国防科技大学学报
JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY
第15卷第4期 1993年12月 Vol. 15 No. 4

模糊随机过程的可分性与可测性*

刘普寅

（系统工程与数学系）

摘　要　本文证明了一个模糊随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega), t\in T\}$必存在一个与之等价的可分模糊随机过程$\{\underset{\sim}{B}_t(\omega); t\in T\}$；且若模糊随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega), t\in T\}$随机连续，则它存在等价的，可分且可测的模糊随机过程$\{\underset{\sim}{C}_t(\omega), t\in T\}$．

关键词　模糊随机过程，可分模糊随机过程，随机连续，可测模糊随机过程

分类号　O159

1　引　言

为简明计，下文中“模糊”字样均用“F”代替。F随机集，特别是F随机过程的研究，近年来进展很快，但文献[1]提出并解决了许多F随机过程的理论问题，定义了F随机过程的可分性与可测性。但文献[1]并没有证明可分F随机过程与可测F随机过程的存在性。同经典的随机过程理论一样，对F随机过程，这是两个必须解决的理论问题。本文的主要工作是对这两个问题的肯定回答。

下面的记号与术语基本上引自文献[3]. 设$\mathscr{F}_c(R^n)$表示具有下列性质的F集之集：

(1) $\forall\ \underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}_c(R^n)$，$\underset{\sim}{A}_\alpha=\{x\in R^n|\underset{\sim}{A}(x)\geqslant\alpha\}$为$R^n$的闭凸集；

(2) $\mathrm{supp}\underset{\sim}{A}=\overline{\{x\in R^n|\underset{\sim}{A}(x)>0\}}$为$R^n$中的紧集；

(3) $\{x\in R^n|\underset{\sim}{A}(x)=1\}\neq\phi$.

而$cc(R^n)$表示R^n中全体紧凸集之集，在$cc(R^n)$中定义Hausdorff距离d_H：$\forall\ A, B\in cc(R^n)$，

$$d_H(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|,\quad \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\}$$

在$\mathscr{F}_c(R^n)$中定义d_∞如下：$\forall\ \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\in\mathscr{F}_c(R^n)$，

$$d_\infty(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\sup_{\alpha>0}\{d_H(\underset{\sim}{A}_\alpha,\underset{\sim}{B}_\alpha)\}$$

命题1.1　$(\mathscr{F}_c(R^n), d_\infty)$为完备可分的度量空间。

2　F随机过程的可分性与可测性

定义2.1　设$(\Omega,\mathscr{A},P)$为完全概率空间，$T\subset R$，$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega), t\in T\}$满足：$\forall\ t\in T$，

* 1992年5月25日收稿

$\underset{\sim}{A}_t(\omega)$为$\Omega$上取值于$\mathscr{F}_c(R^n)$的$F$随机变量，则称$F$随机变量族$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$为$F$随机过程。

为了解决一个F随机过程的可分性和可测性问题，先引进。

定义 2.2 称F随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$可分是指：在$T$中存在可数子集$C$，使对任意开区间$I$及$\mathscr{F}_c(R^n)$的任何闭集$F_0$，有

$$\{\omega\in\Omega \mid \underset{\sim}{A}_t(\omega)\in F_0,\ t\in T\cap I\}=\{\omega\in\Omega \mid \underset{\sim}{A}_{s_j}\in F_0,\ s_j\in C\cap I\}$$

C称为可分集，$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$称为可分的$F$随机过程。

当$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$为可分$F$随机过程时，若$I\subset T$为某一开区间，则$\Omega_0=\{\omega\in\Omega \mid \underset{\sim}{A}_t(\omega)\in F_0,\ t\in I\}\in\mathscr{A}$，因为若设$C$为可分集，则$\Omega_0=\{\omega\in\Omega \mid \underset{\sim}{A}_t(\omega)\in F_0,\ t\in C\cap I\}$为$\mathscr{A}$中可列个元之交。

定义 2.3 设$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$与$\{\underset{\sim}{B}_t(\omega),\ t\in T\}$均为$F$随机过程，若$\forall\ t\in T$，有

$$P(\{\omega\in\Omega \mid \{\underset{\sim}{A}_t(\omega)=\underset{\sim}{B}_t(\omega)\})=1$$

则称此两个F随机过程是等价的。

对一个F随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$，$t$固定时，则$\underset{\sim}{A}_t(\omega)$为一个$F$随机变量，下面考虑对固定的$\omega\in\Omega$，$\underset{\sim}{A}_t(\omega)$作为$t$的$F$值函数的可测性问题，先引进

定义 2.4 称F随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$在$t_0\in T$处随机连续是指：$\forall\ \varepsilon>0$，

$$\lim_{t\to t_0}P(\{\omega\in\Omega \mid d_\infty(\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ \underset{\sim}{A}_{t_0}(\omega))>\varepsilon\})=0$$

若$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$在$T$上每一点处随机连续，则称$F$随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$是随机连续的。

由于$(\mathscr{F}_c(R^n),\ d_\infty)$为一完备可分的度量空间，故对随机连续的$F$随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$，有

命题 2.5[4] 设$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$为一个随机连续的$F$随机过程，则$T$的任意可数稠密子集$C$，均可作为$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$的可分集。

设$\mathscr{B}_0$为T中全体 Borel 集所生成的σ-代数，$\mathscr{B}_0\times\mathscr{A}$为$\mathscr{B}_0$与$\mathscr{A}$的乘积$\sigma$-代数，$\mu\times P$表示$\mathscr{B}_0$上的 Lebesgue 测度$\mu$与$\mathscr{A}$上的概率测度$P$的乘积测度，$\overline{\mathscr{B}_0\times\mathscr{A}}$表示关于$\mu\times P$完备化的$\sigma$-代数。

定义 2.6 称F随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$是可测的是指：它作为$(t,\omega)$的$F$值函数关于$\overline{\mathscr{B}_0\times\mathscr{A}}$可测。

3 主要结果

首先，有下面几个引理成立。

引理 3.1 设$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$为一个$F$随机过程，$B$为$(\mathscr{F}_c(R^n),\ d_\infty)$中任意 Borel 集，则存在$T$中至多可列的子集$C=\{s_j\}$，使$\forall\ t\in T$，有

$$P(\{\omega\in\Omega \mid \underset{\sim}{A}_{s_j}(\omega)\in B,\ s_j\in C,\ \underset{\sim}{A}_t(\omega)\ \overline{\in}\ B\})=0$$

若记$\mathscr{C}=\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中$B_k$为$(\mathscr{F}_c(R^n),\ d_\infty)$中的 Borel 集，而记$\mathscr{C}_0=\{\bigcap_j B_{k_j} \mid B_{k_j}\in\mathscr{C}\}$，则有

引理 3.2 对F随机过程$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),\ t\in T\}$，存在可数集$C\subset T$，使$\forall\ t\in T$，存在$N_t\subset$

Ω，满足：$P(N_t)=0$，且当 $B_0\in\mathscr{C}_0$ 时，有

$$\{\omega\in\Omega\,|\,\underset{\sim}{A}_{s_j}(\omega)\in B_0,s_j\in C,\underset{\sim}{A}_t(\omega)\overline{\in}B_0\}\subset N_t$$

由于 $\mathscr{F}_c(R^n)$ 可分，设其可数稠密子集为 H：$H=\{\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_n,\cdots\}$，$\mathscr{M}$ 表示 $\mathscr{F}_c(R^n)$ 的以 H 中元素为球心，有理数为半径的开球的并所成的类，而记 $\mathscr{M}_0=\{\bigcap V_k|V_k\in\mathscr{M}\}$，$\mathscr{M}_1=\{F|F\subset\mathscr{F}_c(\mathscr{R}^n)$ 为闭集$\}$。则有

引理 3.3 $\mathscr{M}_1\subset\mathscr{M}_0$.

定理 3.4 设$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$为一个 F 随机过程，则存在一个与$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$等价的可分 F 随机过程$\{\underset{\sim}{B}_t(\omega),t\in T\}$.

对于随机连续的 F 随机过程，我们有

引理 3.5 设 $T\subset R$ 为有限区间，且$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$是以可分集为 C 的可分 F 随机过程且随机连续，则存在 $T_1\subset T$，$\mu(T_1)=0$，且存在(t,ω)的取值于 $\mathscr{F}_c(R^n)$的 F 值函数 $\underset{\sim}{G}_t(\omega)$，满足：$\forall\, t\overline{\in}T_1\cup C$，$P(\{\omega\in\Omega|\underset{\sim}{G}_t(\omega)\neq\underset{\sim}{A}_t(\omega)\})=0$，$\underset{\sim}{G}_t(\omega)$为 $\mathscr{B}_0\times\mathscr{A}$ 可测。

定理 3.6 设$\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$为随机连续的 F 随机过程，则必存在一个与之等价的可分且可测的 F 随机过程$\{\underset{\sim}{C}_t(\omega),t\in T\}$.

参 考 文 献

1 张跃．模糊随机过程与模糊随机振动理论．博士论文，哈尔滨建筑工程学院，1992，(1)

2 王寿仁．概率论基础和随机过程．科学出版社，1986，(6)

3 刘普寅．模糊值测度与模糊积．模糊系统与数学，1991，5(1)：55—65

4 I I Gihman, A V Skorohod. The Theory of Stochastic Processes I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York; 1974

5 Zvi Artstein. On the Calculus of Closed Set—Value Functions. India. Uni. Math. J. 1974, 24(5): 434—441

6 刘普寅．Fuzzy 随机分析及一类 Fuzzy 测度的扩张．硕士论文，国防科技大学，1990

The Separability and Measurability of Fuzzy Stochastic Processes

Liu Puying

(Department of System Engineering and Mathematics)

Abstract

In this paper, it is proved that there is a separable fuzzy stochastic process $\{\underset{\sim}{B}_t(\omega),t\in T\}$ which is equivalent to a fuzzy stochastic process $\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$. Moreover, if a fuzzy stochastic process $\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$ is stochastically continuous, then the existence of a separable and measurable fuzzy stochastic process $\{\underset{\sim}{C}_t(\omega),t\in T\}$ that is equivalent to $\{\underset{\sim}{A}_t(\omega),t\in T\}$ is proved.

Key words fuzzy stochastic processes, separable fuzzy stochastic processes, stochastically continuous, measurable fuzzy stochastic processes