已有较多讨论。但是在试验数特别小的场合，落点偏倚的评定就遇到了困难。为此需要作专门的研究。

我们知道，如果能确切地知道落点的系统性偏差及引起偏倚的主要误差，那么在试验之前应给予补偿，使落点系统性偏差为零。然而，当偏倚不能确切给定时，落点偏差的均值将不为零。此时，相当于瞄准点的偏移，致使武器系统的运用效能改变。因此，必须对落点系统性偏差进行分析，建立一种判别准则，根据这个准则，评定系统偏差是否在容许的范围之内。下面就来讨论这些问题。

2　随机落点准确度的容许限及 Bayes 检验

假定随机落点的坐标为 (X, Z)，将 X，Z 表示成为如下形式：

$$\begin{cases} X = x_0 + \xi + \xi_c + \xi_r \\ Z = z_0 + \zeta + \zeta_c + \zeta_r \end{cases} \tag{2.1}$$

式中 (x_0, z_0) 为瞄准点坐标，(ξ, ζ) 为落点个别散布所对应的随机误差，(ξ_r, ζ_r) 称为集体偏差，它表示在同一批次试验中重复出现的误差，但不同批次的试验，它表现为随机的。(ξ_c, ζ_c) 为每一批次试验中都重复出现的误差，它为常值偏差。在讨论中，假定落点服从正态分布，纵横向独立，且具有圆散布（因此，落点的纵，横向概率偏差相等）。此时 X 和 Z 的期望值为

* 1992年8月10日收稿

$$E[X]=x_0+\xi_c+E[\xi_r]$$
$$E[Z]=z_0+\zeta_c+E[\zeta_r]$$
对于多批的试验，落点的期望值并不与瞄准点重合。此时落点的纵、横向偏倚分别为
$$\xi_{cr}=\xi_c+E[\xi_r],\quad \zeta_{cr}=\zeta_c+E[\zeta_r]. \tag{2.2}$$

如果进行了同一批次的 n 次试验，落点为 (x_1, z_1)，…，(x_n, z_n)，记
$$\Delta X_i=X_i-x_0,\qquad \overline{\Delta X}=\frac{1}{n}\sum_1^n\Delta X_i$$
$$\Delta Z_i=Z_i-z_0,\qquad \overline{\Delta Z}=\frac{1}{n}\sum_1^n\Delta Z_i$$

由于落点服从圆散布，因此 $\sigma_x=\sigma_z\triangleq\sigma$，引入相对坐标，记
$$\Delta X_i'=\Delta X_i/\sigma,\quad \Delta Z_i'=\Delta Z_i/\sigma,$$
$$\overline{\Delta X}'=\frac{1}{n}\sum_1^n\Delta X_i,\qquad \overline{\Delta Z}'=\frac{1}{n}\sum_1^n\Delta Z_i$$
且记
$$S^2=(\overline{\Delta X}')^2+(\overline{\Delta Z}')^2, \tag{2.3}$$
则可算得
$$\begin{cases}E[S^2]=A^2+\dfrac{2}{n},\\ D[S^2]=\dfrac{4}{n^2}(1+nA^2)\end{cases} \tag{2.4}$$
式中，
$$A^2=\frac{1}{\sigma^2}(\xi_{cr}^2+\zeta_{cr}^2)\triangleq r_{cr}^2/\sigma^2 \tag{2.5}$$
由此可知，S^2的大小可用来作为描述散布中心离开瞄准点的偏移，且当n甚大时，$E[S^2]\cong A^2$，n 较小时，我们运用小子样统计推断方法，给出 r_{cr}^2的估计及假设检验方法。

这里，先讨论系统性偏差的检验问题。对于武器系统的落点系统偏差，不能认为 r_{cr}^2 是零该产品才算是合格的，即是说，所引入的统计假设不能是 H_0：$r_{cr}^2=0$。从战术技术的要求出发，我们可以确定出一个 r_{cr}^*，称它为系统偏差的容许限。为此，要建立的假设检验准则是设计一个检验方案，以判定系统偏差是否超出了容许限。

下面首先对于容许限 r_{cr}^*作点必要的说明。以某武器系统打击点目标的情况为例。以点目标为心，毁伤半径 R 为圆作诱导圆，那么落点位于诱导圆内的概率即为毁伤该点目标的概率。记它为 P_{cr}. 于是
$$\begin{aligned}P_{cr}&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{C_R:x^2+z^2\leq R^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\xi_{cr})^2+(z-\zeta_{cr}{}^2]\right\}dxdz\\&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{A^2}{2}}\int_0^K\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}2\pi I_0(A\rho)d\,\rho\end{aligned} \tag{2.6}$$
式中，$I_0(A\rho)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-A\rho\cos(\theta-\phi)}d\theta$,

$\phi=\operatorname{arctg}\dfrac{\zeta_{cr}}{\xi_{cr}}$，$I_0(A\rho)$为零阶虚变量 Bassel 函数，(2.6)式中的 $K=R/\sigma$，记
$$P_{cr}=P(K,A)=P(R/\sigma,r_{cr}/\sigma)=e^{-\frac{A^2}{2}}\int_0^K\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}I_0(A\rho)d\rho$$
式中，$r_{cr}=(\xi_{cr}+\zeta_{cr})^{1/2}$，$P(R/\sigma,r_{cr}/\sigma)$的数值表见文献[4].

如果 $\xi_{Cr}=\zeta_{Cr}=0$，即散布中心和瞄准点重合。则

$$P(K,0) = P(R/\sigma,0), = \int_0^K \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho = 1 - e^{-\frac{K^2}{2}} \tag{2.7}$$

于是，定义落点存在系统偏差时相对毁伤概率减小量为

$$\varepsilon = \frac{P(R/\sigma,0) - P(R/\sigma,r_{Cr}/\sigma)}{P(R/\sigma,0)}$$

记 ε^* 为相对毁伤概率减少的容许限，则由（2. 7）可获得相应的 r_{Cr}/σ 或者 A 值，记此 A 值为 A^*. 为了建立起评定系统偏差的准则，引入下列统计假设

$$H_0: A = A^* \longleftrightarrow H_1: A = sA^*, \quad s > 1,$$

或者

$$H_0: A^2 = A^{*2} \longleftrightarrow H_1: A^2 = s^2 A^{*2}, s > 1.$$

此处 $A^2=\frac{1}{\sigma^2}$ $(C_x^2+C_z^2)$。这里我们用 C_x 表示落点纵向系统误差，在同一批次试验时，$C_x=\xi_C+\zeta_r$，对于多批次的试验，$C_x=\xi_C+E$ $[\zeta_r]$，C_z 的意义相同。

对于同一状态的 n 次试验，有 n 个落点偏差 ΔX_i，ΔZ_i，$i=1$，…，n.

$$\Delta X_i = \xi_i + C_x, \qquad \Delta X_i = \zeta_i + C_z \quad 记$$

$$r_i = [(\Delta X_i)^2 + (\Delta X_i)^2]^{1/2}, i = 1,\cdots,n$$

用 r_i 作为样本，较之仅应用纵向或横向的落点偏差，具有较多的信息量。

检验落点的系统偏差时，仅以少量试验（n 甚小时）要去评定 A，此时所冒风险比较大（效函数将不是良好的）。因此，我们希望充分运用历次试验的信息（验前信息）。为此，注意到在最终 n 次试验之前，有两个阶段的信息应予利用：

（1）仿真信息。通过飞行器地面试验的信息以及历次飞行试验中获取的主要干扰源的信息（统计信息），由仿真方法获得的（验前）落点样本信息，记作 $r_1^{(0)}$，…，$r_{n_0}^{(0)}$；

（2）非全程试验的信息。例如特殊形式的飞行轨道试验的信息，将它转换至全程飞行试验的落点信息，记作 $r_1^{(1)}$，…，$r_{n_1}^{(1)}$.

为了运用这些信息，我们将给出 Bayes 验后的加权概率比检验方法，这个方法的特点是需要确定出验前概率 P (H_0). 为此，我们讨论如何利用上述两个阶段的信息，而使这些信息最终能给出 P (H_0) 的值。

在第一阶段之后，我们总可以计算出验后概率 P $(H_0/X^{(0)})$，这里 $X^{(0)}=$ $(r_1^{(0)}$，…，$r_{n_0}^{(0)})$（具体方法参见文献［1］、［2］）。于是在第二阶段的信息获取之后，可以计算出 H_0 被采纳的概率 P $(H_0/r_1^{(1)}$，…，$r_{n_1}^{(1)})$，它可表示为

$$P(H_0/r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}) = \frac{P_{H_0} \cdot P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}/H_0)}{P_{H_0}P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}/H_0) + (1-P_{H_0})P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}/H_1)}$$

式中 P $(H_0/X^{(0)})$ 用作第二阶段试验前概率 P (H_0)。而 P $(r_1^{(1)}$，…，$r_{n_1}^{(1)}/H_i)$ $(i=0,$ $1)$ 为似然函数，它的计算，只需注意

$$r_i = \sqrt{(\Delta X_i)^2 + (\Delta Z_i)^2}$$

其中 $\Delta X_i \sim N$ $(C_x$，$\sigma^2)$，$\Delta Z_i \sim N$ $(C_z$，$\sigma^2)$. 这样，$r_i^2/\sigma^2 \sim \chi_2^2$ (λ)，$i=1$，…，n.
即是说 r_1^2/σ^2 为具有 2 个自由度的非中心 χ^2 变量，非中心参数

$$\lambda = (C_x/\sigma)^2 + (C_z/\sigma)^2 = \frac{1}{\sigma^2}(C_x^2 + C_z^2)$$

对于非中心 χ^2 分布来说，写出它的似然函数 $P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}/H_i)$ 是十分复杂的，而且不便于计算。为此，我们采用追近计算方法。注意到非中心 χ^2 变量 $\chi_2^2(\lambda)$ 可用 $\rho\chi_{\nu^*}^2$ 来迫近[4]。这里 $\chi_{\nu^*}^2$ 为中心 χ^2 变量。因此，$\chi_2^2(\lambda)/\rho$ 近似于中心 $\chi_{\nu^*}^2$ 变量，此处

$$\begin{cases}\rho = 1 + \dfrac{\lambda}{2+\lambda}, \\ \nu^* = 2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^2}{1+\lambda}\end{cases}$$

这样 $\frac{r_i^2}{\sigma^2}/\rho$ 近似于中心 $\chi_{\nu^*}^2$ 变量，于是 $r_i^2/(\rho\sigma^2)$ 的概率密度函数为 $k_{\nu^*}(x)$，或者 r_i^2 的密度函数为 $\rho\sigma^2 k_{\nu^*}(\rho\sigma_x^2)$。因此 r_i^2 的密度函数为 $2x\rho\sigma^2 k_{\nu^*}(\rho\sigma_x^2)$.

记 r_i 的密度函数为 $p(r_i)$，于是可知

$$p(r_i) = \frac{\sigma^{2+\nu^*}\rho^{\frac{\nu^*}{2}+1}}{2^{\frac{\nu^*}{2}-1}\Gamma(\nu^*/2)} r_i^{\nu^*+1} e^{-\frac{\rho\sigma^2}{2}r_i^2}, \qquad r_i \geqslant 0$$

在 H_0 为真时，(即 $A=A^*$ 时)，$\lambda=A^{*2}$，此时

$$\begin{cases}\rho = 1 + \dfrac{A^{*2}}{2+A^{*2}} \triangleq \rho_0 \\ \nu^* = 2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{A^{*4}}{1+A^{*2}} \triangleq \nu_0^*\end{cases}$$

当 H_1 为真时，$\lambda=S^2A^{*2}$，此时

$$\begin{cases}\rho = 1 + \dfrac{S^2A^{*2}}{2+S^2A^{*2}} \triangleq \rho_1 \\ \nu^* = 2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{S^4A^{*4}}{1+S^2A^{*2}} \triangleq \nu_1^*\end{cases}$$

于是

$$P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}|H_i) = \prod_{j=1}^{n_1}\frac{\rho_i^{\frac{\nu_i^*}{2}+1}\sigma^{2+\nu_i^*}}{2^{\frac{\nu_i^*}{2}-1}\Gamma(\nu_i^*/2)} r_j^{\nu_j^*+1} e^{-\frac{\rho_i}{2}\sigma^2 r_j^2}$$

$$= \left[\frac{\sigma^{2+\nu_i^*}\rho^{\frac{\nu_i^*}{2}+1}}{2^{\frac{\nu_i^*}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu_i^*}{2}\right)}\right]^{n_1}(r_1,\cdots,r_{n_1})^{\nu_i^*+1} e^{-\frac{\rho_i\sigma^2}{2}\sum_{j=1}^{n_1}r_j^2} \qquad i=0,1$$

因此，第二阶段后 H_0 的验后概率为

$$P(H_0/r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}) = \frac{1}{1 + \dfrac{1-P_{H_0}}{P_{H_0}}\cdot\dfrac{P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}|H_1)}{P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}|H_0)}} \tag{2.8}$$

其中

$$\frac{P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}|H_1)}{P(r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)}|H_0)}$$

$$= \left(\frac{\sigma^{\nu_1^*}\rho^{\frac{\nu_1^*}{2}+1}}{\sigma^{\nu_0^*}\rho^{\frac{\nu_0^*}{2}+1}}\right)^{n_1}\left(\frac{2^{\frac{\nu_0^*}{2}}\Gamma(\nu_0^*/2)}{2^{\frac{\nu_1^*}{2}}\Gamma(\nu_1^*/2)}\right)^{n_1}(r_1^{(1)}\cdots r_{n_1}^{(1)})^{\nu_1^*-\nu_0^*} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\rho_1-\rho_0)\sum_1^{n_1}r_i^{(1)^2}} \tag{2.9}$$

下面给出检验方案。Bayes 验后加权概率比检验方法只要计算 $P(H_0/X)\triangleq\alpha_0$ 及 $P(H_0/X)\triangleq\alpha_1$，此处 $X=(r_1,\cdots,r_n)$. 则当 $\alpha_0>\alpha_1$ 即 $P(X/H_0)P_{H_0}>P(X/H_1)P_{H_1}$时，采纳假设 H_0；否则采纳 H_1. 这里 P_{H_0}是子样 X 获取前 H_0 的验前概率。它可以取（2.8）式的 $P(H_0/r_1^{(1)},\cdots,r_{n_1}^{(1)})$ 作为验前概率，而 $P_{H_1}=1-P_{H_0}$. 于是，按前面的计算，易知检验方案为：当

$$\left[\frac{\sigma^{\nu_1^*}\rho^{\frac{\nu_1^*}{2}+1}}{\sigma^{\nu_0^*}\rho^{\frac{\nu_0^*}{2}+1}}\right]^n\cdot\left[\frac{2^{\frac{\nu_0^*}{2}}\Gamma(\nu_0^*/2)}{2^{\frac{\nu_1^*}{2}}\Gamma(\nu_1^*/2)}\right]^n(r_1\cdots r_{n_1})^{\nu_1^*-\nu_0^*}e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\rho_1-\rho_0)\sum_1^n r_i^2}$$

$$<\frac{P_{H_0}}{1-P_{H_0}}\tag{2.10}$$

时，则采纳假设 H_0；否则，则采纳假设 H_1。

此时，犯第一类错误的概率为：　$\alpha=P$｛拒绝 H_0/H_1｝$\cdot P_{H_0}$，

　　犯第二类错误的概率为：　$\beta=P$｛拒绝 H_0/H_1｝$\cdot P_{H_1}$

或者，

$$\alpha=P\{X\in\mathscr{D}/H_0\}\cdot P_{H_0}\tag{2.11}$$

式中 $X=(r_1,\cdots,r_n)$，$\mathscr{D}$ 为检验的临界区域，即

$$\mathscr{D}=\left\{X:\left[\frac{\sigma^{\nu_1^*}\rho_1^{\frac{\nu_1^*}{2}+1}}{\sigma^{\nu_0^*}\rho_0^{\frac{\nu_0^*}{2}+1}}\right]^n\left[\frac{2^{\frac{\nu_0^*}{2}}\Gamma(\nu_0^*/2)}{2^{\frac{\nu_1^*}{2}}\Gamma(\nu_1^*/2)}\right]^n(r_1\cdots r_n)^{\nu_1^*-\nu_0^*}e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\rho_1-\rho_0)\sum_{i=1}^n r_i^2}\right.$$

$$\left.\geqslant\frac{P_{H_0}}{1-P_{H_0}}\right\}$$

而

$$\beta=P\{X\overline{\in}\mathscr{D}/H_1\}\cdot P_{H_1}\tag{2.12}$$

要用显式去表示出 α，β 是困难的。实用中，我们可以用随机模拟（Monte-Carlo）的方法去给出 α，β 的近似值。或者，去确定出 α 和 β 的上界。事实上，注意到当 H_0 为真时，$X=(r_1,\cdots,r_n)$ 的概率密度函数为

$$K_0(r_1\cdots r_n)^{\nu_0^*+1}e^{-\frac{\rho_0}{2}(\sigma^2)\sum_{i=1}^n r_i^2}$$

此处 K_0 是分布常数，它为

$$K_0=\left[\frac{\rho_0^{\frac{\nu_0^*}{2}+1}\sigma^{2+\nu_0^*}}{2^{\nu_0^*/2-1}\Gamma(\nu_0^*/2)}\right]^n$$

因此

$$\alpha=P_{H_0}\int\underset{\mathscr{D}}{\cdots}\int K_0(r_1\cdots r_n)^{\nu_0^*+1}e^{-\frac{\rho_0}{2}\sigma^2\sum_{i=1}^n r_i^2}dr_1\cdots dr_n$$

$$<P_{H_0}\cdot\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty}K_0(r_1\cdots r_n)^{\nu_0^*+1}e^{-\frac{\rho_0}{2}\sigma^2\sum_{i=1}^n r_i^2}dr_1\cdots dr_n$$

$$=P_{H_0}\cdot K_0\cdot\prod_{i=1}^n\left(\int_0^{+\infty}r_i^{\nu_0^*+1}e^{-\frac{\rho_0}{2}\sigma^2 r_i^2}dr_i\right)$$

为此，只需计算上式中之积分。记此积分为 I_0，则

$$I_0=\int_0^{+\infty} r_i^{\nu_0^*+1}e^{-\frac{\rho_0}{2}\sigma^2 r_i^2}dr_i=\int_0^{+\infty} r_i^{C_0^*}\ e^{-d_0 r_i^2}dr_i$$

其中 $C_0^*=r_0^*+1$，$d_0=\frac{\rho_0\sigma^2}{2}$. 在上述积中，作变换$\sqrt{d_0}r_i=\sqrt{t_i}$，于是容易算得

$$I_0=\frac{\Gamma\left(\frac{C_0^*}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2d^{\frac{1}{2}(C_0^*+1)}} \tag{2.13}$$

因此,可得 $\alpha<K_0P_{H_0}\cdot I_0^n$ (2.14)

同理,可以得到 $\beta<K_1P_{H_1}\cdot I_1^n$ (2.15)

其中 K_1 只需把 K_0 表示中,具有足码为"0"的量改写为足码"1"就可以了。而

$$I_1=\Gamma\left(\frac{C_1^*}{2}+\frac{1}{2}\right)/[2d_1^{\frac{1}{2}(C_1^*+1)}] \tag{2.16}$$

其中 $C_1^*=\nu_1^*+1, d_1=\frac{\rho_1\sigma^2}{2}$

3 落点准确度的估计与 Bayes 约束估计

首先给出落点准确度的估计。由于试验数小,因此运用 Bayes 估计方法。这种方法属于正态总体期望值的估计,这是众所周知的[2]。为便于应用,我们直接写出有关结果。下面给出纵向(或横向)落点系统偏差的 Bayes 估计。

设落点偏差随机变量 $\Delta X\sim N(C_x,\sigma^2)$,且假定 σ^2 为已知,设 C_x 的验前密度属于 $N(\mu_0,\sigma^2)$,则在获得子样$(\Delta X_1,\cdots,\Delta X_n)$之后,$C_x$ 的验后密度为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,这里

$$\mu_1=\frac{\sigma^2\mu_0+n\sigma_0^2\overline{\Delta X}_n}{\sigma^2+n\sigma_0^2} \tag{3.1}$$

$$\sigma_1^2=\frac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2+n\sigma_0^2} \tag{3.2}$$

其中，$\overline{\Delta X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta X_i$. 因此，给定（$\Delta X_1$，…，$\Delta X_n$）之后，$C_x$ 的条件期望（即 Bayes 估计）就是 μ_1.

如果 σ^2 为未知，记 $\tau=1/\sigma^2$，称 τ 为精度（precision），(C_x，τ) 的联合密度可给出如下：对于任意给定的 τ，C_x 的条件密度为 N（μ_1，$\lambda_0\tau$），$\lambda_0\tau$ 为精确度，($-\infty<\mu_0<+\infty$，$\lambda_0>0$)。而 τ 的边缘密度为 Gamma 密度函数 G（τ；α_0，β_0），即 τ 的边缘密度函数为 $\pi(\tau)=G(\tau;\alpha_0,\beta_0)$：

$$G(\tau;\alpha_0,\beta_0)=\begin{cases}\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\tau^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0\tau}, 0<\tau<\infty, \\ 0, \quad \text{其他处}\end{cases}$$

其中 α_0，β_0 为分布参数，$\alpha_0>0$，$\beta_0>0$，这样（C_x，τ）的联合验前密度为 Gauss-Gamma 的密度函数。当给定（ΔX_1，…，ΔX_n）时，可以算得 C_x 的 Bayes 估计为

$$\hat{C}_x=\frac{\lambda_0\mu_0+n\overline{\Delta X}_n}{\lambda_0+n} \tag{3.3}$$

我们知道，如果验前已获得了 N 个落点偏差信息（$\Delta X^{(0)}$，…，$\Delta_N^{(0)}$），则可取 $\mu_0=\overline{\Delta X}_N^{(0)}$，而 $\lambda_0\tau=\lambda_0\dfrac{1}{\sigma^2}=\dfrac{N}{\sigma^2}$，即 $\lambda_0=N$. 由此可知，C_x 的 Bayes 估计为$\overline{\Delta X}_N^{(0)}$ 与当前均值$\overline{\Delta X}_n$ 的加权平均。

现在讨论落点系统偏差具有约束时的 Bayes 估计方法。仍分两种情况：

（1）当 σ^2 为已知时

设落点偏差随机变量 $\Delta X\sim N$（C_x，σ^2）。对于 C_x 的验前分布。讨论两种情况：$\pi(C_x)\propto 1$，$|C_x|<C$；$\pi(C_x)\sim$截尾 $N(C_0, \sigma_0^2)$，$|C_x-C_0|<d$。

在 $\pi(C_x)\propto 1$，$|C_x|<C$ 的场合，记 $\Delta X=(\Delta X_1, \cdots, \Delta X_n)$，当给定 ΔX 时，C_x 的验后密度为

$$\begin{aligned}\pi(C_x|\Delta X) &= \pi(C_x|T(\Delta X)) \\ &= p(T(\Delta X)|C_x)\Big/\int_{-C}^{C} p(T(\Delta X)|C_x)dC_x\end{aligned}$$

其中 $T(\Delta X)=\dfrac{1}{n}\sum_1^n \Delta X_i=\Delta\overline{X}_n$ 为 C_x 的充分统计量。

经过计算，可得 C_x 的 Bayes 估计为

$$C_x=\frac{\sigma}{K(n,c,t)\sqrt{2\pi n}}\left[e^{-\frac{(C+t)^2}{2\sigma^2/n}}-e^{-\frac{(C-t)^2}{2\sigma^2/n}}\right]+t \tag{3.4}$$

式中 $t=\overline{\Delta X}_n, K(n,c,t)=\Phi\left(\dfrac{C-t}{\sigma/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\dfrac{-C-t}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)dt$

下面讨论当 C_x 具有约束 $|C_x-C_0|<d$,且 C_x 的验前密度具有如下形式

$$\pi(C_x)=\frac{1}{K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(C_x-C_0)^2}$$

时的系统误差的估计,其中 $K=2\Phi(d/\sigma_0)-1$

此时

$$\pi(C_x|T(\Delta X)=t)=\frac{p(t/C_x)\pi(C_x)}{\displaystyle\int_{|C_x-C_0|<d}p(t/C_x)\pi(C_x)dC_x} \tag{3.5}$$

其中

$$p(t|C_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/\sqrt{n})}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(t-C_x)^2\right]$$

经过计算,我们有

$$\hat{C}_x=\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(C_0-d-\mu_1)^2}-e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(C_0+d-\mu_1)^2}}{\Phi\left(\dfrac{C_0+d-\mu_1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(\dfrac{C_0-d-\mu_1}{\sigma_1}\right)} \tag{3.6}$$

式中 $\mu_1=\dfrac{\sigma^2C_0+n\sigma_0^2t}{\sigma^2+n\sigma_0^2}$，　$\sigma_1^2=\dfrac{\sigma^2\sigma_0^2}{\sigma^2+n\sigma_0^2}$

(2)当 σ^2 为未知时

此时，$\overline{\Delta X}_n$将不再是 C_x 的充分统计量，而（C_x，σ^2）的联合充分统计量为（$\overline{\Delta X}_n$，

S_n^2)，此处$\overline{\Delta X_n}=\frac{1}{n}\sum_1^n \Delta X_i$，$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_1^n (\Delta X_i-\overline{\Delta X_n})^2$. 我们先考虑 C_x 的验前密度 $\pi(C_x)\propto 1$，$|C_x|<C$，而 $\pi(D)\propto 1/D$ 时的 Bayes 估计方法。记 $\Theta=(C_x, \sigma^2)$ 为未知参数。

$T(\Delta X)=(\overline{\Delta X_n}, S_n^2)=(t_1, t_2)$，则 Θ 的验后密度为

$$\pi(\Theta/T(\Delta X))=\frac{\pi(\Theta)p(t_1,t_2)|\Theta)}{\int_\Omega \pi(\Theta)p(t_1,t_2|\Theta)d\Theta} \tag{3.7}$$

其中 $\Omega=\{(C_x, D): |C_x'|<C, D>0\}$，$D=\sigma^2$，式中 $\pi(\Theta)$ 取作
$\pi(\Theta)=\pi(C_x, D)\propto 1/D$，$|C_x|<C$，$D>0$，于是

$$\pi(\Theta|T(\Delta X))=\frac{1}{D}p(t_1,t_2|\Theta)\Big/\int_0^{+\infty}\int_{-C}^{C}\frac{1}{D}p(t_1,t_2/C_x,D)dC_x dD \tag{3.8}$$

经过比较冗长的计算，可得 C_x 的 Bayes 估计为

$$\hat{C}_x=t_1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{t_2^{\frac{n-1}{2}}}{S_{n-1}\left(\sqrt{n-1}\cdot\frac{t_1+C}{\sqrt{t_2}}\right)-S_{n-1}\left(\sqrt{n-1}\cdot\frac{t_1-C}{\sqrt{t_2}}\right)}$$

$$\frac{1}{n-2}\left\{[(t_1+C)^2+t_2]^{-\frac{n}{2}+1}-[(t_1-C)^2+t_2]^{-\frac{n}{2}+1}\right\} \tag{3.9}$$

其中 $S_{n-1}(\cdot)$ 是具有 $n-1$ 个自由度的学生氏分布函数。

我们还有下列结果：如果 (C_x, D) 具有下列形式的验前密度函数

$$\pi(C_x,D)\propto D^{-\left(\frac{n_0}{2}+1\right)}e^{-\frac{n_0}{2D}[(C_x-\alpha_0)^2+\beta_0]},$$
$$|C_x|<C,D>0 \tag{3.10}$$

其中 n_0，α_0，β_0 为分布参数，则在获得子样 ΔX 之后，(C_x, D) 的验后密度 $\pi(C_x, D|\Delta X)$ 仍具有（3. 10）的形式（当然分布参数不同），即验前分布密度（3. 10）是共轭分布。

由此可知，在以（3. 10）为 (C_x, D) 的联合验前分布时，其验后密度由下式给出：

$$\pi(C_x,D|T(\Delta X))\propto D^{-\left(\frac{n_1}{2}+1\right)}e^{-\frac{n_1}{2D}[(C_x-\alpha_1)^2+\beta_1]} \tag{3.11}$$

式中，　$n_1=n_0+n$，$\alpha_1=\frac{n_0\alpha_0+nt_1}{n_0+n}$，$\beta_1=\frac{n_0(\alpha_0^2+\beta_0)+n(t_1^2+t_2)}{n_0+n}-\alpha_1^2$

它属于共轭验前分布族。此时，C_x 的 Bayes 估计，只需在（3. 9）中，将 n_1 代替 n，α_1 代替 t_1，β_1 代替 t_2 就可以了。

示例　设有某再入飞行器，纵向落点偏差 $\Delta X\sim N(C_x, D)$，其中 C_x，D 均为未知。经过对落点偏差的期望值进行分析，认为$|C_x|<200$ (m) 且取 $\pi(C_x, D)\propto 1/D$，$D>0$，$|C_x|<200$。今在 8 次飞行试验中，算得$\overline{\Delta X_8}=150$ (m)，$S_8^2=(400)^2=16000$ (m)^2，此时按公式（3. 15），可算得 C_x 的 Bayes 估计为 $\hat{C}_x=150-1.244=148.76$ (m)。从这里看出，当前落点偏差的样本均值$\overline{\Delta X_8}$在 Bayes 估计中起主要作用，而验前信息对 $\hat{C}_x$ 所作的“贡献”是微小的。

如果加强验前信息。例如，取

$$n_0 = 20, \alpha_0 = 100(\text{m}), \beta_0 = 400(\text{m}^2)$$

仍取当前样本容量 $n=8$，样本信息中，$t_1=\overline{\Delta X_8}=150$ (m)，而 $S_8^2=400$ (m^2)，此时所获得的 C_x 的 Bayes 估计为

$$\hat{C}_x = 114.28 - 1.68 = 112.8(\text{m})$$

这里看出，验前信息的作用是明显的。

在 C_x 的 Bayes 估计中，约束 $|C_x|<C$ 或者 $|C_x-C_0|<d$ 对 Bayes 估计的作用反映在公式（3. 4），（3. 6）及（3. 9）之中。如果 C（或 d）$\to+\infty$，它等价于 C_x 没有不等式约束的情况，此时（3. 4）式成为 $\hat{C}_x=t=\overline{\Delta X_n}$；（3. 6）式成为 $\hat{C}_x=\mu_1$，（3. 9）式成为 $\hat{C}_x=t_1$. 这是我们可以预料的结果。

参 考 文 献

1 张金槐. 落点精度鉴定中验前概率的计算. 飞行器测控技术，1990，(2)

2 张金槐，唐雪梅编著. Bayes 方法. 国防科技大学出版社，1989

3 张金槐等. 飞行器试验统计学（上册）. 国防科技大学出版，1982

4 Rand Cooperation. Circular Covering function. RM－330

Statistical Analysis of Accuracy of the Fall Point for Reentry Vihicle

Zhang Jinhuai

(Department of Automatic Control)

Abstract

In this paper, the detection and estimation of the fall point for reentry vehicle is studied. In the first, we introduce the concept of addmissible accuracy limit and then give the Bayesian posteori probability ratio odd testing method. For the systematic error of fall point, the Bayesian and constraint Bayesian estimation are discussed. The attention for using prior information is sufficiently mentioned so that the decision making of fall point can be carried out under the condition of small sample number.

Key words accuracy and dispersion of random fall point, Bayesian test and estimation