国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第4期 1993年12月 Vol. 15 No. 4

关于二人零和对策混合鞍点的一个新的理论和算法*

马绪荣
（系统工程与数学系）

摘　要　本文提出了向量优超的概念，给出了二人零和对策等价的定义，得到了二人零和对策等价的两个充要条件及三个充分条件并应用本文的理论，给出了二人零和对策混合鞍点的一个新算法。

关键词　对策，混合鞍点，优超，等价对策，混合策略
分类号　O225

1　介绍与引理

定义 1.1　设 $X=\{x\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ x_i\geqslant 0\}$，$Y=\{y\mid y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T,\ \sum_{i=1}^{n}y_i=1,\ y_i\geqslant 0\}$，则称 X,Y 分别是对策 A 中局中人 I 和 II 的混合策略集。若有混合策略对 (x^*,y^*) 使得对于任意 $x\in X$ 和任意 $y\in Y$ 都有

$$xAy^*\leqslant x^*Ay^*\leqslant x^*Ay$$

则称 (x^*,y^*) 是对策 A 的一个最优混合策略，x^*Ay^* 称为 A 的一个混合鞍点。

引理 1.1　设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵，v、$\tilde{y}$、$\tilde{x}$ 分别是线性规划

$$\max(y_1+y_2+\cdots+y_n),\quad \text{s.t}\begin{cases}Ay\leqslant 1\\ y_i\geqslant 0.\end{cases}$$

及其对偶规划的最优值和最优解，则 xAy 是 A 的混合鞍点的充要条件是：

$$v=xAy,x=\frac{1}{v}\tilde{x},y=\frac{1}{v}\tilde{y}$$

一般上求对策的混合鞍点就是求对应线性规划的最优值。然而，由于对策论的特殊性，采用线性规划法效率就可能很低。因此有必要对此进行改进。本文在这方面做了一些尝试。

2　主要结果

定义 2.1　设 A、B 是两个对策，(x,y)、(u,v) 分别是 A、B 的最优混合策略，如果

* 1993年5月16日收稿

$$xAy = uBv$$

则称对策 A 与对策 B 是等价的，简记为 $A \sim B$.

上面定义的等价关系具有下列性质。

(1) $A \sim B$.

(2) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$.

(3) 若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$.

定义 2.2 设 B 是 A 的子矩阵，$A \neq B$. 若 $A \sim B$，则称 A 是可约的。

定理 2.1 对策 A 是可约的充要条件是存在 A 的一个最优策略对(x,y)使得：

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = 0 \qquad \text{或} \prod_{j=1}^{n} y_j = 0 \tag{1}$$

证明 必要性。假设 B 是 A 的一个子矩阵且 $A \sim B(A \neq B)$. 不妨设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

又设(u,v)是 B 的一个最优混合策略对考虑 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，其中

$$x_i = \begin{cases} u_i, i \leqslant m'. \\ 0, \text{其余}. \end{cases} (i = 1,2,\cdots,m); y_i = \begin{cases} v_j, j \leqslant n'. \\ 0, \text{其余}. \end{cases} (j = 1,2,\cdots,n).$$

m'、n'分别是 B 的行数和列数，于是，

$$xAy = (u \quad 0)\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = uBv$$

从而由等价的定义知(x,y)是 A 的一个最优混合策略对，显然 x 和 y 中至少有一个满足(1)式。

充分性显然。

定义 2.3 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_b)$如果

$$\alpha_i \geqslant \beta_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

则称向量 α 优超于向量 β，记为 $\alpha \geqslant \beta$.

定理 2.2 设 $A=(B \quad C)$，其中 B 是 $m \times n'$矩阵，记 $E=\left\{\alpha \mid \alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n'})^T,\ \sum_{i=1}^{n'}\alpha_i=1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n'\right\}$，$\gamma$ 是 C 的任一列向量，如果存在 $\alpha \in E$ 使得

$$\gamma \geqslant B\alpha$$

则 $A \sim B$.

证明 考虑下列线性规划

$$v_1 = \min(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$$

$$\text{I})\text{s.t} \begin{cases} xA \geqslant e, \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

$$v_2 = \min(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$$

$$\text{II})\text{s.t} \begin{cases} xB \geqslant e, \\ xi \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

其中 $e=(1,1,\cdots,1)_{1\times n}$.

设 x 是 Ⅰ）的可行解，则 x 必是 Ⅱ）的可行解，于是知：

$$v_1 \geqslant v_2 \tag{2}$$

又设 x^* 是 Ⅱ）的可行解，则 $x^*B\geqslant e$. 于是对于任意向量 $\alpha\in E$ 都有

$$x^*B\alpha \geqslant 1 \tag{3}$$

又设 γ 是 C 的任一列向量，则由定理条件知存在 $\beta\in E$ 使得：$\gamma\geqslant B\beta$.

从而 $x^*\gamma\geqslant x^*B\beta\geqslant 1$. 于是 x^* 也是 Ⅰ）的可行解，因而又有

$$v_2 \geqslant v_1 \tag{4}$$

由(2)和(4)知 $v_1=v_2$. 故 $A\sim B$.

定理 2.3 设 $A=\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$，$B$ 是 $m'\times n$ 矩阵，记 $E=\{\alpha\,|\,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m'})$，$\sum_{i=1}^{m'}\alpha_i=1$，$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m'\}$，$\gamma$ 是 C 的任一行向量，如果存在 $\alpha\in E$ 使得：$\gamma\leqslant\alpha B$ 则 $A\sim B$.

证明方法与定理 2.2 的证明方法类似，此略。

定理 2.4 设

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

B 是 $m'\times n'$ 矩阵，记 $F=\{\alpha\,|\,\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m'})$，$\sum_{i=1}^{m'}\alpha_i=1$，$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m'\}$，$G=\{\beta\,|\,\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n'})^T$，$\sum_{j=1}^{n'}\beta_j=1$，$\beta_j\geqslant 0$，$j=1,2,\cdots,n'\}$. 如果（$i$）对于 C 中任一列向量 S，都有 $\beta\in G$，使得 $S\geqslant B\beta$.

（ii）对于 D 中任一行向量 T，都有 $\alpha\in F$，使得 $T\leqslant\alpha B$. 则 $A\sim B$.

证明 由定理 2.2 及定理 2.3 知

$$B\sim A_1=(B \quad C);\quad B\sim A_2=\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

为证 $A\sim B$，考虑下列线性规划

$$v_1=\max(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

$$\text{Ⅰ)s.t}\begin{cases} Ay\leqslant e \\ y_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

$$v_2=\max(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

$$\text{Ⅱ)s.t}\begin{cases} A_1y\leqslant e \\ y_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

$$v_3=\min(x_1+x_2+\cdots+x_m)$$

$$\text{Ⅲ)s.t}\begin{cases} xA_2\leqslant e_1 \\ x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

其中 $e=(1,1,\cdots,1)^T_{1\times n}$，$e_1=(1,1,\cdots,1)_{1\times m}$

由于 Ⅰ）的可行解都是 Ⅱ）的可行解，故

$$v_1 \leqslant v_2 \tag{5}$$

考虑 I ）的对偶规划及 II ）同理可得

$$v_1 \geqslant v_3 \tag{6}$$

又由等价关系的性质 3 知

$$v_2 = v_3 \tag{7}$$

故由(5)、(6)及(7)知

$$v_1 = v_2 = v_3$$

于是 $A \sim B$.

推论 2.1 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

如果：

(i) 对 C 的任一列向量 α，都有 B 中某一列向量 β 使得 $\alpha \geqslant \beta$.

(ii) 对 D 中任一行向量 S，都有 B 中某一列向量 T 使得 $T \geqslant S$，

则 $A \sim B$.

推论 2.2 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

且 B 满足定理 2.4 的条件，又设 $a_{i^*j^*}$ 是 A 中第 i^* 行的最小元($i^* \leqslant m'$)，a_{kl}是 A 中第 l 列的最大元($l \leqslant n'$)(B 是 $m' \times n'$ 矩阵)，则必存在 $h \leqslant n'$，$g \leqslant m'$ 使得：

$$a_{i^*j^*} = a_{i^*h}, a_{kl} = a_{gl}.$$

证明 不妨设对于任意 j 都有

$$a_{i^*j} > a_{i^*j^*}, j \leqslant n'.$$

考虑向量 $C_{j^*} = (a_{1j^*}, a_{2j^*}, \cdots, a_{m'j^*})^T$，由定理 2.4 的条件知，存在 $\beta \in G$ 使得

$$C_{j^*} \geqslant B\beta$$

即

$$a_{ij^*} \geqslant \sum_{j=1}^{n'} \beta_j a_{ij}$$

从而

$$a_{i^*j^*} \geqslant \sum_{j=1}^{n'} \beta_j a_{i^*j} > a_{i^*j^*} \sum_{j=1}^{n'} \beta_j = a_{i^*j^*}$$

矛盾。

同理可证另一个。

定理 2.5 设

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

(x^*, y^*)是 B 的最优策略对，$v = x^* B y^*$，则 $A \sim B$ 的充要条件是

(i) 对于 D 中任一行向量 α，都有 $\alpha y^* \leqslant v$；

(ii) 对于 C 中任一列向量 β，都有 $x^* \beta \geqslant v$.

证明 必要性。令 $\tilde{x} = (x^*, 0)$，$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix}$. 由于 $A \sim B$，因此$(\tilde{x}, \tilde{y})$是 A 的一个最优

策略对，于是由最优策略的性质

$$xA\tilde{y} \leqslant \tilde{x}A\tilde{y} \leqslant \tilde{x}Ay$$

知，对 α 对应于 A 的行向量 $\alpha' = (\alpha\ \alpha_E)$ 有

$$v \geqslant \alpha'\tilde{y} = (\alpha\ \alpha_E)\begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha y^*$$

同理可证　　$v \leqslant x^*\beta$.

充分性。设 (x', y') 是 A 的最优策略，$v_1 = x'Ay'$ 则

$$xAy' \leqslant v_1 \leqslant x'Ay; \quad uBy^* \leqslant v \leqslant x^*Bv$$

从而

$$v_1 \leqslant x'A\begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} y^* = (x_1'\quad x_2')\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} y^* = x_1'By^* + x_2'Dy^*$$

记 $r = \sum_{x_i \in x_2'} x_i$，则 $\frac{1}{1-r}x_1'$ 是 B 的可行解，于是

$$v_1 \leqslant (1-r)\cdot\frac{1}{1-r}x_1'By^* + x_2'Dy^* \leqslant (1-r)v + rv = v$$

又因

$$v_1 \geqslant (x^*\ 0)Ay' = x^*(B\ C)\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = x^*By_1' + x^*Cy_2'$$

$$= x^*B\frac{y_1'}{1-r}\cdot(1-r) + x^*Cy_2' \geqslant (1\text{-}r)v + rv = v$$

其中　$r = \sum_{y_j \in y_2'} y_j$.

于是有　　$v_1 = v$

故　　$A \sim B$

利用等价关系及本节的结论，求对策的混合鞍点就转化为求它的等价对策的混合鞍点，这在实际应用中将会缩小运算规模，提高运算速度具有重要的应用价值。

3　算法

本算法由两部分组成，算法Ⅰ利用优超关系简化矩阵，算法Ⅱ利用算法Ⅰ和等价关系及其结论求等价矩阵的混合鞍点，进而写出原对策的最优解，为了叙述方面，引入下列记号。

设原对策为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 用 A_i 表示 A 的第 i 个行向量；用 $A\cdot J$ 表示 A 的第 j 个列向量。

算法Ⅰ：

(1) 记 $\alpha_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ki}$，$\beta_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}$，$\beta_{m+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，$A_{\cdot(n+1)} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)^T$，$A_{(m+1)\cdot} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$k=1$，$h=1$，$l=0$.

(2) 若 $k = m+1$ 转 5.

(3) 若 $h > m+1$，$k \leftarrow k+1$，$h=1$，转 2.

(4) 若 $\beta_k < \beta_h$ 且 $A_{k\cdot} \leqslant A_{h\cdot}$，则在 A 中删去第 k 行，令 $l \leftarrow l+1$，$k \leftarrow k+1$，$h=1$，并

在 $A_{\cdot n+1}$中删去第 k 个分量，转 2；否则，令 $h \leftarrow h+1$，转 3.

(5) 令 $m \leftarrow m-l$，$\alpha_i=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ki}$，$\alpha_{n+1}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\beta_k$，$A_{(m+1)\cdot}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$k=1$，$h=1$，$u=0$.

(6) 若 $k=n+1$ 转 9.

(7) 若 $h>n+1$，令 $k \leftarrow k+1$，$h=1$，转 6.

(8) 若 $\alpha_k>\alpha_h$ 且 $A_{\cdot k} \geqslant A_{\cdot h}$，则在 A 中删去第 k 列，$u \leftarrow u+1$，$k \leftarrow k+1$，$h=1$，并在 $A_{(m+1)\cdot}$中删去第 k 个分量，转 6；否则，令 $h \leftarrow h+1$，转 7.

(9)若 $l=0$ 且 $u=0$，停止；若 $u>0$，令 $n \leftarrow n-u$，$\beta_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$，$\beta_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，$A_{\cdot(n+1)}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^T$，$k=1$，$h=1$，$l=0$，转 2；否则，$\beta_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，$k=1$，$h=1$，$l=0$，转 2.

算法 Ⅱ：

(1) 利用算法 Ⅰ 简化矩阵 A，设所得矩阵为 A_1.

(2) 求$\max\limits_{i}\ \min\limits_{j}\ a_{ij}=a_{kh}$.

(3) 在 a_{kh}所在位置上划“√”，求第 h 列的最大元 a_{lh}，若 a_{lh}处已有标记“√”，转 5.

(4) 在 a_{lh}所在位置上划“√”，求第 l 行的最小元 a_{lp}，若 a_{lp}处已有标记“√”，转 5；否则，令 $k \leftarrow l$，$h \leftarrow p$，转 3.

(5) 将标“√”的行和列交叉处构成的矩阵记为 B_1.

(6) 对 B_1 施行算法 I，设所得矩阵为 B_2，若 $B_1=B_2$，转 7；否则，转 2.

(7) 求 B_1 的最优策略(x,y)和最优值 v.

(8) 设 $A_1=\begin{pmatrix} B_1 & C \\ D & E \end{pmatrix}$，若 i)$Dy \leqslant ve_1$ 且 ii)$xc \geqslant ve_2$，e_1 是分量为 1 的 n'维列量，e_2 是分量为 1 的 m'维行向量，n'是 D 的行数，m'是 C 的列数，停止；否则，将不满足条件 i)的所有行和不满足条件 ii)的所有列加到 B_1，得到新的矩阵 B_2.

(9)对 B_2 施行算法 Ⅰ，设所得矩阵为 B_1，转 7.

4 实际应用

设有对策

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

由算法 Ⅰ 的 1—4 知：第 1 行可删去，又由 5—9 知，第一列可删去，于是

$$A \sim A^1=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

又由算法Ⅱ的2—5有

$$B_1=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

由算法Ⅱ的(6)～(7)知 B_1 的最优解为 $x=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$，$y=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\end{pmatrix}$，最优值为 $v=-\frac{1}{8}$.

由算法8，由于

$$Dy=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{5}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{8}\\ -\frac{11}{8}\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

$$XC=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\left(\frac{11}{8},0\right)\geqslant\left(-\frac{1}{8},-\frac{1}{8}\right).$$

故原对策的最优解为 $\tilde{x}=\left(0,\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0\right)$，$\tilde{y}=\left(0,\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0\right)^T$.

对此对策，若采用线性规划法则需要求解线性方程组，而采用算法Ⅱ则简单得多，且易于在计算机上实现。

参考文献

1 L C Thomas. Games, Theory and Applications. Ellis Horwood Limited pressed. 1984, 34-37

A New Theory and Algorithm for Finding Mixed Saddlepoints of Two-person Zero-sum Game

Ma Xurong

(Department of System Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper, the dominant concept and the equivalent definition of game are proposed. Three sufficient conditions with two games being equivalents are presented. Furthmore, a necessary and sufficient condition is given. A new algorithm for finding mixed saddlepoints of two-person zero-sum game is also given.

Key words game, mixed strategy, mixed saddlepoints, dominant, equivalent game